2000 Proceedings of the Autumn Conference, Korean Statistical Society

균형된 불완비 블록계획의 쌍대계획을 이용한 블록 완전이면교배의 설계

김진[1], 배종성[2]

요약

완전이면교배를 블록화하는 디자인으로 대개 부분적으로 균형된 불완비 블록계획을 사용한다. 이때 블록화하는 디자인으로 삼각형 PBIBD를 사용하기 위해는 대응되는 삼각형 PBIBD를 찾아야 한다. 특정한 모수를 갖는 균형된 불완비 블록계획의 쌍대계획이 삼각형 PBIBD가 되는 성질을 이용하면 삼각형 PBIBD를 새로 찾아야 하는 번거로움 없이 블록 완전이면교배를 설계할 수 있다. 이를 만족하는 블록 완전이면교배를 설계하는 방법과 디자인을 제시하였다.

주요용어 : 완전이면교배, 부분적으로 균형된 불완비 블록계획, 쌍대계획

1. 서론

이면교배(diallel crosses)는 동물 또는 식물 육종학에서 자식대의 근교계통(inbred line)들간의 유전적인 성질을 분석하여 어미대의 유전적인 성질을 연구하는데 사용되는 짝짓기 계획이다.
서로 다른 특성을 갖는 p개의 근교계통이 있을 때, i번째 근교계통과 j번째 근교계통간의 교배를 $(i\times j)$, $i<j=1,\cdots,p$ 로 나타내고, 실험에 사용되는 교배수를 n_c라 하자.Griffing(1956)은 교배의 방법을 $n_c=p^2$, $n_c=p(p+1)/2$, $n_c=p(p-1)$, $n_c=p(p-1)/2$의 경우에 대해서 각각 타입 I, II, III. IV로 분류하였으며 그중 타입 IV를 수정 혹은 반 이면교배(modified or half diallel cross)라 하였다. 특히, 식물 육종에서는 정역 교배간에 차이가 없으므로 $(i\times j)=(j\times i)$로서 타입 IV가 가장 일반적으로 사용되고 있다. Griffing의 타입 IV에서 p가 증가하면 실험할 교배의 수가 급격히 증가하여 실제로 모든 교배를 실험하기가 어려운 경우가 있다. 이런 경우 타입 IV에서 일부분의 교배($n=ps/2$, $s<p-1$, s는 각 자식계통이 다른 자식계통과 교배되는 수)만 사용하는 이면교배실험을 부분이면교배(Partial Diallel Cross : PDC) 실험이라 한다. PDC 실험에 대응된다는 의미에서 타입 IV를 완전이면교배(Complete Diallel Cross : CDC)실험이라 한다.
PDC를 설계하는 방법에는 부분적으로 균형된 불완비 블록계획(Partially Balanced Incomplete Block Design : PBIBD)과 순환방법(circulant method)을 이용하는 방법이 사용되어 왔다. Kempthorne 과 Curnow(1961), Arya(1983), Curnow(1963), Singh과 Hinkelmann(1990)은 순환방법을 이용하여 PDC를 설계하였다. PBIBD 중에서 Arya 와 Narain(1977)은 그룹 분류가능 계획(Group Divisible Design : GDD)을 이용하였고, Narain(1977), Fyfe 와 Gilbert(1963), Narain과 Arya(1981)은 삼각형 PBIBD(triangular PBIBD)를 이용하여 PDC를 설계하였다.
또한 근교계통 p가 증가하면 교배수의 증가로 인하여 n_c개의 교배를 동일한 환경에서 동시에 실험하기가 곤란해 진다. 이러한 경우는 동일한 조건하에서 실험 가능한 교배를 블록에 나누어

1) 광주광역시 북구 용봉동 300, 전남대학교 통계학과 박사과정
2) 광주광역시 북구 용봉동 300, 전남대학교 통계학과 교수

배치함으로써 실험오차를 줄이는 블록화 방법을 사용한다.
보통 블록화 방법으로 완전 랜덤화 블록디자인(randomized complete block design)을 사용하였으나, 교배수가 너무 크면 비효율적인 실험이 될 수 있으므로 불완비 블록디자인(incomplete block design)을 사용한다. CDC의 블록화 연구로 Agarwal 과 Das(1990a)는 균형된 불완비 블록계획(Balanced Incomplete Block Design : BIBD)를 이용하여 $n-ary$ 블록 디자인을 설계하였으며, Divecha 와 Gosh(1994)는 삼각형 PBIBD를 이용하여 블록 CDC를 설계하였다. 특히, Agarwal과 Das(1990b)는 CDC를 설계하는데 BIBD을 사용하였고, CDC를 블록화하는데 삼각형 PBIBD를 사용하여 블록 CDC를 설계하였다. 본 논문에서는 CDC를 블록화하는 방법으로 새로운 삼각형 PBIBD를 찾을 필요없이, CDC를 설계할 때 사용된 BIBD의 쌍대 계획(dual design)을 이용하여 블록 CDC를 설계하는 방법과 디자인을 제시하였다.

2. 블록 완전이면교배의 설계

블록 크기가 k이고, 블록 수가 b인 블록 디자인에서 p개의 자식계통을 포함하는 블록화한 이면교배 모형은 다음과 같다.

$$Y = \mu \mathbf{1}_n + \Delta_1 \boldsymbol{g} + \Delta_2 \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

여기서, Y는 $n\times1$인 관측벡터, μ는 전체평균, $\mathbf{1}_n$은 모든 원소가 1인 $n\times1$ 벡터, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{\beta}$는 각각 $p\times1$과 $b\times1$인 일반조합능력 효과와 블록 효과를 나타내는 모수 벡터이다. Δ_1, Δ_2 는 각각 $n\times p$와 $n\times b$인 $\boldsymbol{g}$ 와 $\boldsymbol{\beta}$ 에 대응하는 빈도행렬(incidence matrix)이고, $\boldsymbol{\varepsilon}$은 평균이 0, 분산이 σ^2인 정규분포를 따르는 오차항이다. Δ_1의 (u_1, w_1)원소는 u_1번째 교배가 w_1번째 자식계통을 포함하면 1, 그렇지 않으면 0이고, $u_1=1,2,\cdots,n$, $w_1=1,2,\cdots,p$ 이다. Δ_2 의 (u_2, w_2) 원소는 u_2 번째 교배가 w_2 번째 블록에 있으면 1, 그렇지 않으면 0이고, $u_2=1,2,\cdots,n$, $w_2=1,2,\cdots,b$ 이다. r_{ij}를 교배 ($i\times j$)의 반복 수, $G=r\times\Delta_1{}'\Delta_1=(G_{ij})$, $\Gamma=\Delta_1{}'\Delta_2$ 라면 $G_{ij}=r_{ij}$, $G_{ii}=\sum_{j(\neq i)=1}^{p} r_{ij}=s$ 이다. $\Gamma=(n_{il})$이라면 n_{il} 은 i번째 자식계통이 l 번째 블록에 나타나는 횟수이고, $\sum_{i=1}^{p} n_{il}=2k$ 이다. 일반조합능력, $\boldsymbol{g}$를 추정하기 위한 정보행렬은 다음과 같다.

$$C= G-(1/k)\Gamma\Gamma'$$

CDC를 설계하는데 사용되는 BIBD를 M-디자인(Mating design)이라 하고, 이를 블록화를 하는데 사용되는 PBIBD를 B-디자인(Blocking design)이라 하자.
만약 M-디자인이 모수 $v_0=p$, $b_0=p(p-1)/2$, $r_0=p-1$, $k_0=2$, $\lambda_0=1$인 BIBD이면 각 처리를 $p(p-1)/2$ 개의 블록에 랜덤하게 배치할 수 있다. 그리고, B-디자인이 모수 $v=p(p-1)/2$, b, r, k, λ_i, n_i, p_{jk} ($i,j,k=1,2$)인 PBIBD인 경우에는 B-디자인의 처리번호를 M-디자인의 블록으로 대치하면 블록 CDC가 설계된다. Agarwal and Das(1990)에 따르면 설계된 블록 CDC의 디자인은 $V=p$, $B=b, R=r(p-1)$, $K=2k$인 균형된 $n-ary$ 블록 디자인이다. 이 디자인에서 일반조합능력, g_i의 추정치는

$$\widehat{g}_i = Q_{i.}/(R-r-\frac{S-\Delta}{K})$$

이고, 두 $\widehat{g}_i$의 차에 대한 평균 분산은

$$\overline{Var}(\widehat{g}_i-\widehat{g}_j)=2\sigma^2/(R-r-\frac{S-\Delta}{k})$$

이다. 여기서, $Q_{i.}$은 i 번째 자식계통이 포함된 교배 특성치의 총합을 나타내고, σ^2은 분산, $S=\sum_l n_{il}^2 = RK-\Delta(V-1)$, $\Delta=\lambda(p-1)^2+(r-\lambda)$이다.

완전 랜덤 블록계획인 경우 두 $\widehat{g}_i$의 차에 대한 평균 분산은 다음과 같다.

$$\overline{Var}(\widehat{g}_i-\widehat{g}_j)=\frac{2\sigma^2}{r(p-2)}$$

따라서, PBIBD를 사용한 블록 CDC의 평균효율인자 e는 다음과 같다.

$$e=\frac{\overline{Var}(\widehat{g}_i-\widehat{g}_j)_{CRBD}}{\overline{Var}(\widehat{g}_i-\widehat{g}_j)_{PBIBD}}=\frac{(R-r-\frac{S-\Delta}{k})}{r(p-2)}$$

3. 균형된 불완비 블록계획의 쌍대 계획을 이용한 블록 완전이면교배의 설계

2절과 같이, B-디자인으로 PBIBD을 사용하기 위해서는 $v=p(p-1)/2$, b, r, k, λ_i, n_i, p_{jk} ($i,j,k=1,2$)인 PBIBD를 찾아야 한다. 그러나, BIBD으로 M-디자인을 설계했다면 BIBD의 쌍대 계획이 갖는 성질을 이용하여 B-디자인을 위한 PBIBD를 따로 찾을 필요가 없다.

정의 3.1 만일 D가 모수 v, b, r, k, $\lambda=1$을 갖는 비대칭 BIBD라면, D의 쌍대 계획인 D^*는 다음과 같은 모수를 갖는 동반수 2인 PBIBD이다(Ragavarao).

$$v^*=b,\ \ b^*=v,\ \ r^*=k,\ \ k^*=r,$$
$$n_1^*=k(r-1),\ \ n_2^*=b-1-n_1,\ \ \lambda_1^*=1,\ \ \lambda_2^*=0$$
$$p_{11}^{1*}=r-2+(k-1)^2,\ \ p_{11}^{2*}=k^2$$

Agarwal과 Das(1987)는 B-디자인으로 삼각형 PBIBD를 사용하기 위해 $v=p(p-1)/2$, b, r, k, λ_i, n_i, p_{jk} ($i,j,k=1,2$)인 삼각형 PBIBD를 찾아야 하지만 정의 3.1에서 BIBD가 특정한 모수를 갖으면 그 BIBD의 쌍대계획은 삼각형 PBIBD가 되므로 일부러 삼각형 PBIBD를 찾을 필요가 없다. 특정한 모수를 갖는 BIBD의 쌍대계획이 삼각형 PBIBD가 됨을 보이자.

정리 3.1 D가 $v=p,b=\frac{p(p-1)}{2}$, $r=p-1$, $k=2,\lambda=1$을 갖는 비대칭 BIBD이면 쌍대 계획 D^*는 다음과 같은 모수를 갖는 삼각형 PBIBD이다.

$$v^*=\frac{p(p-1)}{2},\ \ b^*=p,\ \ r^*=2,\ \ k^*=p-1,\ \ \lambda_1^*=1,\ \ \lambda_2^*=0$$

(증명) D^*는 정의 3.1에 의해서

$$v^* = b = \frac{p(p-1)}{2},\ b^* = v = p,\ r^* = k = 2,\ k^* = r = p-1,\ \lambda_1^* = 1,\ \lambda_2^* = 0$$

$$n_1^* = k(r-1) = 2(p-2),$$

$$n_2^* = b - 1 - n_1 = \frac{p(p-1)}{2} - 2(p-2) - 1 = \frac{(p-2)(p-3)}{2},$$

$$p_{11}^{1*} = r - 2 + (k-1)^2 = (p-1) - 2 + 1 = p - 2,$$

$$p_{11}^{2*} = k^2 = 4$$

이다. PBIBD는 p_{ij}^k에 의해서 결정이 되고 다음 성질을 만족한다.

$$p_{ij}^k = p_{ji}^k \tag{3.1}$$

$$n_k p_{ij}^k = n_i p_{jk}^i = n_j p_{ik}^j \tag{3.2}$$

$$\sum_j p_{ij}^k = n_i - \delta_{ik},\ (\ \delta_{ik}\text{는 } i=k\text{이면 } 1,\ i\neq k\text{이면 } 0\text{이다.}) \tag{3.3}$$

(3.2)의 식에 $i=1, j=1, k=2$, $i=2, j=1, k=2$, $i=2, j=2, k=1$를 각각 대입하면

$$p_{12}^1 = n_2 p_{11}^2 / n_1 = p - 3$$

$$p_{12}^2 = n_1 p_{22}^1 / n_2 = 2(p-4)$$

$$p_{22}^1 = n_2 p_{21}^2 / n_1 = (p-3)(p-4)/2$$

이 되고 (3.1)에 의해서 $p_{21}^1 = p_{12}^1 = p-3$, $p_{21}^2 = p_{12}^2 = 2(p-4)$ 이다.

마지막으로, (3.3)의 식에 $i=2, k=2$를 대입하면 $p_{21}^2 + p_{22}^2 = n_2 - 1$이므로

$$p_{22}^2 = n_2 - p_{21}^2 - 1 = (p-4)(p-5)/2$$

이다. 따라서 $v=p, b=\frac{p(p-1)}{2}$, $r=p-1$, $k=2, \lambda=1$을 갖는 BIBD의 쌍대계획은

$$v^* = \frac{p(p-1)}{2},\ b^* = p,\ r^* = 2,\ k^* = p-1,\ \lambda_1^* = 1,\ \lambda_2^* = 0$$

$$n_1 = 2(p-2),\ n_2 = (p-2)(p-3)/2$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} p-2 & p-3 \\ p-3 & (p-2)(p-3)/2 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2p-8 \\ 2p-8 & (p-4)(p-5)/2 \end{pmatrix}$$

을 갖는 삼각형 PBIBD이 된다. ■

정리 3.1를 이용하여 블록 CDC를 설계하여 보자.

M-디자인을 $v=p, b=p(p-1)/2$, $r=p-1$, $k=2, \lambda=1$인 BIBD로 사용하고 이때의 빈도행렬(incidence matrix)를 N이라 한다. B-디자인은 M-디자인의 쌍대 계획을 사용하여 B-디자인의 처리번호를 M-디자인의 블록으로 대치하면 블록 CDC가 된다.

이때, 블록 CDC는 $\Delta_1 = \Delta_2 = N'$이 되고, 사용된 B-디자인이 삼각형 PBIBD이므로

$$C = \theta(I - p^{-1}J),$$
$$\theta = k^{-1} p(p-2)\{\lambda_1 + (p-3)\lambda_2/2\}$$

이다. B-디자인으로 완전 랜덤 블록계획을 사용 한 경우의 정보행렬 C_R은

$$C_R = r(p-2)(I - p^{-1}J),$$

이고, 설계된 블록 CDC의 효율은 다음과 같다(Dey and Midha, 1996).

$$e=\frac{\theta}{r(p-2)}$$

예제 $p=5$인 경우 블록 CDC를 설계해 보자. M-디자인은 $v=5$, $b=10$, $r=4$, $k=2$, $\lambda=1$ 인 BIBD로서 다음과 같다.

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
1 2	1 4	3 4	2 3	2 5	3 5	1 3	1 5	4 5	2 4

B-디자인은 M-디자인의 쌍대계획인 $v^*=10$, $b^*=5$, $r^*=2$, $k^*=4$, $\lambda_1^*=1$, $\lambda_2^*=0$ 을 갖는 삼각형 PBIBD으로서 다음과 같다.

B1	B2	B3	B4	B5
1 2 7 8	1 4 5 10	3 4 6 7	2 3 9 10	5 6 8 9

B-디자인의 처리번호를 M-디자인의 블록으로 대치한 블록 CDC는 다음과 같다.

B1	B2	B3	B4	B5
1×2	1×2	1×3	1×4	1×5
1×3	2×3	2×3	2×4	2×5
1×4	2×4	3×4	3×4	3×5
1×5	2×5	3×5	4×5	4×5

위의 블록 CDC의 모형에 관련된 행렬과 정보행렬은 다음과 같다.

$$\Delta_1=\Delta_2=N'=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\1&0&0&1&0\\1&0&0&0&1\\0&1&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\quad G=\begin{bmatrix}8&2&2&2&2\\2&8&2&2&2\\2&2&8&2&2\\2&2&2&8&2\\2&2&2&2&8\end{bmatrix}\quad \Gamma=\begin{bmatrix}4&1&1&1&1\\1&4&1&1&1\\1&1&4&1&1\\1&1&1&4&1\\1&1&1&1&4\end{bmatrix}$$

$$C=G-k^{-1}\Gamma\Gamma'=\begin{bmatrix}3.00&-0.75&-0.75&-0.75&-0.75\\-0.75&3.00&-0.75&-0.75&-0.75\\-0.75&-0.75&3.00&-0.75&-0.75\\-0.75&-0.75&-0.75&3.00&-0.75\\-0.75&-0.75&-0.75&-0.75&3.00\end{bmatrix}$$

위 디자인의 평균효율인자는 $e=\theta/r(p-2)=0.625$ 이다. ■

M-디자인이 $v=p, b=p(p-1)/2$, $r=p-1$, $k=2, \lambda=1$인 BIBD인 경우 M-디자인의 쌍대계획을 B-디자인으로 사용한 블록 CDC를 찾아 평균효율인자와 함께 [표 3.1]에 제시하였다.

[표 3.1]에 제시된 T28~T96은 Clatworthy(1973)의 삼각형 PBIBD를 나타내고, B3~B31는 Raghavarao(1971)의 BIBD를 나타낸다.

[표 3.1] 블록 CDC와 평균효율인자

M-디자인						블록 CDC									e
디자인	v	b	r	k	λ	디자인	v	r	k	b	n_1	n_2	λ_1	λ_2	
B3	5	10	4	2	1	T28	10	2	4	5	6	3	1	0	.625
B6	6	15	5	2	1	T48	15	2	5	6	8	6	1	0	.600
B12	7	21	6	2	1	T65	21	2	6	7	10	10	1	0	.583
B14	8	28	7	2	1	T72	28	2	7	8	12	15	1	0	.571
B18	9	36	8	2	1	T78	36	2	8	9	14	21	1	0	.563
B24	10	45	9	2	1	T86	45	2	9	10	16	28	1	0	.556
B31	11	55	10	2	1	T96	55	2	10	11	18	36	1	0	.550

4. 결론

본 논문에서는 B-디자인으로 삼각형 PBIBD를 사용하기 위해 $v=p(p-1)/2$, b, r, k, λ_i, n_i, p_{jk} $(i,j,k=1,2)$인 삼각형 PBIBD를 찾을 필요없이 특정한 모수를 갖는 BIBD의 쌍대계획이 삼각형 PBIBD가 되는 성질을 이용하여 블록 CDC를 설계하는 방법을 제시하였다. 향후에는 블록 PDC를 설계하기 위해 M-디자인으로 사용된 PBIBD의 쌍대계획의 성질을 이용하여 B-디자인을 설계하는 방법에 대해서도 연구가 되어야 할 것이다.

참고문헌

[1] Agarwal, S.C. and Das, M.N.(1990a), Use of n-ary block designs in diallel crossed evaluation, *Journal of Applied Statistics*, 17. 125-131.

[2] Agarwal, S.D and Das, M.N. (1990b). Incomplete Block designs for Partial Diallel Cross. *Sankhya B*, 52, 75-81.

[3] Clatworthy, H.W., Cameron, M.J., and Speckman, A.J. (1973). *Tables of Two-Associate-Class Partially Balanced Designs*. Applied Maths. Ser. 63. Washington D.C.: Nartional Bureau of Standards.

[4] Dey, A. and Midha, C.K. (1996), Optimal block designs for diallel crosses, *Biometrika*, 83. 484-489.

[5] Griffing, B. (1956), Concept of general and specific combining ability in relation to diallel crossing systems. *Australian Journal of Biological Sciences* 9, 463-493.

[6] Raghavarao, D.(1971), *Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments*, Dover publications.

[7] Singh, M. and Hinkelmann, K. (1995), Partial Diallel Crosses in Incomplete Blocks, *Biometrics*, 51, 1302-1314.