

평균포함확률을 활용한 Poisson 신뢰구간의 비교연구

정형철¹⁾ 김대학²⁾

요약

Poisson 신뢰구간을 구하는 방법을 살펴보고 평균포함확률 측면에서 붓스트랩 신뢰구간이 지니는 특징을 모의실험을 통하여 기존의 신뢰구간과 비교하였다.

주요용어 : Poisson 신뢰구간, 붓스트랩, 평균포함확률

1. 소개

Poisson 분포를 따르는 표본의 크기가 n 인 자료가 주어졌을 때, 기본적인 통계적 추론 중 하나는 모수 μ 에 대한 신뢰구간을 추정하는 것이다. 이에 대해 대부분의 통계학 책에서는 $\bar{X} \pm Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\bar{X}/n}$ 과 같은 신뢰구간을 제시하고 있다. 이와같은 신뢰구간을 Wald 유형의 신뢰구간이라 하는데 이 신뢰구간은 Poisson 분포가 지니는 이산성 때문에 주어진 명목수준을 하향 추정하는 경향이 있다. 또한 Poisson 신뢰구간에는 “정확”(Exact) 신뢰구간이 있는데 이항분포에서 Agresti and Coull(1998)의 실험과 같이 대부분의 정확신뢰구간은 주어진 명목수준을 상향 추정하는 경향이 존재한다. 한편, 신뢰구간을 구축하는 방법으로 붓스트랩을 이용할 수 있다. Woodrooffe and Jhun(1989)은 평균포함확률(average coverage probability) 측면에서 붓스트랩분포와 실제분포와의 차이를 실질적으로 $o(1/\sqrt{n})$ 까지 줄일 수 있음을 보였으므로, 모수 μ 의 신뢰구간 구축에 붓스트랩을 사용하는 것도 의미가 있으리라 여겨진다. 본 연구에서는 Sahai and Khurshid(1993)의 Poisson 분포에 대한 여러 신뢰구간을 살펴보고, 평균포함확률 측면에서 비교하여, 최적의 신뢰구간을 구축하는 방법을 고찰하고자 한다. 2장에서는 모수 μ 에 대한 여러 신뢰구간들을 살펴보고 3장에서는 이들을 모의실험으로 비교하였다.

2. 모수 μ 의 신뢰구간 구축 및 비교방법

2.1 신뢰구간

서로 독립인 확률표본 X_1, X_2, \dots, X_n 이 모수가 μ 인 Poisson 분포를 따른다고 하자. 여기서, 합 $X = \sum X_i$ 는 모수가 $\nu = n\mu$ 인 Poisson 분포를 따르게 된다. 이제, ν 의 $100(1-\alpha)\%$ 정확신뢰구간의 최소값 ν_L 과 최대값 ν_U 은 다음을 만족하여야 한다.

$$P(X \geq x | \nu = \nu_L) = \sum_{k=x}^{\infty} e^{-\nu_L} \nu_L^k / k! \leq \alpha/2 \quad P(X \geq x | \nu = \nu_U) = \sum_{k=0}^x e^{-\nu_U} \nu_U^k / k! \leq \alpha/2$$

이에 의해 μ 의 정확신뢰구간은 다음과 같다.

- 1) (450-701) 경기도 평택시 평택대학교 정보과학부 통계학전공 조교수
 2) (712-702) 경북 경산시 대구효성가톨릭대학교 정보통계학과 부교수

$$EX(L) : \mu_L = \frac{1}{2n} \chi_{2x, a/2}^2 \quad EX(U) : \mu_U = \frac{1}{2n} \chi_{2(x+1), 1-a/2}^2 \quad (2.1)$$

또한, 카이제곱분포의 정규근사에 의해 다음의 신뢰구간을 구할 수 있다.

$$CH(L) : \mu_L = \bar{x} \left[1 - \frac{1}{9x} - \frac{Z_{1-a/2}}{3\sqrt{x}} \right]^3 \quad CH(U) : \mu_U = \left(\bar{x} + \frac{1}{n} \right) \left[1 - \frac{1}{9(x+1)} + \frac{Z_{1-a/2}}{3\sqrt{x+1}} \right]^3 \quad (2.2)$$

이제, $\bar{X} = X/n$ 을 모수 μ 에 대한 최대우도추정량이라 놓으면, 정규근사를 이용하여 쉽게 얻을 수 있는 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 다음과 같다.

$$WA : \bar{X} \pm Z_{1-a/2} \sqrt{\bar{X}/n} \quad (2.3)$$

또한, 분산을 2차 적률로 추정한 신뢰구간을 생각 할 수 있다. 즉, $S^2 = \sum(X_i - \bar{X})^2/n - 1$ 을 이용하여 다음과 같은 신뢰구간(W2)을 구축할 수 있다.

$$W2 : \bar{X} \pm Z_{1-a/2} S/\sqrt{n} \quad (2.4)$$

그런데, Wald 신뢰구간(WA)처럼 분산을 추정하는 것이 아니라, 분산을 그대로 모수 μ 로 추정한 Score 신뢰구간(SC)은 다음과 같다.

$$SC : \bar{x} \left[1 + \frac{1}{2x} Z_{1-a/2}^2 \left[1 \pm \left(1 + \frac{4x}{Z_{1-a/2}^2} \right)^{1/2} \right] \right] \quad (2.5)$$

위의 Score 신뢰구간에 연속성 수정을 가한 신뢰구간(S2)은 다음과 같다.

$$S2(L) : \bar{x} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} Z_{1-a/2}^2 - Z_{1-a/2} \sqrt{\frac{\bar{x}}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{Z_{1-a/2}^2}{4n^2}}$$

$$S2(U) : \bar{x} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} Z_{1-a/2}^2 + Z_{1-a/2} \sqrt{\frac{\bar{x}}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{Z_{1-a/2}^2}{4n^2}} \quad (2.6)$$

연속성 수정의 근사보다 좀 더 정확한 근사식은 Sahai and Khurshid(1993)의 Molenaar 근사이다. Molenaar 근사에 의한 신뢰구간(MO)은 다음과 같다.

$$MO : \bar{x} + \frac{2Z_{a/2}^2 + 1}{6n} \pm \left[\frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \sqrt{Z_{a/2}^2 \left(x \pm \frac{1}{2} + \frac{Z_{a/2}^2 + 2}{18} \right)} \right] \quad (2.7)$$

또한, 테일러 전개와 분산안정화 방법을 활용하여 신뢰구간을 구축할 수 있다. 이에 대해 본 연구에서는 Sahai and Khurshid(1993)의 Bartlett 방법(BA), Anscombe 방법(AN), Freeman and Tukey 방법(FT), Hald 방법(HA)을 고려하였다. 각 방법의 신뢰구간은 아래와 같다.

$$BA : \frac{1}{n} \left(\sqrt{x} \pm \frac{1}{2} Z_{a/2} \right)^2 \quad AN : \frac{1}{n} \left(\sqrt{x + \frac{3}{8}} \pm \frac{1}{2} Z_{a/2} \right)^2 - \frac{3}{8n}$$

$$FT : \frac{1}{4n} \left[\sqrt{x} + \sqrt{x+1} \pm Z_{a/2} \right]^2 - 1 \quad HA : \frac{1}{n} \left[\sqrt{x - \frac{1}{2}} \pm \frac{Z_{a/2}}{2} \right]^2 + \frac{1}{2n}$$

마지막으로, 붓스트랩 신뢰구간을 생각 할 수 있는데 모수 μ 에 대한 붓스트랩 추정량을 $\hat{\mu}^*$ 라고 하면, B 회의 붓스트랩 반복에 의해 얻은 붓스트랩 분포로부터 다음의 붓스트랩 신뢰구간을 얻을 수 있다.

$$BT : \left[\bar{X} - q_{(1-a/2)} \sqrt{\bar{X}/n}, \bar{X} - q_{(a/2)} \sqrt{\bar{X}/n} \right]$$

여기서, $q_{(a)}$ 는 다음의 B회 모수적 붓스트랩 반복에 의해 얻은 Z^* 의 $100\alpha\%$ 분위수이다.

$$Z^*(b) = \frac{\sqrt{n}(\hat{\mu}^* - \bar{X})}{\sqrt{\bar{X}/n}}, \quad b=1, \dots, B$$

또한, 식 (2.4)와 같은 유형으로 다음과 같은 붓스트랩 신뢰구간(B2)을 구할 수 있다.

$$B2 : [\bar{X} - q_{(1-\alpha/2)}^* S/\sqrt{n}, \bar{X} - q_{(\alpha/2)}^* S/\sqrt{n}]$$

여기서, $q_{(\alpha)}^*$ 는 다음의 B회 모수적 붓스트랩 반복에 의해 얻은 Z^{**} 의 100 $\alpha\%$ 분위수이다.

$$Z^{**}(b) = \frac{\sqrt{n}(\hat{\mu}^* - \bar{X})}{S^*/\sqrt{n}}, \quad b=1, \dots, B$$

2.2 상대오차

EX_* 를 정확신뢰구간의 상한 및 하한, P_* 를 각 방법의 신뢰구간의 상한 및 하한이라고 할 때 정확신뢰구간과의 상대오차는 다음과 같다.

$$\text{Relative error} = 100 \left[\frac{(1 + P_*) - (1 + EX_*)}{(1 + EX_*)} \right]$$

2.3 평균포함확률

표본의 크기가 1일 때, 임의의 모수 μ 에 대해, 식 (2.4)와 식 (2.13)를 제외한 11가지 방법에 대해 정확한 포함확률을 계산할 수 있다. 즉, 포함확률은 다음과 같다.

$$\text{Coverage} : C(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} I(k, \mu) \frac{e^{-\mu} \mu^k}{k!}$$

여기서, $I(k, \mu)$ 는 $X=k$ 에서, 신뢰구간이 주어진 모수 μ 를 포함하면 1, 그렇지 않으면 0이 되는 지시함수이다. 본 연구에서는 임의의 모수 μ 에 대한 평균적 수행능력을 평가하기 위해, 모수 μ 에 사전 분포 $g(\mu)$ 를 가정하여, 다음을 계산하였다.

$$\bar{C}(\mu) = \int_{\Omega} C(\mu) g(\mu) d\mu$$

위 식을 평균포함확률이라 할 수 있다(Woodroffe and Jhun; 1989, Agresti and Coull; 1998).

2.4 신뢰구간의 기대 폭(Expected widths)

$X=k$ 에서 신뢰구간의 폭을 W_k 라 하면 신뢰구간의 기대 폭은 다음과 같다.

$$E_{\mu}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k \frac{e^{-\mu} \mu^k}{k!}$$

3. 모의실험 결과

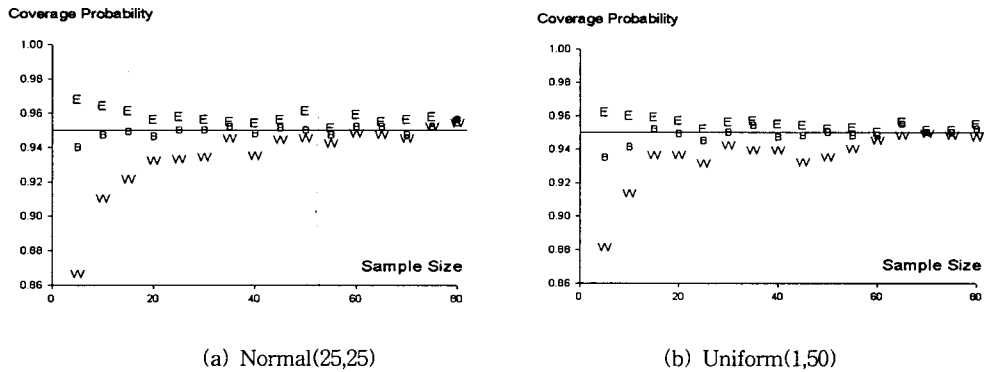
3.1 평균포함확률

(표 1)은 사전분포가 Uniform(1,50)일 때, 평균포함확률을 명목수준 95%에서 계산한 결과이다. 2차 적률을 이용하여 분산을 추정하는 Wald 방법(W2)의 평균포함확률이 가장 명목수준을 하향추정하고 있으며, 정확신뢰구간(EX)은 주어진 명목수준보다 과대추정되고 있다. 또한, 정확 방법(EX)의 평균포함확률이 Molenaar의 근사방법(MO), 그리고 식 (2.2)의 방법(CH)과 일치함을 볼 수 있다. Score 방법(SC)은 약간 과대추정 되는 경향이 있으며, 붓스트랩 방법(B2)이 명목수준에 상당히 근사하다.

평균포함확률을 활용한 포아송 신뢰구간의 비교연구

표본(n)	WA	W2	EX	SC	S2	MO	CH	BA	AN	FT	HA	BT	B2
5	.948	.881	.962	.953	.961	.962	.962	.953	.955	.953	.951	.952	.939
15	.951	.936	.959	.958	.963	.959	.959	.949	.949	.951	.949	.955	.952
30	.953	.942	.956	.954	.955	.956	.956	.955	.955	.956	.955	.951	.950
50	.946	.935	.952	.950	.952	.952	.952	.950	.950	.952	.950	.950	.950

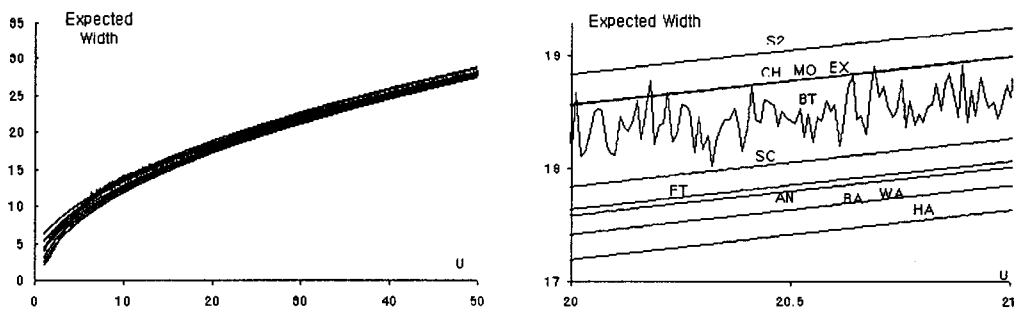
(표 1) 명목수준 95%에서 평균포함확률 (사전분포:Uniform(1,50), 모의실험 1000회, 붓스트랩 반복 2000회)



(그림 1) 정확방법(E), Wald 방법(W) 그리고 B2의 붓스트랩방법(B)의 다른 평균포함확률

(그림 1)에 의하면, 붓스트랩 방법이 명목수준에 수렴하는 속도가 정규근사에 의한 방법보다 빠름을 보여 주고 있다. 또한 정확방법(EX)은 주어진 95% 명목수준보다 위에서 수렴하는 형태를 보여주고 있다. (그림 2)는 $n=1$ 에서 모수 μ 에 따른 W2와 B2를 제외한 11가지 방법에 대한 실제 포함확률(actual coverage probability)이다.

3.2 신뢰구간의 기대 폭

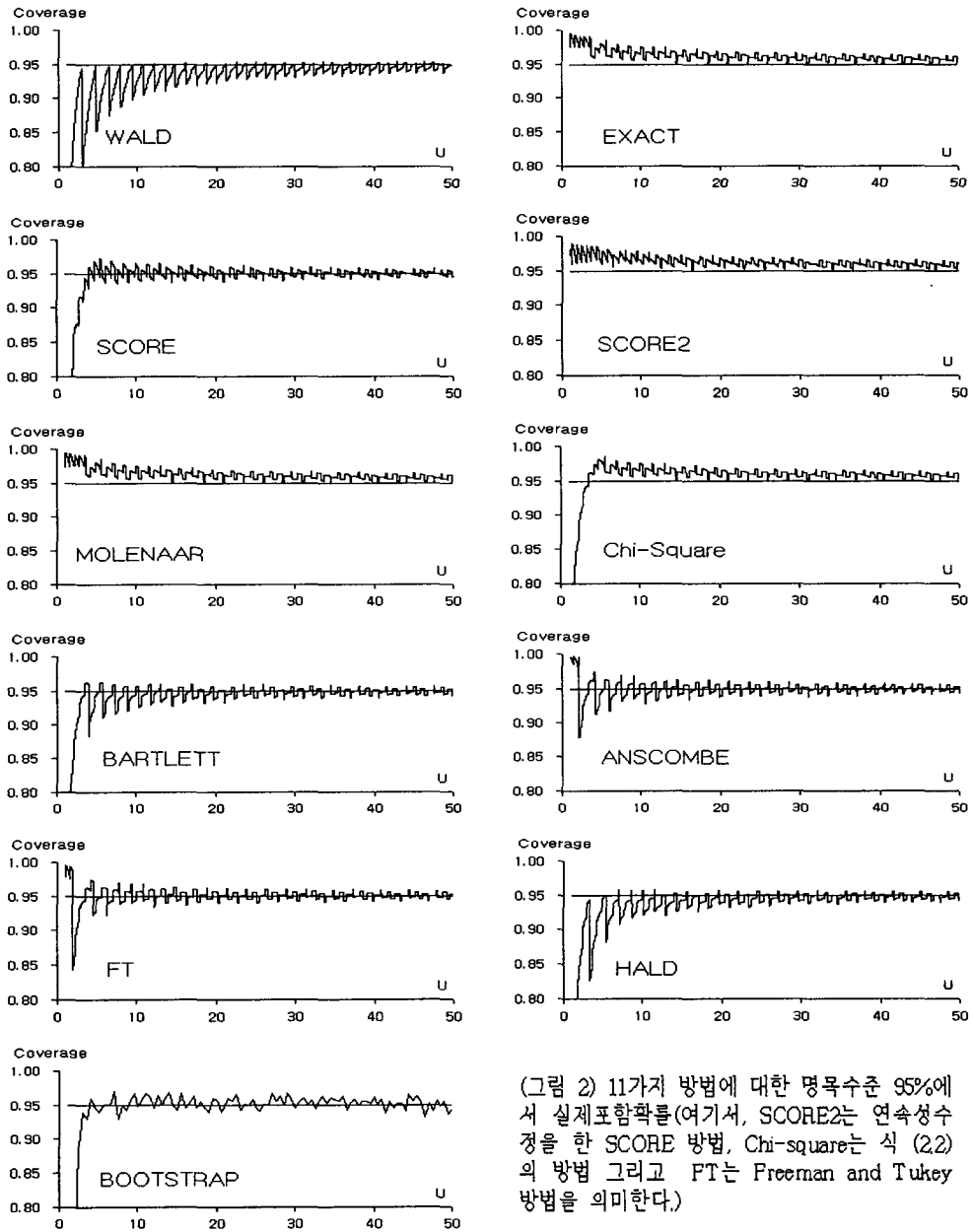


(a) 모수 μ 가 1에서 50일 때 기대길이 (b) 모수가 20-21일 때 (a)를 확대한 그림

(그림 3) 표본의 크기 1에서 모수에 따른 95% 신뢰구간의 길이

(그림 3)의 (a)는 표본의 크기 1에서 모수 μ 에 따른 신뢰구간들의 기대 폭을 보여 주고 있다. 신뢰구간의 폭은 Hald 방법(HA)이 가장 좁으며, 연속성 수정을 가한 Score 방법(S2)의 폭이 가장 넓은을 볼 수 있다. 11가지 방법들은 신뢰구간의 폭에 있어서 일정한 순서를 유지하고 있는데, 중간에 형성되는 신뢰구간은 Score 방법(SC)이며, 붓스트랩 방법은 정확신뢰구간과 Score 신뢰구간 사이에서 변동을 지니면서 존재하고 있으며, 가끔 정확신뢰구간의 폭과 일치하

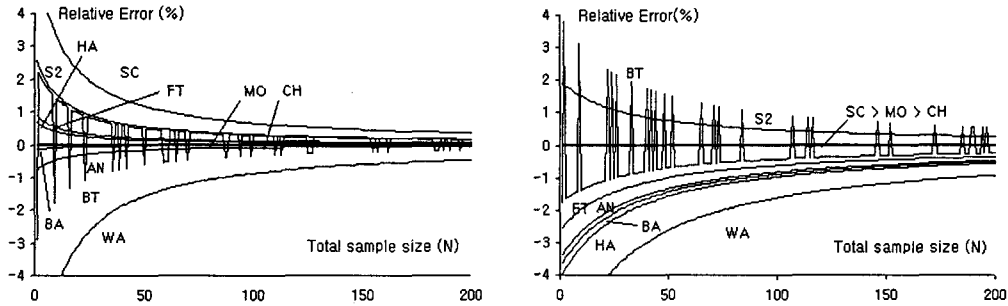
게 된다. 특이한 것은 부스트랩 신뢰구간의 기대 폭은 모수 μ 가 커질수록 변동의 변화가 아래로 내려가면서 Score 신뢰구간의 폭과 일치되는 경향이 나타난다는 점이다.



3.3 상대오차

본 연구에서는 근사이론에 기초한 신뢰구간과 정확신뢰구간을 비교하기 위해 상대오차를 계산하였다. 상대오차를 측정하기 위해 표본의 합이 일정하게 주어질 때, 표본의 크기가 증가되는

경우를 살펴보았다.



(a) 하한에 대한 상대오차 (b) 상한에 대한 상대오차
 (그림 4) 표본의 크기에 따라 표본의 합 X 가 20일 때, 정확방법과 비교한 상대오차

(그림 4)를 통해 Score 방법(SC), 연속성 수정을 한 Score 방법(S2), Freeman and Tukey 방법(FT) 그리고 Hald 방법(HA)은 정확방법에 비해 신뢰구간의 하한이 정확신뢰구간보다 위에 형성되며, Anscombe 방법(AN)과 Wald 방법(WA)은 정확신뢰구간보다 신뢰구간의 하한이 더 아래에 있음을 볼 수 있다. 특히 Wald 방법(WA)은 상한도 정확신뢰구간보다 아래에 있으므로 전체적으로 정확신뢰구간보다 신뢰구간이 아래에서 형성되고 있으며, 연속성 수정을 한 Score 방법(S2)은 정확신뢰구간보다 신뢰구간이 위에 형성되고 있음을 보여준다. 정확신뢰구간에 항상 포함되는 신뢰구간은 FT 신뢰구간이다.

4. 결론

우리는 본 연구를 통해 다음의 몇 가지 결과와 제안을 제시하고자 한다. 첫째, Wald 방법, Bartlett 방법 그리고 Hald 방법은 하향추정하는 경향이 있다. 둘째, 정확방법, 연속성 수정된 Score 방법, Molenaar 방법, 식 (2.2)의 정규근사방법(CH)은 상향추정을 하며 정확신뢰구간과 거의 일치한다. 그러므로 특별히 Score 방법에 연속성 수정을 가할 필요는 없어 보인다. 셋째, 모수가 5이상 일 때, Score 방법이나 Sahai and Khurshid(1993)의 Freeman and Tukey방법을 사용할길 권한다. 넷째, 붓스트랩 방법은 Score 방법이 지니는 이론적 어려움을 피하여 주며, Wald 방법에 대한 훌륭한 대안이 될 수 있다. 특히 표본의 크기에 따라 적절하게 Score 방법과 정확방법의 신뢰구간의 유형을 따라주며, 평균포함확률이 주어진 명목수준에 매우 일치한다는 점에서 모수에 대한 어떤 정보가 주어지지 않은 경우에 적절히 활용하길 권한다.

참고문헌

- [1] Agresti, A. and Coull, B.(1998) Approximate is Better than "Exact" for Interval Estimation of Binomial Proportions. *The American Statistician*, Vol. 52, 119-126.
- [2] Sahai, H. and Khurshid, A.(1993) Confidence Intervals for the Mean of a Poisson Distribution: A Review. *Biometrical Journal* vol 7. 857-67
- [3] Woodroffe, M. and Jhun M.(1989) Singh's theorem in the lattice case. *Statistics Probability Letters*, Vol. 7, 201-205.