

## Euler 방정식을 사용한 익형 주위에서의 유동장 해석

A Flowfield Analysis Around an Airfoil by Using the Euler Equations

김 문 상<sup>1)</sup>

M.S. Kim

An Euler solver is developed to predict accurate aerodynamic data such as lift coefficient, drag coefficient, and moment coefficient. The conservation law form of the compressible Euler equations are used in the generalized curvilinear coordinates system. The Euler solver uses a finite volume method and the second order Roe's flux difference splitting scheme with min-mod flux limiter to calculate the fluxes accurately. An implicit scheme which includes the boundary conditions is implemented to accelerate the convergence rate. The multi-block grid is integrated into the flow solver for complex geometry. The flowfields are analyzed around NACA 0012 airfoil in the cases of  $M_\infty=0.75$ ,  $\alpha=2.0$  and  $M_\infty=0.80$ ,  $\alpha=1.25$ . The numerical results are compared with other numerical results from the literature. The final goal of this research is to prepare a robust and an efficient Navier-Stokes solver eventually.

### 1. 서 론

설계하고자 하는 익형의 양력계수, 항력계수, 모멘트 계수 등은 항공기 설계에 있어서 필수적으로 요구되는 중요한 공력 자료들이며, 이러한 공력 자료들을 수치해석 방법에 의해서 정확하게 계산하려는 노력들이 지금까지 꾸준히 진행되어왔다[1,2,3,4]. 본 논문에서는 이러한 공력 자료들을 정확하게 수치적으로 계산하기 위해서 익형 주위에서의 압력분포, 속도분포 등을 해석할 수 있는 Euler Solver를 개발하였다.

본 연구에서 개발한 Euler Solver는 2차원 보존형(Conservative Form) Euler 방정식을 유한 체적법을 사용하여 일반 좌표계에서 사용할 수 있도록 구성하였으며, 복잡한 기하학적 물체에 대한 격자 구성을 가능토록 하기 위해서 다중 블록 격자체를 수용할 수 있도록 하였다. 또한 비점성 플럭스를 계산하기 위해서 Roe의 Flux Difference Splitting 기법을 사용하였고, 계산 결과의 정확성을 향상시키기 위해서 MUSCL(Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Law) 알고리즘을 사용한 2차 차분법을 사용하였다. 그러나 2차 차분법을 사용할 경우 충격파와 같은 불연속면에서 수렴상의 문제가 발생하므로 이러한 부분에 대해서는 min-mod flux limiter를 사용하여 수렴상의 안정성을 확보하였다.

본 연구에서 개발한 Euler Solver의 검증을 위해서 충격파가 익형의 윗면에서만 형성되는  $M_\infty=0.75$ ,  $\alpha=2.0$ 인 경우와 물리적으로 조금 더 복잡한 익형의 윗면에 강한 충격파가, 그리고 아랫면에 약한 충격파가 형성되는  $M_\infty=0.80$ ,  $\alpha=1.25$ 인 경우에 대해서 각각 해석을 하였고, 그 결과들을 Buning[1], Coakley[2], Pulliam[3], Rizzi[4] 등의 해석 결과와 비교하였다.

본 연구를 통해서 개발된 Euler Solver는 익형 주위에서의 유동해석뿐만 아니라 다른 형상을 갖는 물체 주위에서의 유동장 해석과 추후 점성 효과를 고려한 Navier-Stokes Solver 개발을 위한 모체로 사용될 예정이다.

### 2. 본 론

#### 2.1 Euler 방정식

자유 흐름에 대해서 무차원화된 2차원 Euler 방정식을 직교 좌표계에서 나타내면 다음과 같다.

1) 한국항공대학교 항공우주공학과



$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix} \tag{2}$$

이때  $Q$ 는 보존변수이며,  $F$ 와  $G$ 는 각각  $x$  방향과  $y$ 방향의 대류 항(Convective Term)을 나타낸다.

### 2.2 Roe's Flux Difference Splitting Scheme

Euler 방정식의 대류항은 물리적으로 비점성 현상을 나타내고 수학적으로 쌍곡선 특성을 갖게 된다. 따라서 비점성 플럭스 계산에는 Upwind 기법이 바람직하다. 일반적으로 Upwind 기법은 중앙 차분법으로는 해석하기 어려운 강한 충격파나 기울기 구배가 급격한 영역에서 성공적으로 적용될 수 있고, 더욱이 이러한 영역에서 발생될 수 있는 진동 현상이나 불안정성 등을 극복하기 위해서 고려되는 인공 감쇄항수가 불필요하다.

Riemann Solver에 기반을 둔 최초의 Flux Difference Splitting 알고리즘은 1959년 Godunov에 의해 개발되었다[5]. 그후 1981년 Roe는 Approximate Riemann 문제를 해결하는 방법을 제안하였다[6]. 편의상 1차원 Euler 방정식을 갖고 Roe의 방법을 살펴보도록 하자.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

식(3)을 국부 선형화(Local Linearization) 하면 식 (4)가 된다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

이때  $\tilde{A}$ 는 상수 행렬로 아래와 같은 조건을 만족하도록 선택한다.

- 벡터 공간  $Q$ 에서 벡터 공간  $F$ 로 선형 매핑이 되어야 한다.
- 제어 체적 경계면의 좌측 값인  $Q_L$ 과  $Q_R$ 은 아래의 조건을 만족해야 한다.  
 $Q_L \rightarrow Q_R \rightarrow Q$  에 따라  $\tilde{A}(Q_L, Q_R) \rightarrow A(Q)$  이때  $A = \partial F / \partial Q$
- 임의의  $Q_L$ 과  $Q_R$ 에 대해  $\tilde{A}(Q_L, Q_R) \times (Q_L - Q_R) = F_L - F_R$
- $\tilde{A}$ 의 아이겐 벡터들은 서로 선형적으로 독립 관계에 있다.

위의 조건을 만족하는 행렬이 구성되면 이때의 아이겐 값은 Riemann 문제의 파동 속도에 해당 된다. 주어진 임의의  $Q_L$ 과  $Q_R$ 에 대한 플럭스 차이를 표시하면 식 (5)가 된다.

$$F_R - F_L = \sum \alpha_k \lambda_k e_k \tag{5}$$

여기서  $e_k$ 는  $\tilde{A}$ 의 우측 아이겐 벡터이며,  $\alpha_k$  와  $\lambda_k$ 는  $k^{th}$  파동의 강도와 속도를 각각 나타낸다. 제어 체적 경계면에서의 플럭스는 식 (6) 혹은 식 (7)로 표시되며 이때  $\Sigma^{(-)}$ 와  $\Sigma^{(+)}$ 는 음 파동 속도와 양 파동 속도에 기인된 부분을 각각 의미한다.

$$F_{i+1/2}(Q_L, Q_R) = F_L + \Sigma^{(-)} \alpha_k \lambda_k e_k \tag{6}$$

$$F_{i+1/2}(Q_L, Q_R) = F_R - \Sigma^{(+)} \alpha_k \lambda_k e_k \tag{7}$$

식 (6)과 식 (7)을 한 개의 식으로 표시하면 식 (8) 혹은 식 (9)로 표현할 수 있다.

$$F_{i+1/2}(Q_L, Q_R) = \frac{1}{2} ((F_L + F_R) - \sum \alpha_k \lambda_k e_k) \tag{8}$$

$$F_{i+1/2}(Q_L, Q_R) = \frac{1}{2} ((F_L + F_R) - S | \Lambda | S^{-1} \Delta Q) \tag{9}$$

이때  $S$ 의 행은  $\tilde{A}$ 의 우측 아이겐 벡터이며  $\Lambda$ 는  $\tilde{A}$ 의 아이겐 값들로 구성된 대각선 행렬이다.

2차원 공간에서  $S$ 와  $\Lambda$ 는 각각 식 (10)과 (11)이 된다. 이때  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{H}$ 는 식 (12)와 식 (13)으로 정의되며,  $u$  속도 성분,  $v$  속도 성분, 음속 및 전체 엔탈피에 대한 Roe의 평균을 나타낸다.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \tilde{u} & 0 & \tilde{u} + \tilde{a} & \tilde{u} - \tilde{a} \\ \tilde{v} & \tilde{v} & \tilde{v} & \tilde{v} \\ (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)/2 & \tilde{v}^2 & \tilde{H} + \tilde{u}\tilde{a} & \tilde{H} - \tilde{u}\tilde{a} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \tilde{u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{u} + \tilde{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{u} - \tilde{a} \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\tilde{u} = \frac{\rho_L^{1/2} u_L + \rho_R^{1/2} u_R}{\rho_L^{1/2} + \rho_R^{1/2}}, \quad \tilde{v} = \frac{\rho_L^{1/2} v_L + \rho_R^{1/2} v_R}{\rho_L^{1/2} + \rho_R^{1/2}} \quad (12)$$

$$\tilde{H} = \frac{\rho_L^{1/2} H_L + \rho_R^{1/2} H_R}{\rho_L^{1/2} + \rho_R^{1/2}}, \quad \tilde{a} = (\gamma - 1) \left[ \tilde{H} - \frac{(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)}{2} \right] \quad (13)$$

### 3. 결과 및 고찰

익형 주위에서의 유동장을 해석하기 위해서 그림 1에서 보여준 99X99 크기의 C-Mesh 격자체를 사용하였다. 그림 2는 익형 주위에서의 격자 구성을 좀더 자세히 보여주고 있다. 해상도 (Resolution)가 개선된 충격파를 보여주기 위해선 충격파 주위에 격자를 더욱 밀집하게 잡아주어야 하지만[3] 본 연구에서는 동일한 격자체를 사용하여  $M_\infty=0.75$ ,  $\alpha=2.0$ 인 경우와  $M_\infty=0.80$ ,  $\alpha=1.25$ 인 경우에 대해서 각각 유동장을 해석하였다.

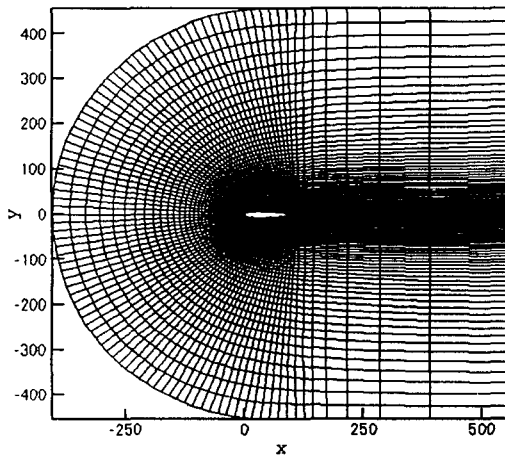


Fig. 1 NACA 0012 grid (99x99)

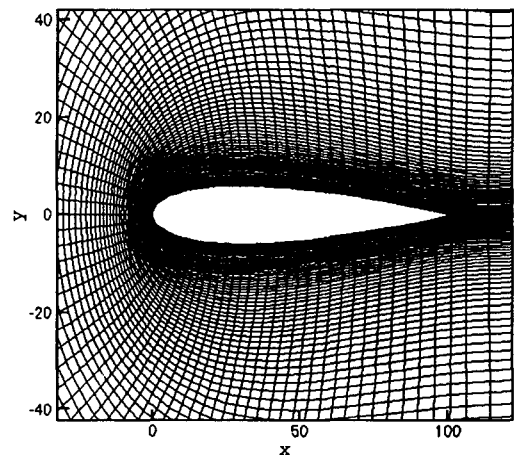


Fig. 2 Near field view

#### 3.1 $M_\infty=0.75$ , $\alpha=2.0$ 인 경우

그림 3은 Bunning/Steger[1]가 유한 차분법(Finite Difference Method)에 근거한 중앙 차분법(Central Differencing Method)과 Steger-Warming[7]의 Flux Vector Splitting 기법을 사용하여 계산한 결과를 Roe의 Flux Difference Splitting 기법을 유한 체적법을 사용하여 계산한 본 연구 결과와 비교해 놓은 것이다. 익형 표면을 따라서 분포되는 압력은 거의 동일한 양상을 보여주고 있지만 본 연구에서 계산한 충격파 주위에서의 해상도는 이들이 계산한 결과와 비교해 볼 때 크게 향상된 결과를 보여주고 있다. 그림 4는 Coakley[2]가 Steger-Warming의 Flux Vector Splitting



기법을 유한 체적법을 사용하여 계산한 결과로 본 연구 결과와 매우 잘 일치되는 결과를 보여주고 있다. 그림 5와 그림 6은 등마하 선도와 등압력 분포선도를 보여주고 있다. 충격파가 익형 길이의 약 43% 근처에서 선명하게 형성된 것을 볼 수 있다.

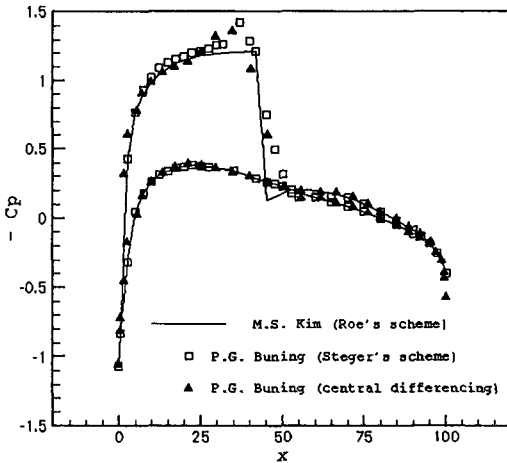


Fig. 3 Comparison of computed surface pressure ( $M_\infty=0.75, \alpha=2.0$  : Ref.1)

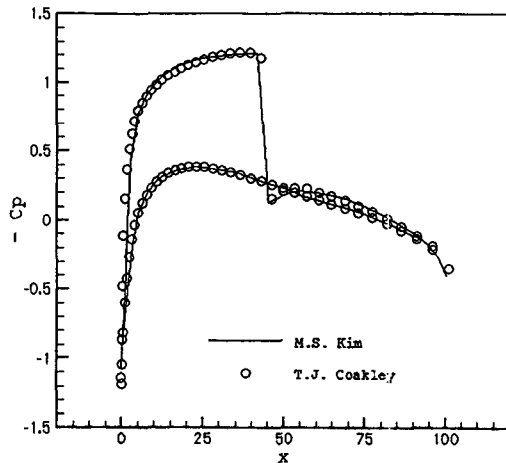
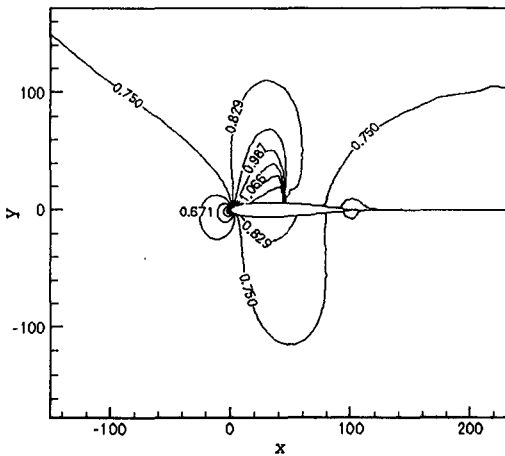


Fig. 4 Comparison of computed surface pressure ( $M_\infty=0.75, \alpha=2.0$  : Ref.2)



약 37% 정도에 위치하며 이는 Pulliam이 보여준 62%, 37% 위치와 매우 잘 일치하고 있다. 또한 Pulliam이 계산한  $C_p$ 과  $C_d$ 는 각각 0.310과 0.017인데 비해서 본 연구에서 계산한 값은 각각 0.281과 0.017로 거의 유사한 값을 보여주고 있다. 그림 9와 그림 10은 등마하 선도와 등압력 분포선도를 보여준다. 익형의 윗면에서 강한 충격파가 형성되었고 익형 아랫면에서 해상도가 다소 떨어지지만 약한 충격파가 형성되었음을 알 수 있다.

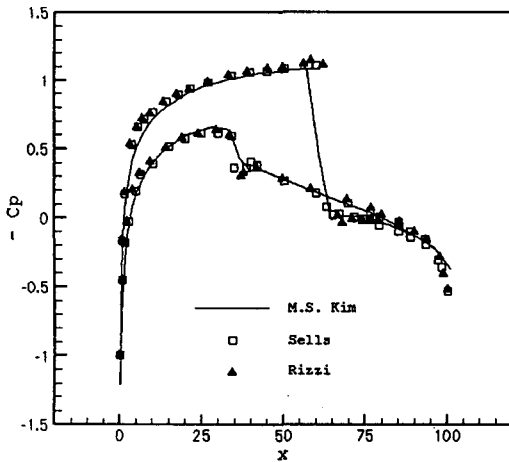


Fig. 7 Comparison of computed surface pressure ( $M_\infty=0.80, \alpha=1.25$  : Ref. 4)

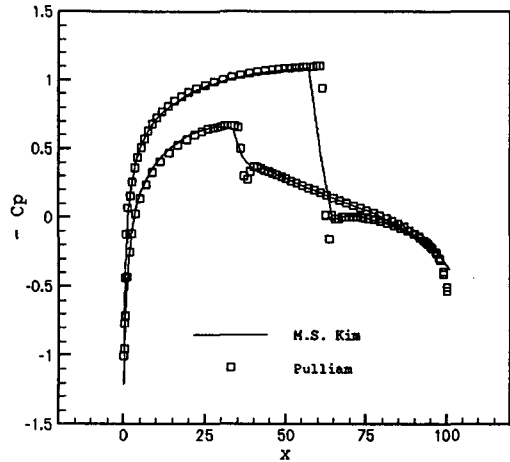


Fig. 8 Comparison of computed surface pressure ( $M_\infty=0.80, \alpha=1.25$  : Ref. 3)

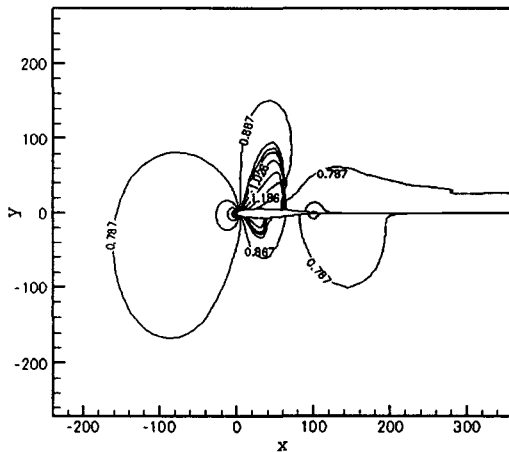


Fig. 9 Mach contours for  $M_\infty=0.80, \alpha=1.25$

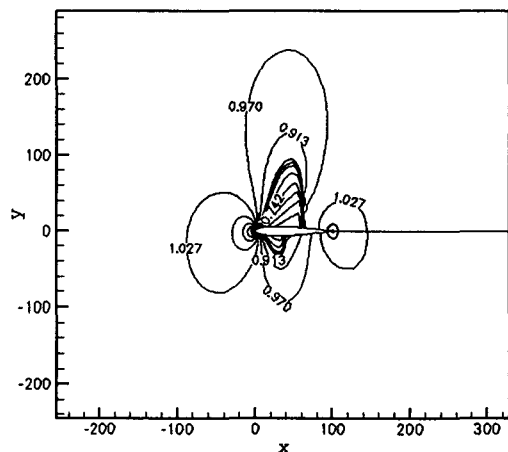


Fig. 10 Pressure contours for  $M_\infty=0.80, \alpha=1.25$

#### 4. 결 론

압축성 Euler 방정식을 유한 체적법에 의해 Roe's Flux Difference Splitting 기법을 사용하여 수치적으로 해석할 수 있는 Flow Solver를 개발한 뒤 NACA 0012 주위의 유동장을 두 가지 경우에 대해서 해석하였다.

본 연구에서 개발한 Euler Solver의 검증을 위해서 다른 Euler Solver들과의 계산 결과들을 비교하였다.  $M_\infty=0.75, \alpha=2.0$ 인 경우 Buning/Steger의 결과에 비해서 충격파에서의 해상도가 좋게 나



타났으며, Coakley의 결과와는 매우 잘 일치하는 결과를 보여 주었다.  $M_\infty=0.80$ ,  $\alpha=1.25$ 인 경우 Pulliam의 결과에 비해서 충격파에서의 해상도가 다소 떨어지긴 하였으나 이것은 격자체의 질(Quality)에 따른 결과라고 판단되며, 전체적으로 다른 수치 해석 결과들과 매우 잘 일치하는 결과를 보여 주었다.

본 연구에서 확보한 Euler Solver는 점성 효과를 고려한 Navier-Stokes Solver 개발에 모체로 사용될 예정이다.

### 참고문헌

- [1] Buning, P.G. and Steger, J.L., "Solution of the Two-dimensional Euler Equations with Generalized Coordinate Transformation Using Flux Vector Splitting," *AIAA-82-0971, AIAA/ASME 3rd Joint Thermophysics, Fluids, Plasma and Heat Transfer Conference*, St. Louis, Missouri (1982).
- [2] Coakley, T.J., "Implicit Upwind Methods for the Compressible Navier-Stokes Equations," *AIAA-83-1958* (1983).
- [3] Pulliam, T.H. and Childs, R.E., "An Enhanced Version of an Implicit Code for the Euler Equations," *AIAA-83-0344, AIAA 21st Aerospace Sciences Meeting*, Reno, Nevada (1983).
- [4] Rizzi, A. and Viviand, H., "Numerical Methods for the Computation of Inviscid Transonic Flows with Shock Waves," *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Vol.3 (1981).
- [5] Godunov, S. K., "A Difference Method for the Numerical Computation of Discontinuous Solutions of Hydrodynamic Equations," *Mat Sbornik*, Vol.47, No.3 (1959). Translated as JPRS 7225 by US Department of Commerce (1960).
- [6] Roe, P. L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol.43 (1981).
- [7] Steger, J.L. and Warming, R.F., "Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite Difference Methods," *Journal of Computational Physics*, Vol.40, No.2 (1981), p.263-293.