



2 차원 비정상유동 해석을 위한 1-방정식 방법

조 지 룡

인제대학교 기계자동차공학부

E-mail: mechjrc@ijn.c.inje.ac.kr

An one equation method for two dimensional unsteady flows

Ji Ryoung Cho

In this study a pure vector potential method (PVPM) for a three dimensional, unsteady, incompressible flow is proposed. A simplified version for a two dimensional problem is described in detail, and a method to prescribe appropriate boundary conditions is also presented. The resulting numerical algorithm is applied to the cavity flow driven by an impulsively started wall and also to the Stokes' first problem. Some important unsteady/steady features are captured for these two flows, and quantitative agreements of flow variables with available reference database are good.

Keywords: 순수 벡터 포텐셜 방법 (Pure Vector Potential Method), 1-방정식 방법 (One Equation Method), 경계조건(Boundary Condition), 용덩이 유동(Cavity Flow), 스토크스의 제 1 문제 (Stokes' First Problem)

1. 서론

비압축성 유체유동 전산해석에 있어서 압력장의 효과적인 결정법에 관하여 지난 30년 동안 많은 연구가 수행이 되어져서 현재 몇 가지의 방법이 알려져 있다. 현재의 주류는 소위 원시변수 방법(primitive variable method)으로 알려진 일련의 방법들이다. 대표적으로 Chorin [1]의 Artificial Compressibility (AC) 방법, Harlow 와

Welch [2] 의 Pressure Poission Equation (PPE) 방법, 그리고 Patankar 와 Spalding [3] 의 SIMPLE 방법 등을 들 수 있다. AC 방법에 있어서는 압력이 유동의 Dilatation 에 반비례 한다는 가정을 도입하여 압력에 관한 방정식을 구성하며, PPE 방법에서는 운동량 방정식과 연속방정식을 미분 방정식 수준에서 결합하여 압력에 관한 방정식을 얻고, 반면에 SIMPLE 방법은 차분화된 운동량 방정식과 연속방정식으로부터 압력에 관한

차분 방정식을 얻는다. 이러한 압력 방정식과 함께 세 방향의 운동량 방정식을 연립하여 전산 해석을 하면 3차원 유동 문제들에 대한 해를 구할 수 있으며, 따라서 4개의 방정식을 필요로 한다. 원시 변수법은 2차원의 아주 단순한 유동 문제에서 3차원의 비정상 문제까지 널리 쓰이고 있는데 특히 실용 공학문제에서는 거의 대부분 이 방법에 의존을 하고 있는 실정이다. 그러나 임의의 기하학적인 형상을 가지는 3차원 유동의 해석에서 이 방법들은 공통의 취약성을 지니고 있다. 원시변수 방법들은 수치해석 과정에서 압력 장과 속도 장이 충분한 상호 결합성을 지니지 못하여 수치적인 진동 현상을 나타내므로 세 방향 속도성분 u, v, w 와 압력 p 가 서로 다른 공간 점에 위치하도록 하는 엇갈림 격자계(Staggered Grid System)를 이용하여야 한다. 이 격자계에서는 유동 경계면에서의 압력조건을 특별히 부여하지 않아도 되는 장점이 있기는 하나 3차원의 경우에 있어서는 격자계가 매우 복잡하여지고 추가적인 기억공간의 요구량이 커지는 단점이 나타나게 된다. SIMPLE 계열의 방법에서는 이를 극복하는 방법이 Rhie 와 Chow [4]에 의하여 제시 되기는 하였지만 이 방법은 유동 경계면에서의 압력조건을 필요로 하고, 이 압력의 부여 방법에 의하여 계산결과가 크게 영향을 받는다. 또한 물체표면부착 일반 좌표계(Body Fitted Generalized Coordinate)에서는 차분화된 압력 방정식이 매우 복잡하므로 상대적으로 영향이 적다고 판단이 되는 항을 무시하는데 이로 인하여 어떤 경우에는 수치 해의 수렴속도가 매우 떨어지거나 수렴된 해를 얻는 것이 불가능한 경우도 나타나게 된다.

반면에 전산유체역학 초기에 널리 사용이 되었던 와도-유량함수 방법은 방정식 수준에서 압력 항이 소멸되므로 어떠한 물리적 혹은 수치적인 근사 과정도 필요치 않으며, 자동적으로 유동 장이 질량보존의 식을 만족하는 뛰어난 장점이 있다. 그러나 기본적으로 그 응용 범위가 2차원 유동으로 제한이 되며, 와도에 대한 물리적인 경계조건이 주어지지 않고, 와도와 유량함수의 미분방정식에 대한 수치 해석기(Numerical Solver)가 다르다는 문제로 인하여 최근에는 별다른 주목을 받지 못하고 있다. 이 문제점들 가운데 3차원 유동문제는 유량함수의 확장된 개념인 벡터 포텐셜 함수를 이용하여 해소를 할 수 있다. 그러나 이 와도-벡터 포텐셜 방법에 있어서는 와도에 대한 3개의 방정식과 벡터 포텐셜에 대한 3개의 방정식 등 총 6개의 미분방정식을 풀어야 하므로 원시 변수법에 비하여 방정식의 수가 2개가 더 많다는 새로운 문제점이 나타나 역시 연구자들의 별다른 관심을 끌지 못하고 있는 형편이다[5].

본 연구에서는 와도-벡터 포텐셜 방법을 개선한 '순수 벡터 포텐셜 방법 (Pure Vector Potential Method, 여기서부터 PVPM 이라 칭함)'을 제시한다. 이 방법은 와도와 벡터 포텐셜을 방정식 수준에서 결합하여 벡터 포텐셜 만으로 유동장을 기술한다. 이 경우 미분 방정식의 수가 2차원 유동의 경우 1개, 3차원 유동의 경우 2개가 되어 원시변수 방법보다도 오히려 적어진다. 당연히 압력은 순수 벡터 포텐셜 방정식에 나타나지 않는다. 경계조건은 물리적 변수인 속도성분과 벡터 포텐셜로 기술이 된다. 최근 3차원의 열 및 유체 유동 문제에 대한 정량적인



결과를 추구함에 따라 수치계산시간을 줄이기 위한 다양한 수렴가속화 방법이 연구되고 있다. 이러한 관점에서 본 연구에서 제시하는 PVPM도 기여를 할 수 있다고 여겨지는데, 그 이유는 방정식의 수가 원시변수 방법에 비하여 절반으로 줄어들고, 벡터 포텐셜 (혹은 유량함수) 값이 유동의 경계표면 전체에 직접 부여되어 유동 전체영역에서 동시에 질량보존이 만족되도록 속도장이 수정되어 가기 때문에 수렴속도의 향상이 기대가 된다. 본 연구는 상기의 관점들에서 시도되는 첫 연구 단계로 2차원의 비정상 유동 문제들을 취급하며, 3차원의 문제는 이후의 연구에서 다루기로 한다.

2. 유동장의 정식화

2.1 와도-벡터 포텐셜 방정식

본 연구에서는 비압축성, 비정상 유체유동에 관심이 있으며, Navier-Stokes 방정식은 Cartesian 좌표계에서 와도 ω_i 와 벡터 포텐셜 ψ_i 의 방정식으로 무차원화 하여 쓰여질 수 있다.

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_j \partial x_j} = -\omega_i \quad (2)$$

여기서 Re 는 유동의 Reynolds 수를 나타내며, 와도와 벡터 포텐셜은 속도벡터 u_i 를 이용하여 다음과 정의되었다.

$$\omega_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (3a)$$

$$u_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \quad (3b)$$

윗 식 (1), (2)와 (3b)를 이용하면 임의의 3차원 유동장을 해석할 수 있다. 3차원 유동의 경우에는 각기 세개의 와도 및 벡터 유량함수 성분이 나타난다. 따라서 많은 전산유체역학 관련 참고 문헌에는 6개의 방정식을 풀어야 하는 것으로 기술을 하고 있으나[5,6], 실제에 있어서는 각기 2개의 성분들만 즉 총 네개의 미분방정식만 수치해석을 하여도 유동장을 묘사하는 것이 가능하다. 본 연구는 2차원 비정상 유동현상에 국한된 문제만 취급을 하므로, 이 경우 상기의 식들은 잘 알려진 와도-유량함수 방법으로 귀결이 된다. 2차원의 경우는 와도와 벡터 포텐셜이 다음과 같이 표현이 되고

$$\begin{aligned} \omega_x = \omega_y = 0 \quad \omega_z = \omega \\ \psi_x = \psi_y = 0 \quad \psi_z = \psi \end{aligned} \quad (4)$$

속도성분은

$$u = \partial \psi / \partial y \quad v = -\partial \psi / \partial x \quad (5)$$

로 주어진다. 이를 윗 식(1)과 (2)에 적용을 하면

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{Re} \Delta \omega - \epsilon_{ij3} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \quad (6)$$

$$\Delta \psi = -\omega \quad (7)$$

여기서 Δ 는 Laplace 연산자이다. 이 두식에서 와도를 소거하면 2차원 비정상 유동에 대한 순수 벡터 포텐셜 방정식이 얻어진다.

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta(\Delta \psi) - \varepsilon_{ij3} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \quad (8)$$

단지 이 하나의 식만 수치해석하면 유동장이 완벽히 기술이 되므로, 기존의 원시변수법들에 비하여 방정식의 수가 1/3에 불과하며, 압력과 관련된 어떠한 근사과정도 개입되지 않았다. 또한 기존의 와도-유량함수법에 비하여 와도에 대한 경계조건을 필요로 하지 않는 특별한 장점이 있다. 단 기존의 방정식들과는 달리 2차의 방정식이 아니라 벡터 포텐셜에 대한 4차의 미분방정식으로 주어진다.

2.2 좌표변환과 유한차분식

유동의 경계가 임의의 형태로 주어지는 보다 일반적인 상황하에서도 앞으로 전개할 수치적 알고리즘을 적용시키기 위하여 앞 절에서 제시한 방정식들을 다음과 같이 물리적 공간 (x, y) 에서 계산공간 (ξ, η) 으로 좌표변환을 수행한다.

$$\frac{\partial \bullet}{\partial x_j} = \frac{g_{jm}}{J} \frac{\partial \bullet}{\partial \xi_m} \quad (9a)$$

$$J = g_{x\xi} g_{y\eta} - g_{x\eta} g_{y\xi} \quad (9b)$$

$$g_{x\xi} = \partial y / \partial \eta \quad g_{x\eta} = -\partial y / \partial \xi \quad (9c)$$

$$g_{y\xi} = -\partial x / \partial \eta \quad g_{y\eta} = \partial x / \partial \xi$$

이 좌표변환 관계를 식(8)에 적용하면 계산공간

에서의 2차원 벡터 포텐셜에 대한 수송량 방정식은 아래와 같이 주어진다.

$$\frac{\partial \tilde{\Delta} \psi}{\partial t} = G(\psi) \quad (10a)$$

$$G(\psi) = \varepsilon_{ij3} \frac{g_{im} g_{jn}}{J} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} + \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{h^{mn}}{\text{Re}} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \xi_n} \right) \quad (10b)$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{J} \tilde{\Delta} \psi = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(h^{mn} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \right) \quad (11)$$

$$h^{mn} = g_{jm} g_{jn} / J \quad (12)$$

식 (10a-b)에 대하여 여러가지의 차별화 식을 고안할 수 있겠으나, 본 연구에서는 시간에 대해서는 Crank-Nicolson 방법을 적용하고, 공간좌표에 대해서는 중심차분을 취하여, 시공간에 대하여 모두 2차의 정확도를 가지도록 하였다.

$$\tilde{\Delta} \psi_D^{n+1} = \delta t (G(\psi^{n+1}) + G(\psi^n)) / 2 + \tilde{\Delta} \psi^n - \tilde{\Delta} \psi_{OD}^{n+1} \quad (13)$$

여기서 δt 는 적분 시간간격을, 상첨자 n 은 적분 시점을 나타낸다. 이 식의 수치해를 구하기 위하여 $\tilde{\Delta} \psi^{n+1}$ 의 대각선 성분인 $\tilde{\Delta} \psi_D^{n+1}$ 만으로 시스템 매트릭스를 구성하며, 비대각선 성분인 $\tilde{\Delta} \psi_{OD}^{n+1}$ 과 플럭스항 $G(\psi^{n+1})$ 은 겉보기 원천항으로 처리를 하고, 주어진 시점에서 수렴된 해를 구하기 위하여 하부 반복계산 (Sub-iteration)을 수행한다.



$$\begin{aligned}
 & a_{i,j} \Psi_{i,j}^{n+1,k+1} - a_{i+1,j} \Psi_{i+1,j}^{n+1,k+1} - a_{i-1,j} \Psi_{i-1,j}^{n+1,k+1} \\
 & - a_{i,j+1} \Psi_{i,j+1}^{n+1,k+1} - a_{i,j-1} \Psi_{i,j-1}^{n+1,k+1} = -H_{i,j}^k \quad (14)
 \end{aligned}$$

for $2 \leq i \leq NI - 1$ and $2 \leq j \leq NJ - 1$

여기서 계수들은 다음과 같이 표시되고

$$\begin{aligned}
 a_{i+1,j} &= \left(h_{i+1,j}^{\xi\xi} + h_{i,j}^{\xi\xi} \right) / 2 \\
 a_{i-1,j} &= \left(h_{i-1,j}^{\xi\xi} + h_{i,j}^{\xi\xi} \right) / 2 \\
 a_{i,j+1} &= \left(h_{i,j+1}^{\eta\eta} + h_{i,j}^{\eta\eta} \right) / 2 \\
 a_{i,j-1} &= \left(h_{i,j-1}^{\eta\eta} + h_{i,j}^{\eta\eta} \right) / 2
 \end{aligned} \quad (15a)$$

$$a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1} \quad (15b)$$

$$H_{i,j}^k = \frac{\delta t}{2} \left(G_{i,j}^{n+1,k} + G_{i,j}^n \right) + \bar{\Delta}_{i,j} \Psi^n - \bar{\Delta}_{i,j} \Psi_{OD}^{n+1,k} \quad (15c)$$

k 는 하부 반복계산 횟수를 나타낸다. 식 (14)는 TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm)를 ξ 방향과 η 방향으로 교차로 적용하여 해를 구한다. 충분히 수렴된 해가 얻어지면 다음 시간 단계로 진행을 하여 비정상유동에 대한 해를 구하는 과정을 반복한다. 이 과정에서 속도 성분은 필요한 시점에서만 다음과 같이 구하면 된다.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{g_{ym}}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \quad (16a)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{g_{xm}}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \quad (16b)$$

2.3 경계조건

식 (15)를 풀기 위해서는 경계면에서의 벡터 포텐셜 ψ 와 플럭스 항에 포함이 되는 $\Delta \psi$ 의 경계면에서의 값을 부여하여야 한다. 이차원 유

동의 경우 ψ 값은 손쉽게 구할 수 있다. 반면 $\Delta \psi$ 는 유동 경계면에서

$$\begin{aligned}
 J \Delta \psi &= h^{\xi\xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + h^{\eta\eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + 2h^{\xi\eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \\
 &\left(\frac{\partial h^{\xi\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial h^{\xi\eta}}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial h^{\eta\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial h^{\xi\eta}}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad (17)
 \end{aligned}$$

로 주어진다. 경계면에서의 벡터 포텐셜의 1차 미분항은 물리적 속도벡터 성분 (u, v) 과 계산공간에서의 속도성분 (u_ξ, u_η) 관계를 이용하여 결정한다. 즉, 식 (16)에서

$$u_\xi \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = g_{x\xi} u + g_{y\xi} v \quad (18a)$$

$$u_\eta \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = g_{x\eta} u + g_{y\eta} v \quad (18b)$$

이 관계는 또한 2차의 교차미분 $\partial^2 \psi / \partial \xi \partial \eta$ 의 평가에도 적용이 된다. 나머지 2차 미분항들은 경계면을 따라서는 중심차분법으로, 경계면에 수직인 방향은 편방향 차분(One-sided difference)을 하되 공간좌표 격자간격에 대하여 대하여 공히 2차의 정확도를 가지도록 차분화를 하였다.

3. 비정상 유동문제에의 적용

3.1 급가속 상부벽에 의한 웅덩이 내부흐름

급가속 되는 상부벽에 의하여 구동이 되는 2차원 정방형 웅덩이 내부의 흐름은 수치적 방법의 평가를 위하여 많이 이용이 되고 있다. 그 이

유는 초기조건과 경계조건이 매우 잘 정의 되어 질 수 있는 반면에, 용덩이 내부에서는 매우 복잡한 소용돌이 유동 세포가 형성이 되므로 수치적 유동해석 결과는 오로지 수치적 방법에만 영향을 받는다. 따라서 수치적 방법의 성능을 평가하기에는 최적이다. 다만 실험적으로 이를 구현하기는 매우 어려우므로 통상 Ghia 등[7] 이 매우 세밀한 격자를 이용하여 얻은 수치해석 결과를 기준으로 삼는다. 그러나 그들은 정상상태의 해만 구하였다. 본 연구에서 관심이 있는 비정상 유동의 경우는 Soh 와 Goodrich [8]가 수행한 연구 결과를 기준으로 삼는다. 이들은 x 및 y 방향으로 각기 41 개의 균일한 격자계를 이용하여 엇갈림 격자계를 구성하고 유동장을 해석하였는데, 압력은 인공압축성을 이용하여 구하였다. 본 연구에서는 각 방향으로 51 개의 격자를 이용하여 이 문제를 해석하였다 (Case M51). 격자계는 균일한 격자 간격을 가진다. 정방향 용덩이의 폭, 상부벽면의 이동속도, 그리고 유체의 점성에 의하여 주어지는 레이놀즈수 $Re=400$ 이다. 이 문제의 경우 경계조건은 매우 단순하여 모든 벽면에서 $\psi = 0$, $u = v = 0$ 이고, 다만 상부벽면에서만 $u = u_w = 1$ 이다. 초기 상태에서는 유체가 정지 상태에 있다고 가정하였으며, Soh 등과 같이 $t=36$ 까지 시간진행을 하였다. 적분 시간간격은 다음과 같이 Courant 수가 항상 1 이 되도록 하였다.

$$C \equiv U_w \delta t / \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} = 1$$

식 (14)를 계산할 때 안정된 계산과 함께 수렴속

도를 증진시키기 위하여 SOR 을 적용하였는데, 현재의 시스템 매트릭스 구조에서는 많은 수치 실험 결과 Courant 수가 1 이고 약간의 over relaxation 을 적용할 때 ($\beta=1.03-1.11$) 가장 효율적인 계산이 수행되었다. 하부 반복계산에서 수렴의 판정은 $|\psi^{n+1,k+1} - \psi^{n+1,k}|_{\max} < 10^{-5}$ 로 하였으며 이때 질량의 불평형의 최대치 $|\partial u_i / \partial x_i|_{\max}$ 는 전체 계산과정에서 0.3×10^{-5} 보다도 작았다. 이는 Soh 와 Goodrich 에 비하여 약 1/10 정도 수준이다. 즉 본 연구의 방법은 인공압축성을 이용하는 방법보다 질량보존을 매우 잘 만족 함을 알 수 있으며, 이는 유량함수 (혹은 벡터 포텐셜)을 채택한 본 방법의 주요한 특징이다.

Fig. 1 에 시간의 흐름에 따라 바뀌는 유선의 형태를 나타내었다. 전반적인 유선 형태는 Soh 등의 결과와 잘 일치 한다. 그러나 그들은 용덩이의 가운데 부분에 형성이 되는 주 회전 세포 유동 구조만 그렸으며, 용덩이 아래에서 형성이 되는 반대로 회전하는 작은 모서리 회전 세포유동에 대해서는 언급을 하지 않았다, 다만 그들의 속도 벡터 그림에서 이를 확인을 할 수 있으나 정량적인 비교는 불가능하다. 본 연구 결과는 $t=1$ 이후에 꾸준히 모서리 세포유동 구조가 성장을 하는 것을 보여 주고 있다. 여기서 주목할 사실은 $t=8$ 에서 우측 하부 모서리의 회전 세포크기가 $t=36$ 의 경우 보다도 크다는 점이다. 이는 유동형성 초기에는 상부벽 아래의 유체가 매우 큰 운동량을 가지고서 우측으로 이동을 한 후 우측벽에서 휘어지고, 다시 하부벽에서 왼쪽

으로 이동을 하므로 이 때 우측 하부 모서리에 큰 회전 세포유동이 형성된다. 그러나 시간이 지남에 따라 유체의 운동량은 웅덩이 전체에 확산이 되므로 점차 하부 우측 세포유동의 크기도 일정한 수준으로 줄어든다. 즉, 하부 우측 세포유동의 크기는 단조 증가하지는 않는다. 하부 좌측의 세포유동 구조의 크기도 유사하게 변할 것으로 추정되지만 그러한 변화의 크기는 상대적으로 적을 것이다. Soh 등은 $t=36$ 에서 거의 정상상태에 도달한다고 하였는데, 이 유선은 Ghia 등 [7]의 결과와 매우 유사하다. 주 회전 세포 유동에서 ψ_{\min} 의 값은 -0.1073 으로 Ghia 등이 보고한 -0.1139 보다는 약 6% 정도 작다. 그러나 격자수가 1/5에 불과한 점을 감안하면 그리 나쁘지 않은 결과이다. Fig. 2는 $t=36$ 에서 웅덩이의 중심을 지나는 수직축을 따라서 변화하는 속도성분 u 의 변화를 역시 Ghia 등의 정상상태에서의 수치해와 비교를 한 것이다. 상부 벽면 아래에 형성이 되는 경계층을 비롯하여 전반적인 속도분포를 잘 표현하고 있다. 그러나 웅덩이 하부에서 상부벽의 이동 방향과 반대로 이동하는 유체의 운동량이 대체로 과소평가됨을 발견할 수 있다. 이는 다소 성긴 격자밀도로 인하여 유발되는 웅덩이 내부의 수치확산에 기인한다고 판단이 된다. Fig. 3은 시간 변화에 따라 상부벽에 작용하는 저항력을 나타낸다. 상부벽이 가속된 후의 짧은 시간 동안은 Fig. 1에서 보여지듯이 웅덩이 내부의 유동은 사실상 이동하는 벽의 아래에서 제한적으로 일어나며, 잘 알려진 Stokes 제 1 문제와 여러모로 유사한 유동 특성을 가질 것으로 추정이 된다. Stokes 문제의 해석해에 따르면 저항력은 $t \rightarrow 0$ 인 경우 $t^{-1/2}$

의 특이점을 가진다고 알려져 있다. 즉 $D \propto t^{-1/2}$ 의 특성을 나타낸다. Soh의 결과는 웅덩이 유동 역시 짧은 시간 동안 이러한 거동을 나타냄을 잘 표시하고 있다. 본 연구결과 역시 $1.5 < t^{-1/2} < 4$ 구간에서 저항력이 $t^{-1/2}$ 에 비례함을 나타내고 있다. 상부벽의 급작스런 출발 직후부터 $t^{-1/2} \approx 4$ 까지는 수치해가 해석해가 가지는 특이적 거동에서 벗어나는데, 이는 이렇게 짧은 시간 동안에는 상부벽 근처 유동경계층의 두께가 아직 충분히 성장하지 않음으로 인하여 벽에 바로 인접한 격자점이 이 물리적 경계층을 제대로 인식을 할 수 없기 때문이다. 따라서 이 시간 동안의 수치해는 물리적 상황을 제대로 묘사를 할 수 없다. 이렇게 정성적인 저항력 특성은 두 연구 결과 모두 잘 재현을 하고 있으나, 저항력 값 자체는 큰 차이를 나타내고 있다. 성긴 격자로 인한 공간분해능의 문제를 의심하여 본 연구의 계산을 81×81 격자를 이용하여 짧은 시간 동안, $t^{-1/2} = (0 \rightarrow 2)$, 재 수행하여 보았으나, 본 연구 결과와 별다른 차이를 나타내지 않았다. 현재로서는 이러한 저항력 차이를 유발하는 원인이 분명하지 않으며 이에 관하여 추후 심층적인 연구가 필요하다.

3.2 Stokes 의 제 1 문제

이 유동은 앞절에서 관찰된 저항력 예측의 정확성에 대한 의문점을 해소하기 위하여 선택이 되었다. Stokes 의 제 1 문제는 비정상 해석해가 알려진 유동이므로 비정상 수치해법의 정확도를 평가하기에 적합하다. 그러나 수치해법의 검증을 위하여 사용된 실례는 본 필자가 아는 범위에서는 없다. 이는 아마도 Stokes 유동은 무한공

간 영역에서 일어나므로 경계조건 처리의 난이성에 기인한다고 판단이 된다. 본 연구에서는 정방형의 제한된 공간(무차원 길이 $H=1$)을 계산영역으로 취하고, 여기에 다음과 같이 경계조건을 부여하였다. 즉, 급작스럽게 가속되는 상부벽에서는 $\psi = v = 0$, $u = u_w = 1$ 로 부여하고, 매 계산과정에서 하류면의 값들을 상류면으로 이동한 후 하류면에서는 모든 변수들에 대하여 zero Neumann 조건을 설정하고, 아랫면에 대해서는 모든 변수들의 2차 미분이 0이 되도록 하였다. 하부면에 부여한 조건은 엄밀하게는 옳지 않지만 경계층의 두께가 계산영역의 전체 높이에 비하여 충분히 작은 경우는 그로 인한 오차는 작을 것이다. 평판경계층 유동에서는 계산영역의 높이가 통상 경계층의 두께보다도 4 배 이상이 되도록 취하는 것을 감안하여, 본 연구에서는 경계층 두께가 계산영역 높이의 20%를 넘지않는 시간 범위내에서 수치해석을 수행하였다. 유동의 특성상 모든 경계면에 대하여 $v=0$ 을 적용 하였다. 대표 길이 및 대표속도가 모두 1 이므로 $Re = 1/\nu$ 의 관계가 성립하고, 앞절과 마찬가지로 $Re = 400$ 인 경우에 대하여 수치해석 결과와 엄밀해를 비교한다. 계산격자 조밀성의 영향을 파악하기 위하여 계산격자 수가 41×41 그리고 81×81 의 두 경우를 계산하며, 두 경우 모두 역시 Courant 수가 1이 되게 적분시간을 취하였다.

Fig. 4는 저항력의 예측결과이다. 앞서 언급한 저항력의 특이성이 관찰이 되고, 경계층이 충분히 성장을 한 뒤에는 엄밀해와 수치해가 모두 잘 일치함을 알 수 있다. 격자 간격이 조밀하여지면 보다 빨리 경계층을 감지하여 물리적

으로 의미있는 결과를 생성한다. Fig.4는 경계층 유동두께, $\delta = \int_{-1}^0 u(y)dy$ 를 나타낸다. 엄밀해에 따르면 이 유동두께는 \sqrt{t} 에 비례하여 증가하는데, 계산결과 역시 이러한 특징을 잘 나타내고 있다.

4. 요약

본 연구에서는 3 차원, 비압축성 유동에 적용 가능한 순수 벡터 포텐셜 방법 (Pure Vector Potential Method, PVPM for short)의 정식화를 수행하였고, 2 차원의 경우에 적용 가능한 수치적 방법과 경계조건 부여법을 상세히 설명하였다. 이 방법의 타당성을 검증하기 위하여 급작스럽게 출발하는 벽구동 용덩이 내부 유동과 엄밀해가 존재하는 Stokes의 제 1 문제를 수치해석하였다. 계산 결과들은 이 두 유동의 중요한 거동을 매우 잘 묘사하였다.

참고문헌

- [1] Chorin, A.J., "A numerical method for solving incompressible viscous flow problems," *J. Comp. Phys.*, 2 (1967), pp.12-26.
- [2] Harlow, F. H. and Welch, J. E., "Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface," *Phys. Fluids*, 8 (1965), pp.2182-2189.
- [3] Patankar, S. V. and Spalding, D. B., "A calculation



- procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows," *Int. J. Heat Mass Transfer*, **15** (1972), p.1787.
- [4] Rhie, C. M. and Chow, W. L., "Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge seperation," *AIAA J.*, **21** (1983), pp.1525-1532.
- [5] Fletcher, C. A. J., *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, (1988), pp.368-392.
- [6] Anderson, D. A. et al., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, McGRAW HILL, (1984), pp.502-510.
- [7] Ghia, U, Ghia, K. N. and Shin, C. T., "High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a Multigrid method," *J. Comp. Phys.*, **48** (1982), pp.387-411.
- [8] Soh, W. Y. and Goodrich, J. W., "Unsteady solution of incompressible Navier-Stokes equations," *J. Comp, Phys*, **79** (1988), pp.113-134.

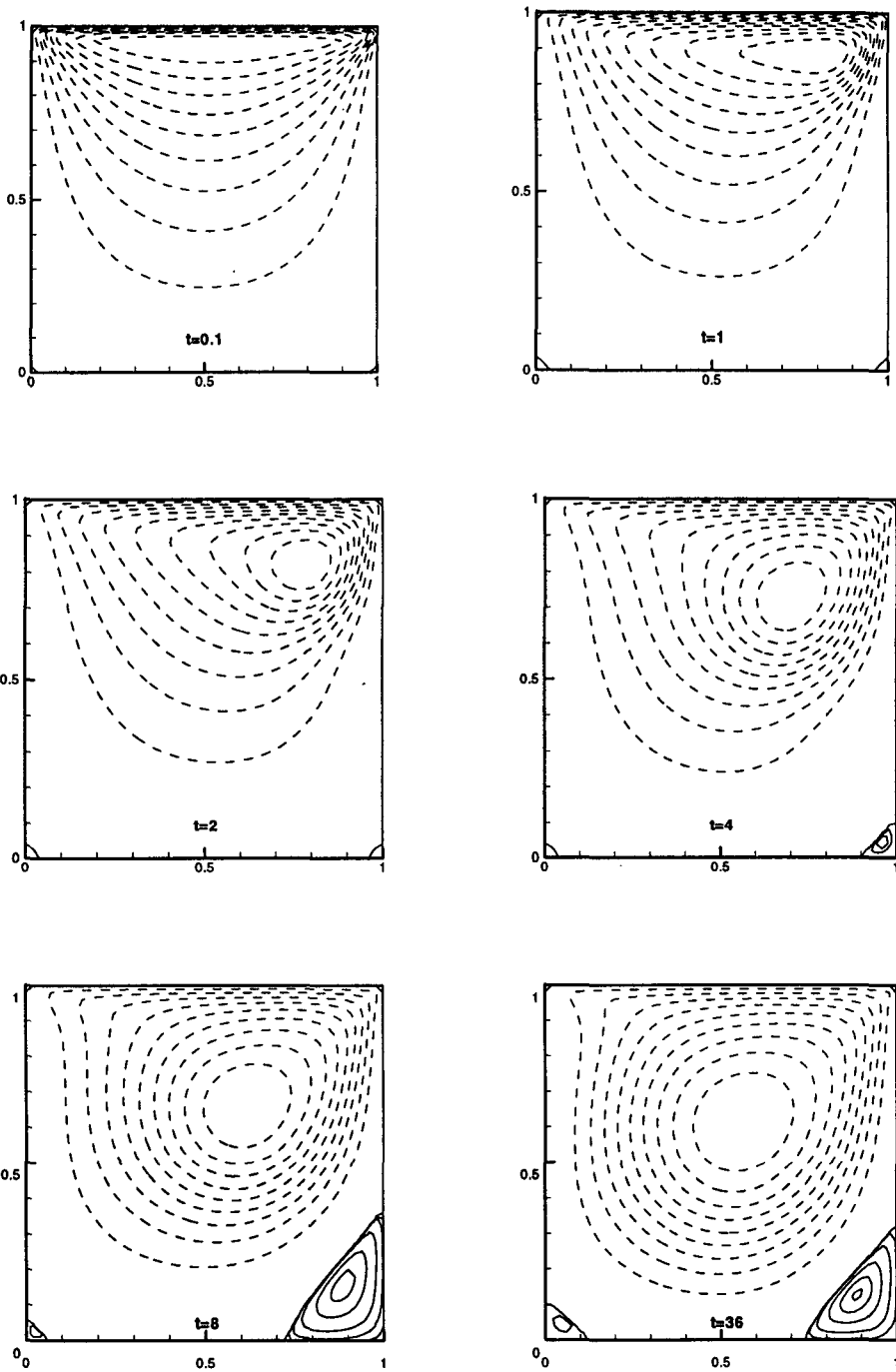


Fig. 1 Streamline evolution for the cavity flow.

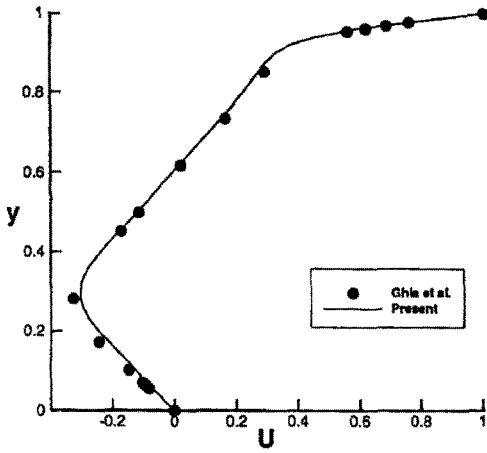


Fig. 2 u-velocity profile on the axis $x=0.5$ at $t=36$ for the cavity flow.

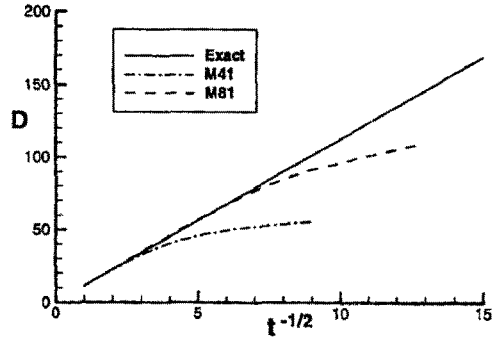


Fig. 4 Drag force vs. time for the Stokes's first problem.

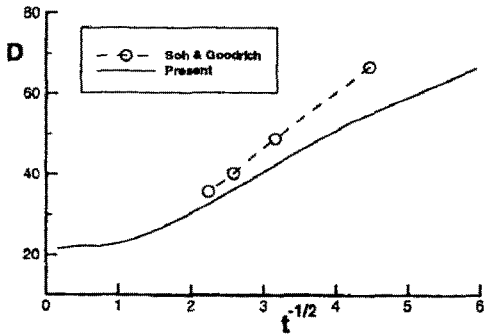


Fig. 3 Drag force vs. time for the cavity flow.

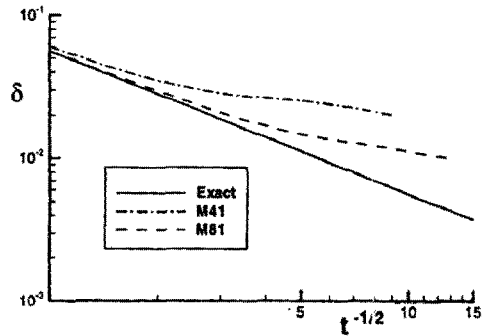


Fig. 5 Flow thickness change for the Stokes's first problem.