

비정렬격자 압력기준 유동해석기법을 이용한 정상 및 비정상 유동해석

김 종태^{*1}

Steady and Unsteady flows with Pressure-based Unstructured-grid Navier-Stokes Solver PUNS

Jongtae Kim

The Pressure-based Unstructured-grid Navier-Stokes Solver PUNS-2/3D for incompressible steady and unsteady viscous flows has been developed. It is based on nonstaggered cell-centered finite volume method. Second-order upwind scheme with least-square reconstruction is used for convective fluxes. The SIMPLE method is implemented to couple the pressure and velocity fields. And the time derivatives in the momentum equations are discretised using a second-order Euler backward-differencing scheme. The discretised linear equations are solved by the preconditioned Biconjugate Gradient Stabilized method(Bi-CGSTAB). The developed solver is applied to validation problems using hybrid meshes.

Key words: 압력기준(Pressure-based), 비정렬격자(Unstructured grid), 비압축성 유동(Incompressible flow), BiCGSTAB(Biconjugate Gradient Stabilized)

1. 서론

복잡한 형상주위의 유동을 해석하기 위해 경계 밀착 곡선좌표계에 기반을 둔 수치해법이 많이 사용되어왔다. 이 방법은 격자점이나 셀에 대하여 자동적인 번호 매김이 가능하고 TDMA, SIP 등과 같은 효율적인 행렬 해법을 적용시킬 수 있으나, 매우 복잡한 영역에 대해서는 유동의 컴퓨터 모사에 소비되는 man-hour의 80% 이상을 격자생성에 소비하게 된다. 한편 비정렬격자 수치기법은 격자의 자동생성이 가능하여 매우 복잡한 유동장을 푸는데 많은 잠재력을 가지고 있다. 그러나 격자점을 공유하는 셀의 수가 임의

적이라는 비정렬격자의 특성으로 인하여 격자의 연결자료가 필요하고 이산방정식을 푸는데 많은 제약을 갖고 있다. 유한요소법에서는 cell-vertex 연결자료를 많이 사용하고 있으며, 셀 중심(cell-centered)의 유한체적법에서는 face-cell의 연결자료를 이용하여 수치 플럭스를 적분한다. 그리고 face-cell 연결자료는 혼합격자(mixed element grid)에서도 일관되게 사용할 수 있는 장점을 지니고 있어 컴퓨터 메모리 측면에서 효율적인 수치적분을 가능하게 한다[1]. 이산방정식을 푸는 방법으로 Gauss-Seidel 법은 비정렬격자에서 cell-face 혹은 cell-cell 연결자료를 이용하여 적용할 수 있고, cell coloring 기법을 이용하면 point-Jacobi 법에 Gauss-Seidel 효과를 얻을 수 있으나 많은 계산 시간을 필요로 한다.

^{*1} ETRI, Postdoc.



CG 계열의 계산 방법은 $10 \times N_{cell}$ (총 셀 수) 정도의 큰 메모리를 더 요구하지만 안정적이고 빠른 수렴 특성을 얻기 위하여 최근에 많이 사용되고 있다[2,3,4].

본 논문에서는 [5]에서 개발된 수치기법의 수렴성을 개선하기 위하여 Bi-CGSATB[6]을 도입하였다. 행렬의 상태를 개선(preconditioning)하기 위하여 SGS(symmetric Gauss-Seidel), LU-SGS(Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel) 등을 사용하였고, Cuthill-Mckee renumbering [7]을 이용하여 셀의 번호를 다시 매김으로써 행렬의 성김정도(sparsity)를 줄였다. 비정렬 혼합 격자를 이용하여 정상 및 비정상의 비압축성 유동을 해석하고 그 수렴성 및 해의 정확도를 평가하였다.

2. 지배방정식과 수치해법

2.1 지배방정식

비압축성 유동장에서 시간변화를 고려한 질량과 운동량의 보존을 나타내는 연속방정식과 운동량방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}) \quad (1)$$

여기서 ρ 는 밀도, p 는 압력, 그리고 u_i 는 속도의 직교성분을 나타낸다. 각각의 속도성분을 ϕ 로 표현하는 수송방정식을 Gauss정리를 이용하여 적분형태로 표현하면 식(2)가 된다.

$$\int \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} d\Omega + \int \phi(\rho \vec{V} \cdot \vec{dA}) = \int \mu \nabla \phi \cdot \vec{dA} + \int S_\phi d\Omega \quad (2)$$

S_ϕ 는 원천항으로 ϕ 가 u 인 경우 $-\partial p/\partial x$ 가 된다.

2.2 이산화 기법

수치계산 영역은 임의의 모양의 셀로 구성되며 각각의 셀이 바로 검사체적이 되고 압력과

속도성분을 모두 셀의 중심에 저장하는 셀중심 유한체적법을 사용한다. 각 셀은 여러 개의 면으로 이루어져 있고 각 면의 중심에서 플럭스를 계산하여 적분한다.

대류항

셀의 각 검사면에서 질량유속 J_f 를 이용하여 대류항을 다음과 같이 이산화 형태로 표현할 수 있다.

$$\int \phi(\rho \vec{V} \cdot \vec{dA}) \approx \sum_f \phi_f J_f A_f \quad (3)$$

그리고 적분면 상에서의 ϕ_f 는 상류의 셀 값을 이용하여 구한다.

$$\phi_f = \phi_{upwind} + \nabla \phi_{upwind} \cdot \vec{dr} \quad (4)$$

여기서 \vec{dr} 는 상류 셀 중심에서 적분면의 도심을 향하는 변위 벡터이고, $\nabla \phi$ 는 상류 셀에서의 구배로 최소자승법으로 구한다. 이산화 방정식을 구성할 때, ϕ 항은 내재적으로 처리하고 $\nabla \phi$ 항은 원천항에 첨가함으로써 외재적으로 처리한다.

점성항

식 (5)로 이산화된 점성항은 적분면에서의 구배 $\nabla \phi_f$ 를 요구한다.

$$\int \mu \nabla \phi \cdot \vec{dA} \approx \sum_f \mu_f \nabla \phi_f \cdot \vec{A}_f = \sum_f D_f A_f \quad (5)$$

여기서는 점성 플러스 D_f 를 다음과 같이 두 개의 항으로 나누고 첫째 항은 면의 좌우 셀을 이용하여 직접 차분을 하고 둘째 항은 고차의 대류 플럭스를 위해 계산된 셀 내의 변수 구배를 가중 평균한 값을 이용한다.

$$D_f = \mu_f [\widetilde{\nabla \phi} \cdot a \hat{s} + \overline{\nabla \phi} \cdot (\hat{n} - a \hat{s})] \quad (6)$$

$$\widetilde{\nabla \phi} \cdot a \hat{s} = a \frac{(\phi_1 - \phi_0)}{ds}$$

$$\overline{\nabla \phi} = (1 - g_p) \nabla \phi_0 + g_p \nabla \phi_1$$

여기서 \hat{s} 는 두 셀의 중심을 잇는 단위벡터이고,

$\hat{n} = \vec{A}/A$ 이다. α 는 수정계수로 국소좌표를 이용해 유도[8]된 $\alpha = 1/(\hat{n} \cdot \hat{s})$ 를 이용하였다. g_p 는 가중계수로서 $dr_0/(dr_0 + dr_1)$ 을 사용하였다.

비정상항

비정상항을 이산화하는 방법으로, 1차 시간정확도를 갖는 Euler 후방차분법, 2차 정확도의 Crank-Nicholson법 그리고 MAC, Fractional-Step법 등에서 사용되는 양해법인 Euler 전방차분법 등이 있다. 본 연구에서는 큰 시간간격에서도 안정적인 2차의 Euler 후방차분법[9,10]을 이용하였다.

$$\int \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} d\Omega = \frac{\rho\Omega}{2\Delta t} (3\phi^{n+1} - 4\phi^n + \phi^{n-1}) \quad (7)$$

여기서 우변의 첫째 항은 내재적으로 처리하고 나머지 두 항은 원천항에 첨가한다.

2.3 수치 알고리즘

비압축성 유동장의 해를 얻기 위해 SIMPLE 알고리즘을 사용하였다. 먼저 가정된 압력장에서 운동량방정식을 푼다. 질량보존을 만족시키기 위하여 연속방정식에서 유도된 압력수정방정식을 풀어 속도의 수정분을 얻는다.

$$\begin{aligned} \vec{V}' &= -D_u \nabla p \\ \vec{V} &= \vec{V}' + \vec{V} \\ p &= p' + p \end{aligned} \quad (8)$$

SIMPLE 알고리즘에서 계수 $D_u (= \Omega/a_p)$ 는 이산 운동량방정식의 중심계수를 이용하여 구한다. 직교좌표의 속도성분과 압력을 셀 중심에 저장하므로 압력장의 체커판 현상을 막기 위하여 검사면에서의 질량유속을 구할 때 압력 댐핑항을 첨가한다.

$$J_f = \rho_f \vec{V}_f \cdot \hat{n} - \rho_f \overline{D_u} \left[\frac{p_1 - p_0}{ds} - \overline{\nabla p \cdot \hat{s}} \right] \alpha \quad (9)$$

SIMPLE 알고리즘을 이용하여 정상 및 비정상 유동 해석을 하는 순서도를 Fig. 1에 나타내었

다. 정상유동해석은 Δt 에 무관하게 내부 반복(Niter)만으로 계산하고 비정상 유동해석은 매 시간 간격마다 내부반복을 수행한다.

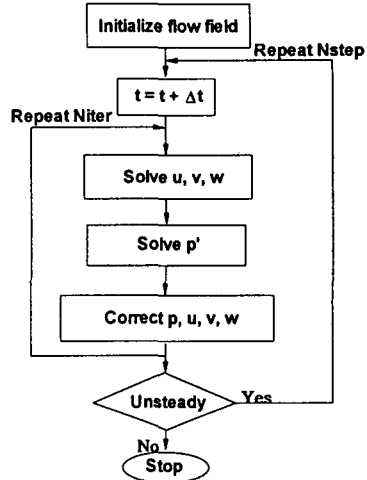


Fig. 1 Flowchart for steady and unsteady SIMPLE algorithm

2.4. 자료구조 및 선형방정식의 해법

비정렬격자에서 지배방정식을 이산화하기 위해서는 격자의 연결정보를 필요로 한다. 이 격자 연결자료는 많은 형태로 구현될 수 있으나 수치 자료를 효율적으로 이용할 수 있고 메모리를 줄이는 방법을 사용하여야 한다. 셀 중심의 유한체적법에서는 면을 기준으로하는 격자연결자료가 많이 사용되고 있다. 이것은 각각의 검사면을 따라 이웃하는 두 셀의 번호, 혹은 그 면을 만드는 꼭지점의 번호를 저장한다. 검사면의 면적벡터 등 기하학적인 자료를 이 면기준 격자연결자료와 함께 사용하여 수치 플럭스를 계산할 수 있다. 본 연구에서는 격자점에 수치값을 내삽하지 않기 때문에 face-cell 연결자료만을 사용하여 플럭스의 계산을 함으로써 메모리 사용에서 매우 효율적이다.

운동량 방정식 및 압력수정 방정식을 이산화하면 다음과 같은 형태의 선형방정식이 만들어진다.

$$a_i \phi_i + \sum_j a_j \phi_j = b_i \quad (10)$$

불규칙적이고 성긴 행렬식을 푸는 방법 중에서

CG 계열의 반복법은 수렴속도가 뛰어나서 최근에 많이 사용되고 있다. 특히 비정렬격자에서는 TDMA등과 같은 선이완 기법을 사용할 수 없고 행렬 [A]의 요소를 모두 저장하여야 하기 때문에 CG계열의 반복법은 더욱 요구되어진다.

상류차분법으로 이산화된 운동량방정식의 행렬은 비대칭이므로 CGS, Bi-CGSTAB, 혹은 GMRES 등을 사용할 수 있으나 수렴안정성과 메모리 사용량을 고려하여 Bi-CGSTAB을 선택하였다. 그리고 Bi-CGSTAB은 CGS와 거의 같은 수렴속도를 가지면서 CGS의 불규칙적인 수렴양상을 막을 수 있다[6]. CG 계열 수렴성은 계수행렬의 스펙트럼에 크게 영향을 받으며 행렬의 상태를 개선하기 위하여 preconditioner를 사용한다. 좋은 preconditioner를 사용함으로써 수렴성을 개선할 수 있기 때문에 이에 대한 많은 연구가 되어왔다[4,11]. Jacobi, SOR, ILU 등이 대표적으로 사용되고 있으며 그 외 일반적으로 사용되는 행렬 계산법도 CG 계열의 preconditioner로 사용될 수 있다. 본 연구에서는 SGS와 LU-SGS를 preconditioner 사용하였다. 정렬격자에서는 $i+j+k = const$ 인 면을 이용하여 전방과 후방으로 스weep을 할 수 있으며, 비정렬격자에는 Sharov 등[12]이 사용한 방법으로 이 초월면(hyperplane)을 구성할 수 있다.

행렬 [A]를 대각[D], 하삼각[L], 상삼각[U] 행렬로 나누고, 셀을 재배열하면서 생성된 초월면을 따라 계산해 간다. SGS 반복법은 초월면을 전방과 후방으로 한번씩 스weep하면서 다음과 같이 최근 값을 이용하여 계산한다.

전방 스weep:

$$[D] \phi^{k+1/2} = b - [L] \phi^{k+1/2} - [U] \phi^k \quad (11)$$

후방 스weep:

$$[D] \phi^{k+1} = b - [L] \phi^{k+1/2} - [U] \phi^{k+1} \quad (12)$$

LU-SGS는 행렬 [A]를 [L]과 [U]를 이용하여 근사 인수분해한 뒤 전방과 후방의 스weep으로 계산한다.

$$[A] = ([D] + [L] + [U]) \approx ([D] + [L])[D]^{-1}([D] + [U]) \quad (13)$$

전방 스weep:

$$\phi^* = [D]^{-1}(b - [L]\phi^*) \quad (14)$$

후방 스weep:

$$\phi = \phi^* - [D]^{-1}[U]\phi \quad (15)$$

3. 결과 및 고찰

3.1 2차원 공동 유동

선형방정식의 해법에 따른 정상 비압축성 유동의 수렴특성을 파악하기 위하여 2차원 공동유동을 해석하였다. 사용한 격자는 벽면에 당겨진 100×100 의 매우 조밀한 정렬격자이며, 레이놀즈 수 5000에서 수치계산을 하였다.

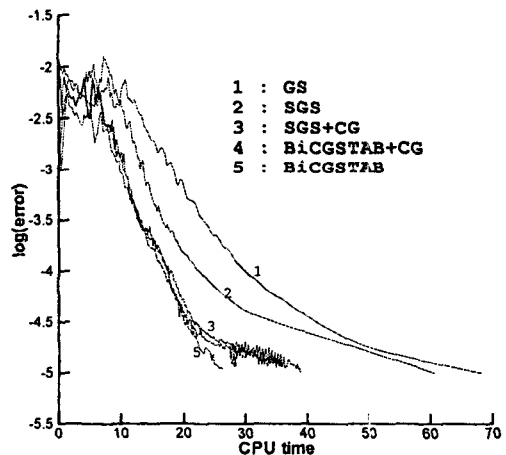


Fig. 2 Convergence rates of the pressure correction equation for the computation of the 2D cavity flow at Re=5000

Fig. 2는 CPU 시간에 따라 각 행렬 해석법의 수렴특성을 비교한 것이다. 1번은 Gauss-Seidel 반복법으로 cell-face 격자 연결자료를 이용하였고, 2번 SGS는 식 (11), (12)를 이용하여 반복적으로 계산하였다. SGS+CG는 운동량방정식을 SGS로 풀고 압력수정방정식은 CG로 푼 것이고 5번은 모든 방정식에 Bi-CGSTAB을 이용하였다. SGS를 preconditioner로 사용하였으며 1번의 전후 스weep을 하였다. 이 문제의 경우 모든 방정식을 Bi-CGSTAB로 푼 5번의 경우가 1번의 GS보다 3배 정도 빠름을 알 수 있다.

3.1 원형단면을 갖는 90° 곡관 유동

본 수치기법을 검증하기 위한 두 번째 문제로 원형 단면을 갖는 90° 곡관내의 비압축성 층류 유동을 선택하였다. 해석 결과의 정량적 비교를 위해 Bovendeerd 등[13]의 실험 결과를 이용하였다. 그는 관의 직경(D)과 평균유동속도(V)를 기준으로 레이놀즈 수 700에서 실험을 하였다. 관의 곡률반경은 3D이고 90° 곡관부 입구에서 완전히 발달된 유동이 유입하도록 하기 위하여 직관부의 길이를 50D로 하였다. 이번 수치해석에서는 5D의 직관부를 곡관부 앞에 두고 입구조건은 완전히 발달된 속도분포를 해석해[14]를 이용하여 주었다. 유동은 x축 방향으로 유입하여 곡관부를 지나 y축 방향으로 유출하며 xy평면에 대칭이다. 해석기법이 격자의 비대칭성에 무관하게 대칭유동을 만들어냄을 보이고 해의 수렴특성을 파악하기 위하여 전체 관에 대하여 해석하였다. Fig. 3은 사용한 격자를 보여주며, 먼저 입구의 원형단면에서 삼각형과 사각형의 혼합격자를 생성한 뒤 관의 중심축을 따라 적층하여 33,250개의 프리즘과 39,690개의 육면체로 구성된 격자를 생성하였다. 정렬격자로 원형곡관 내의 격자를 생성하는 경우 일반적으로 특이점을 포함하거나 찌그러짐이 큰 격자의 생성을 피할 수 없으나, 비정렬 혼합격자를 사용함으로써 격자의 찌그러짐을 거의 없앨 수 있었다.

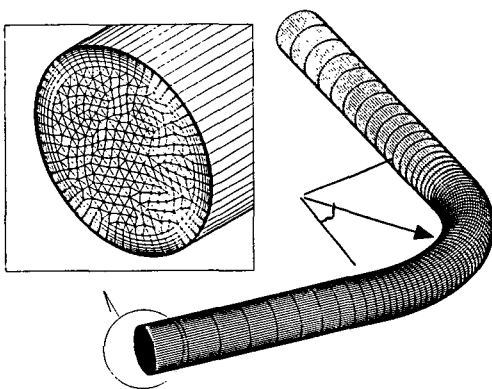


Fig. 3 Hybrid mesh for the 90° curved pipe, npoin=59427, nhex=39690, npri=33250

Fig. 4는 곡관부 끝(θ=90°) 단면에서 속도벡터를 보여주는 것으로 상하 대칭인 2차 유동이 발

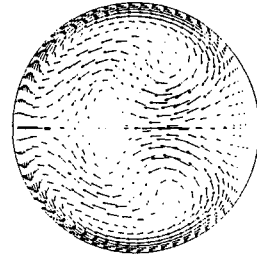


Fig. 4 Velocity vectors on the plane at θ=90°

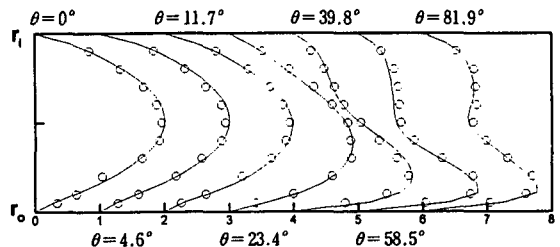


Fig. 5 Measured and calculated streamwise velocity profiles on the plane of symmetry: o measurements(Bovendeerd et al.), -- calculated

달되어 있음을 알 수 있다. 그리고 Fig. 5에서는 곡관부에서의 주유동방향의 속도성분을 실험값과 비교하였으며, 잘 일치함을 알 수 있다. Fig. 6은 Bi-CGSAB를 사용하였을 때의 수렴특성을 보여주는 것으로 오차는 $a_p \phi_p + \sum a_{nb} \phi_{nb} - S_p$ 로 정의하였다.

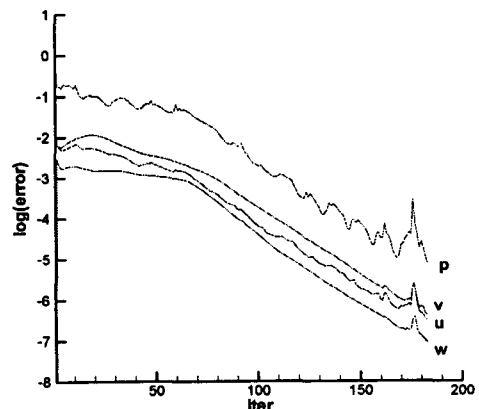


Fig. 6 Convergence rates for the 90° curved pipe



3.3 정사각 단면을 갖는 90° 곡관 유동

정사각 단면 90° 덕트 유동은 Humphrey 등[15]이 실험적으로 연구를 한 것으로 수치해석 결과와 비교하기 위해 많이 선택하는 유동 문제이다. 본 연구에서는 덕트의 수력직경과 입구의 평균 유속을 기준으로 무차원화한 레이놀즈 수 790인 층류 유동을 선택하였다. 61×21×21의 정렬격자를 생성한 뒤 비정렬의 격자 연결자료 구성하여 사용하였다. Fig. 5는 사용된 격자로 곡관부 앞에 곡률반경(D)의 2배의 직관이 연결되어 있고 출구부에는 10D의 직관이 연결되어 있다.

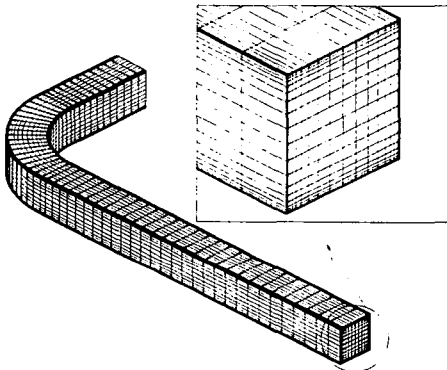


Fig. 7 Hexahedral mesh for the 90° curved duct, npoin=38125, nhex=34560.

입구에서는 완전발달된 층류속도 분포를 White[14]의 해석해를 이용하여 주었고 출구에서는 유량조건을 주었다. Fig. 8은 곡관부 끝(θ=90°)에서 속도벡터이며, 1쌍의 완두콩 모양으로 서로 엇회전하는 2차 유동을 볼 수 있다.

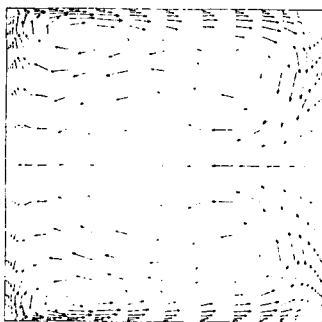


Fig.8 Velocity vectors on the plane at θ=90°

Fig. 9는 곡관부, θ가 0°, 30°, 60°, 90°에서 유선방향의 속도성분을 Humphrey 등의 실험치와 비교한 것이다. z=0.(대칭면)과 z=0.25인 단면에서 수치결과가 실험치와 비슷함을 볼 수 있다.

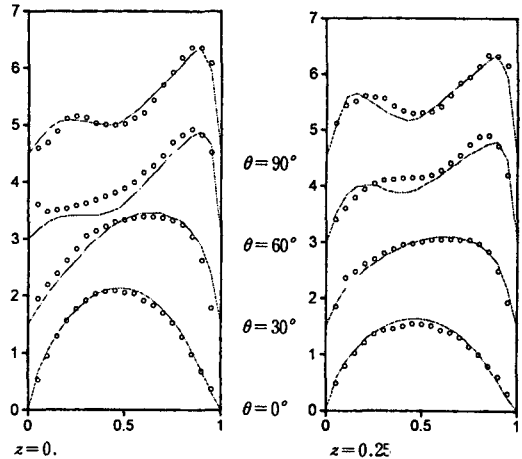


Fig. 9 Measured and calculated streamwise velocity profiles: o measurements(Humphrey et al.), -- calculated

Fig. 10에서 이 문제에 대한 본 수치해석 기법의 수렴특성을 볼 수 있다. PentiumII 350Mhz PC에서 41분의 CPU 시간이 소요되었다.

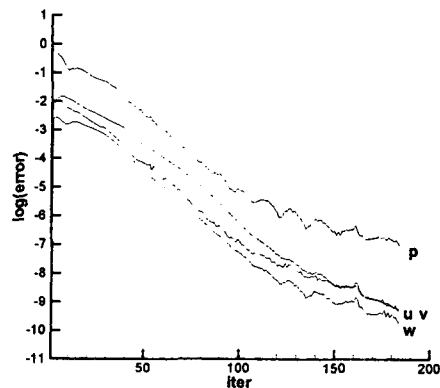


Fig. 10 Convergence rates for the square duct with 90° bend.

3.4 2차원 원주 주위의 비정상 유동

원형 실린더 주위의 유동은 레이놀즈 수가 40까지는 정상상태의 유동이며 40을 넘어서면서

와도홀림이 주기적으로 발생하는 비정상 유동이 된다. 비정상 수치해법을 검증하기 위하여 레이놀즈 수 200의 경우를 해석하였다. 실린더 직경을 기준으로 외부경계는 30×20의 직사각형으로 하였다. Fig. 11은 사용한 격자를 보여주며 7639 개의 삼각형과 1769 개의 사각형으로 이루어졌다.

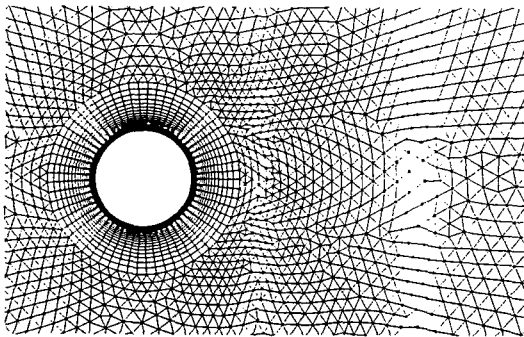


Fig. 11 Unstructured hybrid mesh around a circular cylinder, npoin=5671, ntri=7639, nquad=1769.

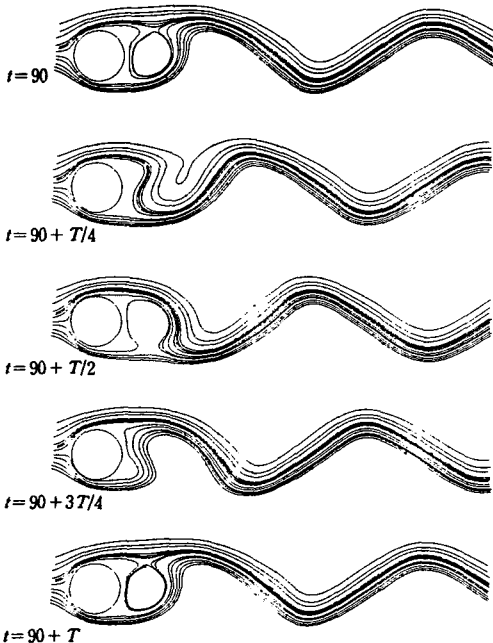


Fig. 12 Streamlines for flow over a circular cylinder at Re=200 in a period.

Fig. 12는 한 주기 내에서 시간 단계별로 유선을 보여주는 것으로 실린더 벽면에서 와도가 생성

되고 떨어져나가는 것을 볼 수 있다. 계산된 항력계수는 $C_d = 1.36 \pm 0.042$, 양력계수는 $C_l = \pm 0.67$ 이며 Strouhal 수는 0.2로 다른 수치결과[16]나 실험치와 잘 일치한다.

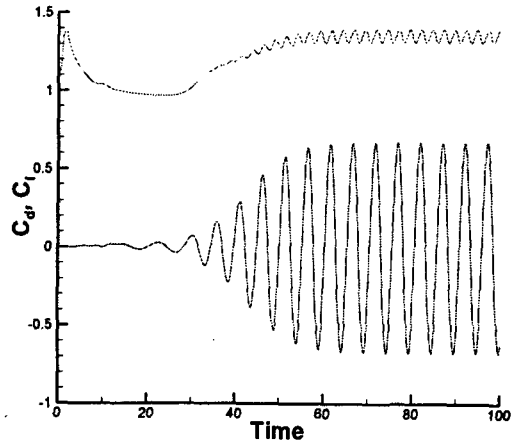


Fig. 13 Lift and drag coefficients versus time for flow over a circular cylinder at Re=200.

4. 결론 및 앞으로의 과제

비정렬격자 압력기준 유동해석 코드 PUNS를 사용하여 정상 및 비정상의 비압축성 유동을 해석하였다. 비정상항은 2차의 Euler 후방차분법을 이용하여 이산화하였으며 선형방정식은 SGS, LU-SGS를 preconditioner로 한 Bi-CGSTAB으로 계산하였다. Bi-CGSTAB를 사용함으로써 수치계산의 수렴속도를 크게 개선시킬 수 있었으며 특히 비정상 유동해석에서 큰 효과를 얻을 수 있었다. 그리고 Bi-CGSTAB은 3차원 혼합격자에서 SGS를 사용할 때에 비해 6% 정도의 메모리를 증가를 가져왔다.

거대 격자를 사용하여 3차원 비정상 유동을 해석하기 위해 앞으로 코드의 병렬화가 필요하다.

5. 참고문헌

[1] Shang, H.M., Chen, Y.S., Liaw, P. and Chen, C.P., "A Hybrid Unstructured-Grid Method for Fluid Flow Computation," ASME Numerical Developments in CFD



- FED-VOL. 215 (1995), pp. 55-61
- [2] Jiang, Y. and Przekwas, A., "Implicit, Pressure-Based Incompressible Navier-Stokes Equations Solver for Unstructured Meshes," AIAA paper 94-0305 (1994)
- [3] Nielsen, E.J., Anderson, W.K., Walters, R. and Keyes, D.E., "Application of Newton-Krylov Methodology to a Three-Dimensional Unstructured Euler Code," AIAA paper 95-1733-CP (1995)
- [4] 맹 주성, 임 연우, 최 일곤, "비압축성 Navier-Stokes 방정식에 대한 Krylov Subspace 법의 적용," 대한기계학회 추계학술대회논문집 (1999), pp. 309-314
- [5] 김 종태, 김 태준, 김 용모, "비정형격자 압력 기준 유동해석기법을 이용한 비압축성 유동 해석," 한국전산유체공학회 추계학술대회 (1998), pp. 42-47
- [6] Barreit, R. et al., TEMPLATES for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods, (<ftp://netlib2.cs.utk.edu>)
- [7] Cuthill, E. and McKee, J., "Reducing the Band Width of Sparse Symmetric Matrices," Proc. ACM Nat. Conf. (1969), pp. 157-172
- [8] Mathur, S.R. and Murthy, J.Y., "A Pressure-Based Method for Unstructured Meshes," Numer. Heat Transfer, Part B, Vol.31 (1997), pp.195-215
- [9] Lilek, Z. and Peric, M., "Computation of Unsteady Flows using Nonmatching Blocks of Structured Grids," Numerical Heat Transfer, Vol. 32 (1997), pp. 403-418
- [10] 김 용대, 최 일곤, 맹 주성, "3단계 준위법을 이용한 원주 후류 와동흐림의 수치해석 연구," 한양대 기계기술연구논문집, Vol. 4, No. 1 (1998), pp.67-74
- [11] Ajmani, K., "Preconditioned Conjugate Gradient Methods for the Navier-Stokes equations," Ph.D. Thesis (1992), Virginia Poly. Inst. and State Univ.
- [12] Sharov, D. and Nakahashi, K., "Reordering of 3-D Hybrid Unstructured Grids for Vectorized LU-SGS Navier-Stokes Computations," AIAA paper 97-2102 (1997)
- [13] Bovendeerd, P.H.M., Steenhoven, A.A., Vosse, F.N. and Vossers, G. "Steady Entry Flow in a Curved Pipe," J. Fluid Mechanics, Vol. 177 (1987), pp. 233-246
- [14] White, F.M., Viscous Fluid Flow. McGraw-Hill (1974), pp. 11-25
- [15] Humphrey, J.A.C., Taylor, A.M.K. and Whitelaw, J.H., "Laminar Flow in a Square Duct of Strong Curvature," J. Fluid Mechanics, Vol. 83 (1977), pp. 509-527
- [16] Braza, M., Chassaing, P and Minh, H.H., "Numerical Study and Physical Analysis of the Pressure and Velocity Fields in the Near Wake of a Circular Cylinder," J. of Fluid Mechanics, Vol. 165 (1986), pp. 79-130