



## 다중격자 기법을 적용한 극초음속 평형 유동장 계산

Application of Multigrid Method for Computing Hypersonic, Equilibrium Flows

○ 김성수\*, 김종암\*\*, 노오현\*\*\*

Sung soo Kim\*, Chongam Kim\*\* and Oh-Hyun Rho\*\*\*

A multigrid convergence acceleration technique is presented for computing hypersonic inviscid and viscous flows in equilibrium state. The governing equations are solved using an explicit Runge-Kutta method. Curve fitting data in NASA Reference Publication 1181, 1260 are used to calculate equilibrium properties. In order to ensure stability, damped prolongation and modified implicit residual smoothing are proposed. Blunt body test cases are presented to demonstrate the robustness and the efficiency in performance of the proposed methods.

### 1. 서론

극초음속 유동은 아음속 유동, 천음속 유동과 달리 수치적 계산을 수행할 때 여러 가지 까다로운 점들이 있다. 충격파의 존재로 단조성을 만족시킬 수 있는 충격파 포착능력이 확보되어야 하고 얇은 점성 경계층의 존재는 공간 차분에서의 수치 점성의 양을 제한한다. 극초음속 유동의 고온 효과를 고려하기 위하여 평형 유동 모델을 사용할 때에는 화학 반응을 나타내는 비선형 식들이 들어가고 이러한 요소들은 극초음속 유동의 수치적 계산을 더욱 까다롭게 한다. 벽면 근처에서의 높은 cell aspect ratio는 수치해의 수렴성을 더욱 저하시키고 이러한 여러 가지 요소들로 인하여 극초음속 유동의 수치적 계산에는 많은 시간이 요구되고 있는 것이 현실이다.

인공위성 발사체의 연구와 각종 유도무기의 개발을 위하여는 고속 유동의 유동장 해석이 필요하고 수치해석 기법이 이러한 연구에 쓰이기 위하여는 안정적이고 빠른 수렴성을 확보하는 것이 중요한 과제라고 생각된다. 수렴가속화를 위한 효과적인 방법 중의 하나인 multigrid 기법은 아음속과 천음속 영역에서 높은 효율성을 보여주고 있는 것으로 알려져 있으나 아음속, 천음속 유동에 쓰인 방법을 그대로 극초음속 유동에 적용할 때에 수치해의 불안정성으로 그 효과는 기대에 못 미치는 것으로 알려져 있다.

본 논문은 안정된 수렴 가속 기법의 적용으로 극초음속 유동 계산의 효율을 향상시키는 것을 목적으로 하고 있다. 수렴 가속을 위한 방법으로 multigrid 기법을 사용하였고, 수치해의 불안정성을 제거하기 위하여 간단한 damped prolongation 방법을 개발하여 적용하였다. 시간 전진은 Martinelli의 5-stage Runge-Kutta 방법을 사용하였고 효과적인 수렴 가속을 위하여 변형된 implicit residual smoothing 기법을 개발하여 적용하였다. 수렴 가속 성능을 확인하기 위하여 2차원 평형, 층류 유동을 계산하였다.

### 2. 지배방정식

압축성 Navier-Stokes 방정식은 일반화된 곡선좌표계(generalized curvilinear coordinate)에서 보존형으로 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = \frac{1}{Re_a} \left[ \frac{\partial \hat{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \eta} \right]$$

\*1,\*\*,\*\*\*) 서울대학교 항공우주공학과



압력  $p$ 는 평형유동에서는 이상기체 상태 방정식에 엔탈피와 내부에너지의 비를 이용한 새로운  $\tilde{\gamma}$ (equivalent specific heat ratio)를 사용하여, 수정된 상태방정식을 이용한다.

$$p = \rho \left[ e_t - \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right] (\tilde{\gamma} - 1) = \rho e (\tilde{\gamma} - 1), \quad \tilde{\gamma} = \frac{h}{e}$$

### 3. 수치해석기법

#### 3.1 공간 이산화

##### 3.1.1 AUSMPW+

Liou는 강건하면서 점성소산항이 적은 새로운 FVS기법인 AUSM 기법을 제시하였고 계속하여 수정된 형태의 AUSM 계열의 flux splitting 기법을 제시하였다. 이 기법은 기존의 flux splitting 기법에 비해 불연속면과 경계층에서 정확한 해를 보장하여 극초음속 유동장을 해석하는데 있어 적합하다. 그러나 이러한 AUSM 기법들도 각각 단점이 있어서 AUSMD/V의 경우 여전히 수치점성이 과도한 경향이 있고 AUSM+의 경우 충격파에서의 overshoot와 undershoot, 벽면에서의 압력의 진동이 보인다. 이에 AUSM 기법을 토대로 이 기법의 장점을 살리고 단점을 극복한 새로운 공간차분 기법인 AUSMPW, AUSMPW+이 제시되었다.[1][2] 이 기법은 기본적으로 advection 성질이 가지는 불연속면에서의 진동현상을 압력가중함수를 통해 적절히 제어하는 수치기법이다. 본 연구에서는 AUSMPW+를 이용하여 공간차분을 행하였다.

#### 3.2. 평형유동의 물성치 계산

실제 유동 중 엔탈피가 작은 유동에서는 분자가 진동 또는 화학반응을 할 만큼 충분한 에너지를 가지지 못하므로 동결유동으로 가정할 수 있다. 그러나 엔탈피가 큰 유동은 분자의 진동에너지와 화학반응에너지를 무시할 수 없게 되고, 이에 따라 공기구성분자가 바뀌게 되어  $\gamma$ 값과 정적비열, 정압비열이 온도와 압력의 함수로 주어진다. 본 연구에서는 각각의 물성치들을 진동에너지, 화학반응에너지까지 고려된 NASA Reference Publication 1181,1260에 추어져 있는 Curve Fit Data를 이용하였다.[3]

#### 3.3 시간적분

##### 3.3.1 5 단계 Runge-Kutta

시간 전진 기법으로 국소 시간 전진, Martinelli의 5 단계 Runge-Kutta 방법[4]을 사용하였으며 사용된 계수는 아래와 같다.

$$\alpha_1 = 0.25 \quad \alpha_2 = 1/6 \quad \alpha_3 = 0.375 \quad \alpha_4 = 0.5 \quad \alpha_5 = 1.0$$

##### 3.3.2 Damped Prolongation

본 연구에서는 Multigrid V-cycle을 이용하였다. Multigrid 기법을 사용할 때 유동 변수의 수정량은 다음과 같이 계산된다.

$$W_h^+ = W_h + I_{2h}^h (W_{2h}^+ - W_{2h})$$

- $W$  : 성긴 격자에서의 수정된 양을 고려하기 전의 유동 변수 값  
 $W^+$  : 성긴 격자에서의 수정된 양을 고려한 최종적인 유동 변수 값  
 $h$  : 미세한 격자,  $2h$  : 성긴 격자

$I$  : bilinear interpolation operator

Multigrid 기법을 극초음속 유동에 적용할 때 나타나는 수치적 불안정성의 요인을 다음의 두 가지로 보았다.

아래의 그림.1은 중간 단계의 수치해와 수렴된 상태의 수치해의 압력 contour를 나타낸 것이다. 초기 유동 조건은 자유류 조건을 이용하였다. 충격파는 처음 벽면에서 생성된 후 차차 전방으로 팽창, 성장하면서 자신의 위치를 잡아나가기게 된다. 이러한 사실은 중간 단계의 압력이 수렴된 상태의 압력보다 높게 나타나고 있는 것으로도 알 수 있다.

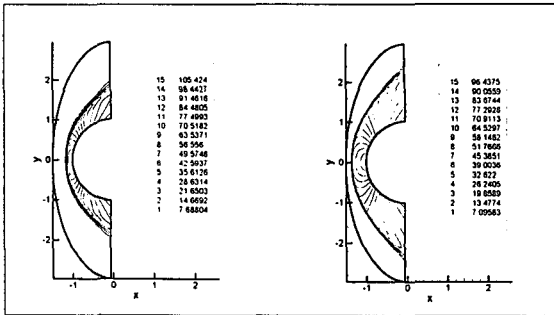


그림.1 중간해와 수렴된 해

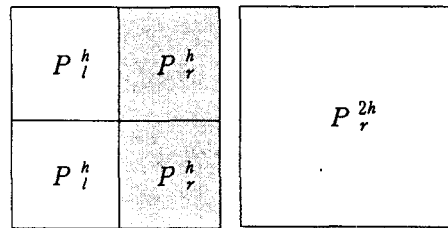


그림.2 미세 격자와 성긴 격자에서의 압력

그림.2는 중간 단계에서의 압력 분포를 미세한 격자와 성긴 격자에 나타낸 것이다. L은 충격파 전을 나타내고 R은 충격파 후를 나타낸다. 그림.2와 같이 압력이 분포되어있는 경우 성긴 격자에서의 유동은 팽창되는 방향으로 수정이 이루어지고 이를 단순히 내삽할 경우 미세한 격자의 충격파 전의 영역 L도 팽창되어 유동의 운동에너지가 증가한다. 이로 인해 유동은 내부에너지를 빼앗기게되어 비물리적인 음의 내부에너지를 갖게된다. 따라서 압력 구배가 심한 영역에서는 단순한 bilinear interpolation은 비물리적인 해를 유발하게 되고 이로 인해 수치해에 불안정성이 오게된다.

오른 쪽의 그림.3은 CFL을 1.5로 주었을 때 stagnation line을 따른  $\Delta t$ 를 나타낸 것이다. 그림을 보면 충격파를 지난 후에는 유동이 아음속이 되어 stability region에서의  $\Delta t$ 가 충격파 전의 값보다 상당히 크다는 것을 알 수 있다. 따라서 그림.2와 같은 영역에서 충격파 전과 충격파 후의 값을 똑같은 양에 기초하여 수정해 준다는 것은 안정성 측면에서 바람직하지 않은 결과를 가져올 가능성을 내포하고 있다.

이와 같은 해석에 근거하여 다음과 같은 제한자를 도입하여 damped prolongation을 시도하였다.

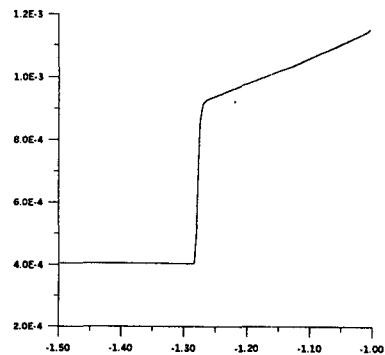


그림.3 stagnation line을 따른  $\Delta t$

$$\phi = \min\left(1, \frac{P_h}{P_{2h}}\right), W_h^+ = W_h + \phi I_{2h}^h (W_{2h}^+ - W_{2h})$$

### 3.3.3 Implicit residual smoothing과 modified implicit residual smoothing

Implicit residual smoothing은 다음의 식을 사용하였다.[6]

(비점성 유동의 경우)

$$[\prod_l (1 - \beta_l \nabla_l \Delta_l)] \bar{R} = R \quad l = \xi, \eta$$



$\bar{R}$  : smoothing된 residual

$R$  : residual

$\nabla$  : 후방차분 연산자

$\Delta$  : 전방차분 연산자

$$\beta_\xi = \max \left\{ \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{N}{N^*} \frac{1}{1 + \phi r_{\eta\xi}} \right)^2 - 1 \right], 0 \right\}$$

$$\beta_\eta = \max \left\{ \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{N}{N^*} \frac{1}{1 + \phi r_{\eta\xi}^{-1}} \right)^2 - 1 \right], 0 \right\}$$

$\frac{N}{N^*}$  : smoothing한 후와 하기 전의 CFL number의 비, 2 ~ 3

$$r_{\eta\xi} = \lambda_\eta / \lambda_\xi, \quad \phi \approx 0.125$$

(점성 유동의 경우)

$$(\beta_d)_\eta = \frac{1}{4} \bar{C} \frac{(\lambda_d)_\eta}{\lambda_\xi + \lambda_\eta}, \quad \beta_\eta = \max((\beta_d)_\eta, (\beta_c)_\eta)$$

$$\lambda_\xi = |u\xi_x + v\xi_y| + c\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, \quad \lambda_\eta = |u\eta_x + v\eta_y| + c\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}$$

$$\lambda_{viscous} = \frac{\gamma\mu}{Pr\rho} (\eta_x^2 + \eta_y^2)$$

위의 식을 사용할 경우 비점성 유동 계산에서는 만족할 만한 결과를 얻었으나 점성 계산에서 위의 implicit residual smoothing을 사용할 경우 반복계산 10번을 못 넘기고 끊어지는 불안정성을 보여줬다. 이에 비점성 유동 계산에 쓰였던 implicit residual smoothing을 점성유동의 경우에도 사용하여 보았다. 이를 적용하기 위하여 forcing term에 0.7의 계수를 곱해줘야 했다.

$$P_{k+1} = \alpha \sum R_k(W_k) - R_{k+1}(W_{k+1}^0), \quad \alpha = 0.7$$

Forcing term에 붙는 0.7의 계수는 안정성에 도움을 주지만 해의 수렴을 늦추는 효과가 있다. 3차원의 경우에 implicit residual smoothing은 아래와 같은 형태를 지닌다.

$$\beta_l = \max \left\{ \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{N}{N^*} \phi_l \right)^2 - 1 \right], 0 \right\}, \quad l = \xi, \eta, \zeta$$

$$\phi_\xi = \frac{1}{1 + \phi_{3-D}(r_{\eta\xi} + r_{\zeta\xi})}$$

위의 형태와 유사하게 다음과 같은 implicit residual smoothing을 만들어 점성 유동 계산에 적용해 보았다.

$$\beta_\eta = \max \left\{ \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{N}{N^*} \frac{1}{1 + \phi(r_{\eta\xi}^{-1} + r_{\eta d}^{-1})} \right)^2 - 1 \right], 0 \right\}, \quad r_{\eta d} = \frac{\lambda_\eta}{(\lambda_d)_\eta}$$

위의 식을 사용하여 forcing term에 붙는 계수를 1.0으로 만들 수 있었으며 결과적으로 효과적인 해의 수렴가속을 얻어낼 수 있었다.

### 3.4. 경계조건

유입류 : 자유류, M=10, 60Km 고도 조건

유출류 : 외삽

벽면 : non-slip condition,  $\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0$ , 단열 벽면 조건(점성 유동)

slip condition(비점성 유동)



### 4. 계산 결과 및 고찰

#### 4.1. 비점성 유동 계산

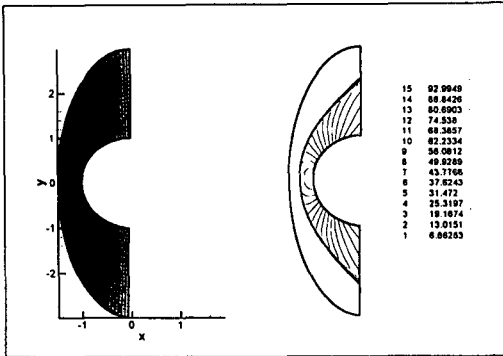


그림.4 계산 격자와 압력 contour

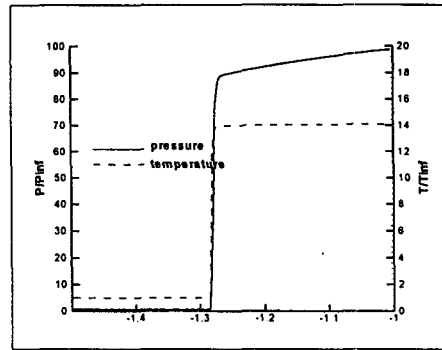


그림.5 stagnation line을 따른 압력과 온도 분포

그림.4에 계산 격자와 압력 contour를 나타내었다. 형상은 cylinder이고 65 X 113의 격자를 사용하였고 J방향으로는 등간격을 사용하였다. 그림.5는 stagnation line을 따른 압력과 온도를 나타낸 그림이다. AUSM+에서 나타났던 충격과 전후로의 압력의 overshoot, undershoot 현상이 없고 충격과 전후로의 단조성이 유지되는 것을 볼 수 있다.

	반복 계산 횟수	수렴 가속 효과
1 Level	8848	---
4 Level	710	7.8

표.1 반복 계산 횟수와 수렴 가속 효과

그림.6은 error history를 나타낸 그래프이고 수렴 가속 정도는 표.1에 나타내었다. 4-level multigrid의 한 번 계산 시간은 single-level의 약 1.6배가 소요된다. 위의 가속 정도는 이 값을 반복 계산 횟수의 비에 나눠주어 얻은 값이다.

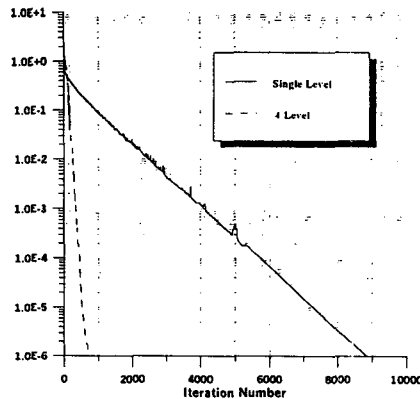


그림.6 Error History

Damped prolongation을 쓰지 않은 경우에는 수치해의 불안정성으로 해가 구해지지 않았다.

#### 4.2. 점성 유동 계산

점성 유동의 계산에도 역시 65 X 113의 격자를 사용하였다. 격자의 모양은 비점성 계산 때와 같고 벽면으로 격자를 밀집시켰다는 차이가 있다.

그림.7은 점성 계산에서의 error history를 나타낸 것이고 표.2는 수렴 가속 정도를 나타내고 있다. Error history를 보면 single-level과 4-level에서 모두 -4승 밑에서 error가 갑자기 튀는 현상이 보인다. 이는 유동을 평형 유동으로 가정하고 물성치를 계산하기 위하여 다항식 형태의 curve fitting 방법을 사용하였는데 그 과정에서 생긴 error라고 보인다.

점성 유동의 경우에는 4-level multigrid의 한 번 계산 시간이 single-level의 1.4~ 1.5배 정도가

소요된다. 표.2의 가속 정도도 역시 비점성 유동의 가속 정도를 계산한 방법과 동일한 방법으로 계산하였다. 점성 유동의 경우에도 damped prolongation을 쓰지 않은 경우는 수치해의 불안정성으로 해를 얻지 못하였다.

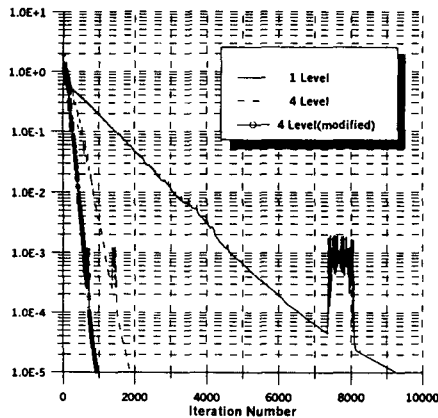


그림.7 Error History

	반복 계산 횟수	수렴 가속 효과
1 Level	9272	----
4 Level	1870	3.5
4 Level(modified smoothing)	929	7.0

표.2 반복 계산 횟수와 수렴가속 효과

## 5. 결론

극초음속 유동의 계산에 있어서 multigrid 기법의 적용을 어렵게 하는 요인을 찾아 그 해결책을 제시하였다. 그리고 그 타당성을 보기 위하여 극초음속 점성, 비점성 유동장을 계산하였다. 그 결과 해가 안정적으로 수렴하는 것을 보았고 7 내지 8배 정도의 수렴 가속효과가 있는 것을 확인하였다.

## 6. 참고문헌

- [1] Kim, K. H. and Rho, O. H., "An Improvement of AUSM Schemes by Introducing the Pressure-based Weight Functions," The fifth Annual Conference of the Computational Fluid Dynamics Society of Canada (CFD 97), 1997, pp.(14-33)-(14-38),
- [2] Kyu Hong Kim, ChongAm Kim and Oh Hyun Rho, "Accurate Computation of Hypersonic Flows Using AUSMPW+ Scheme and Shock-Aligned Grid Technique."AIAA Paper No. 98-2442,1998
- [3] Gupta, R. N., Lee, K. P., Thompson, R. A., and Yos, J. M., "Calculations and Curve Fits of Thermodynamic and Transport Properties for Equilibrium Air to 30000 K," NASA RP-1260, 1991
- [4] Lugi Martinelli, "Calculations of Viscous Flows with a Multigrid Methods," Ph. D thesis, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Princeton University, 1987
- [5] Z .W. Zhu, P. Alavilli, C. Lacor and Ch. Hirsch, "Efficiency and Robustness of Multigrid Methods for Hypersonic Flows," AIAA Paper No. 97-0342, 1997
- [6] E. Turkel, R. C. Swanson, V. N. Vasta and J. A. White, "Multigrid for Hypersonic Viscous Two-and Three-Dimensional Flows," AIAA-91-1572-CP