



내부 핀이 부착된 열교환기의 유동장해석 Analysis of flow and heat transfer in internally finned tube

○ 정호열¹⁾, 정재택²⁾, 고흥종³⁾

Ho-Eyoul Jeong, Jae-Tack Jeong, Hyung-Jong Ko

There have been many studies for heat transfer enhancement. Particularly, the study of flow in heat exchangers which have fin device has been main theme in heat transfer area. Practically, the circular tube which has internal fins is widely used for developing heat transfer rate. In this study, flow and heat transfer analysis of the circular tube with fins are investigated. The height and the number of fins are arbitrary. The flow field is assumed to be laminar. The conformal mapping is used for analytic solution of the laminar flow field. Discretization of governing equation, namely, FDM was used for numerical analysis. The velocity field, flow rate and shear stress are calculated for some numbers of fins in circular tube and for some heights of fin. Temperature fields are plotted along the tube length. It can be shown that the numerical solution agrees with the analytical solution.

1. 서론

1.1 연구배경 및 목적

열전달에 관한 연구는 에너지 절약 및 환경보존문제와 관련하여 열교환기, 보일러, 가열기, 공기 조화 기기, 전자부품냉각, 폐열회수 등 광범위한 분야에서 응용되고 있으며 열전달 현상이 수반되는 각종기계 장치에서는 고성능화, 고집적화, 에너지 절약을 위하여 열전달 촉진에 대한 기술이 절대적으로 요구되고 있다. 이러한 요구에 부응하여 열전달 촉진에 관한 연구는 기기들의 고성능화 및 고효율화를 추구하기 위하여 활발하게 이루어져 왔으며, 현재도 촉진기술 및 응용에 관한 연구개발이 다양하게 진행되고 있다.

그러나 실제 원-관형 열 교환기와 산업공정용 원통 다관형 열 교환기, 판-원형 및 관형 열 교환기에 있어서 내부 핀의 형상이 상당히 복잡하여 실제로 이론해석에 의한 유동장 해석은 매우 어렵다. 그리고 온도장은 에너지방정식 즉 속도장과 온도장이 결합되어 있어서 이론해석은 불가능하다. 따라서 실험 및 수치해석으로 얻은 결과를 열교환기의 기초 설계 데이터로 사용해야 한다. 실험장치는 구성이 복잡할 뿐만 아니라 비용이 많이 들고 정확한 실험이 요구되는 반면에 수치해석은 소프트웨어 개발기간이 짧고 경비가 적게 들 뿐만 아니라 컴퓨터 그래픽스장치로 쉽게 유동의 가시화를 수행할 수 있는 잇점이 있다. 그러나 수치해석은 지배방정식을 차분화 시킨데 대한 이론해석과의 오차가 있다고 판단되므로 계산의 정확도를 검증할 필요가 있다.

본 연구에서는 원관 내벽에 핀이 축 방향으로 여러 개 부착되어 원관 내의 작동 유체와 원관 사이의 열전달이 촉진되는 경우의 유동해석과 열전달 해석을 수행하고자 한다. 본 연구의 결과는 열전달 촉진관 내부의 작동유체 속도분포, 열전달계수, 전단응력분포, 압력강하 및 손실수두 등의 특성을 고찰함으로써 열전달 촉진기술의 축적과 내측 환관의 기초 설계 자료에 응용 할 수 있다.

1.2 연구모델 및 연구방법

Fig.1은 원관 내부에 임의의 핀이 길이방향으로 부착된 경우에 길이방향의 유동단면을 보여주고 있으며 유동의 대칭성을 고려하였다.

- 1) 전남대학교 기계공학과 대학원
- 2) 전남대학교 기계공학과
- 3) 금오공과대학교 기계공학과

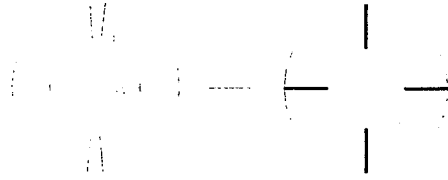


Fig. 1 Modeling

본 연구에서는 고전적인 Graetz problem[3]의 가정을 사용하여 문제를 모델링 하였다. 즉 원관 입구에서 유동은 완전 발달되고, 온도는 입구에서 균일한 온도가 원관 벽의 온도로 서서히 발달되는 층류 정상상태 비압축성 유동에 대해서 연구를 수행하였다. 운동량 방정식으로부터 속도를 구하고 속도분포를 에너지 방정식에 대입하면 수치적인 방법으로 온도장을 계산할 수 있다. 길이 방향으로 내부 환이 부착된 원관 내의 유동장을 이론적으로 해석하기 위하여 환의 두께가 매우 얇다고 가정하고 유동장을 단위원상으로 등각사상[6]을

하여 속도장을 구하였으며, 수치해석 방법으로는 지배방정식을 차분화시켜 Alternating Direction Implicit (ADI) 방법[8]을 사용하였다. 결과 비교를 위해 환의 개수를 2, 4, 8로 변화시키고 환의 길이를 0.2, 0.5, 0.7로 변화시키면서 속도장, 유량, 전단응력, 온도장등을 계산하였다.

2. 유동장 해석

2.1 이론해석

Navier-Stokes 방정식에서 정상상태, 비압축성, 층류라고 가정, 중력의 영향을 무시하고 z방향에 대한 단방향성 유동을 가정하면 z방향의 속도 u_z 에 대한 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} = 0 \quad (1)$$

식(1)을 무차원화하기 위하여 다음과 같이 무차원 변수를 도입하였다.

$$r^* = \frac{r}{r_0}, u^* = \frac{u_z}{u_{\max}}, u_{\max} = - r_0^2 \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} \quad (2)$$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} + 1 = 0 \quad (3)$$

기호를 간단히 하기 위해 무차원 기호 *를 생략 하기로 하자.

식(3)의 Poisson 방정식을 Laplace 방정식으로 만들어주기 위하여 $u = 1/4(1 - r^2) + w(r, \theta)$ 로 놓으면 $\nabla^2 w = 0$ 이고 경계조건은 벽에서는 $w = 0$ 이고, 환에서 $w = 1/4(r^2 - 1)$ 이다.

유동의 대칭성을 고려하면 $0 \leq \theta \leq 2\pi/N$ 인 영역만 고려하면 충분하다.(N은 fin의 개수)

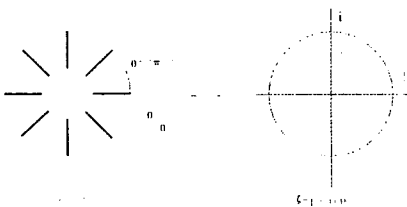


Fig. 2 Transform by conformal mapping

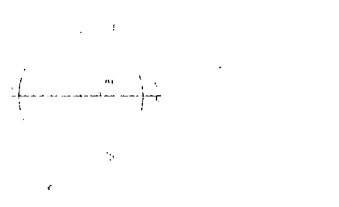


Fig. 3 Mapped plane for $\zeta=f(Z)$

Z평면에서 유동장을 ζ 평면으로 바꾸어주는 mapping function은 다음과 같다.



$$\zeta(z) = \frac{1}{b+1} (Z^N + Z^{-N} + b - 1 - \sqrt{(Z^N + Z^{-N} + 2b)(Z^N + Z^{-N} - 2)}), \quad (b = \frac{1}{2}(a^N + a^{-N})) \quad (4)$$

이 변환으로 원호BCD는 원의 표면에 사상되고 원호AB와 DE는 원판의 표면에 사상된다.

$Z = x + iy = re^{i\theta}$, $\zeta = \rho e^{i\beta}$ 이므로 Z 평면의 내부점은 ζ 평면에서 mapping function에 의해서 구할 수 있고 ζ 평면에서 ρ 와 β 는 다음과 같다.

$$\rho = \exp^{Re(\ln \zeta)}, \beta = Im(\ln \zeta) \quad (5)$$

$\mathcal{W}(\rho, \beta) = w(r(\rho, \beta), \theta(\rho, \beta))$ 로 두면 mapping이 conformal 하므로

Z 평면에서 $\nabla_{(r,\theta)}^2 w = 0$ 은 ζ 평면에서 $\nabla_{(\rho,\beta)}^2 W = 0$ 이 된다.

$$u(r, \theta) = w(r, \theta) - \frac{1}{4}(r^2 - 1) = \mathcal{W}(\rho, \beta) - \frac{1}{4}(r^2 - 1) \quad (6)$$

Fig.3 에서 ζ 평면에서의 경계조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(1, \beta) &= \frac{1}{4}(r^2 - 1) \quad \text{at} \quad \alpha_1 \leq \beta \leq 2\pi - \alpha_1 \\ \mathcal{W}(1, \beta) &= 0 \quad \text{at} \quad 0 \leq \beta \leq \alpha_1 \end{aligned} \quad (7)$$

ζ 평면의 단위 원주상에서 W 가 주어졌으므로 단위 원 내부에서의 Poisson's Integral을 이용[10]하여 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\rho, \beta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{w(1, \alpha)(1 - \rho^2)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\alpha - \beta)} d\alpha \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{\alpha_1}^{2\pi - \alpha_1} \frac{(r(\alpha)^2 - 1)(1 - \rho^2)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\alpha - \beta)} d\alpha \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 r, λ_1, α_1 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} r &= (\lambda_1 - \lambda_1 \cos \alpha - 1 - \sqrt{\lambda_1(1 - \cos \alpha)(\lambda_1 - 2 - \lambda_1 \cos \alpha)})^{-N} \\ \lambda_1 &= 1/4(a^N + a^{-N} + 2), \quad \alpha_1 = \cos^{-1}((\lambda_1 - 2)/\lambda_1) \quad (0 < \alpha_1 < \pi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{4}(1 - r^2) + w(r, \theta) \\ &= \frac{1}{4}(1 - r^2) + \mathcal{W}(\rho, \beta) \end{aligned} \quad (9)$$

식(9)에서 $\mathcal{W}(\rho, \beta)$ 를 구했으므로 (6)식으로부터 속도장 $u(r, \theta)$ 를 계산할 수 있다.

2.2 수치해석

지배방정식은 식(3)과 같고 경계조건은 다음과 같다.

$$u(1, \theta) = 0, \quad u(r, 0) = 0, \quad u(r, \frac{2\pi}{N}) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad \text{at} \quad \theta = 0 \quad 0 \leq r \leq a \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad \text{at} \quad \theta = \frac{2\pi}{N} \quad 0 \leq r \leq a \quad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \text{at} \quad r = 0 \quad 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{N} \quad (13)$$

식(3)을 중앙차분법을 이용하고 ADI방법을 사용하여 TDMA형태로 나타내면 다음과 같다.

r-sweep:

$$a u_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} + b u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + c u_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = d u_{i,j+1}^k + e u_{i,j-1}^k - 1 \quad (14)$$

θ -sweep:

$$a' u_{i,j-1}^{k+1} + b' u_{i,j}^{k+1} + c' u_{i,j+1}^{k+1} = d' u_{i+1,j}^{k+1/2} + e' u_{i-1,j}^{k+1/2} - 1 \quad (15)$$

식(14)에서 tridiagonal system을 계산함으로써 $k+1/2$ step에서 u 를 구할 수 있고 식(15)의 오른쪽 항에 의해 $k+1$ step에서 속도 u 를 계산할 수 있다.

여기서 계수 a, b, c, d, e 및 a', b', c', d', e' 는 다음과 같다.

r -sweep의 경우

$$a = \left(\frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{2i(\Delta r)^2} \right)$$

$$b = -2 \left(\frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{i^2(\Delta r)^2(\Delta \theta)^2} \right)$$

$$c = \left(\frac{1}{2i(\Delta r)^2} + \frac{1}{(\Delta r)^2} \right)$$

$$d = - \left(\frac{1}{i^2(\Delta r)^2(\Delta \theta)^2} \right)$$

$$e = - \left(\frac{1}{i^2(\Delta r)^2(\Delta \theta)^2} \right)$$

θ -sweep의 경우

$$a' = -e, \quad b' = b, \quad c' = -d, \quad e' = -a$$

$$d' = \left(\frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{2i(\Delta r)^2} \right)$$

3. 열전달 해석

3.1 수치해석

2장에서 구한 속도장을 이용하여 온도장을 구할 수 있다. 에너지방정식은 다음과 같다.

$$\rho c_p u_z \frac{\partial T}{\partial z} = k_f \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \quad (16)$$

무차원 수를 도입하여 식(16)을 다시 전개하면 다음과 같다.

$$z^* = \frac{z/r_0}{Pe} \quad Pe = \frac{2r_0 u_{max} \rho c_p}{k_f} \quad \phi = \frac{T_w - T}{T_w - T_0}$$

여기서 T_w 와 T_0 는 각각 원관 벽과 입구의 온도이다.

$$\frac{1}{2} u^* \frac{\partial \phi}{\partial z^*} = \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \phi}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) \quad (17)$$

기호를 간단히 하기 위해 무차원 기호*를 생략하기로 하자.

에너지방정식에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \quad \text{at} \quad \theta = 0, \frac{2\pi}{N} \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (18)$$

$$\phi(1, \theta) = 1 \quad 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{N} \quad (19)$$

식(18)은 symmetry 조건이며, 식(19)은 외부 벽에 대한 등온조건이다.

식(17)은 parabolic equation 형태이므로 ϕ 는 z 방향으로 진행됨에 따라 다르다.

그러므로 경계조건을 만족시키는 초기조건이 필요하며 초기조건은 다음과 같다.

$$\phi(r, \theta) = 1 \quad z = 0$$

식(17)에서 속도 u 는 운동량 방정식에서 구한 완전 발달된 속도를 이용하였으며, 운동량 방정식과 마찬가지로 ADI 방법을 이용하여 온도를 구할 수 있다.



4. 결과 및 고찰

4.1 속도분포, 유량

수치해석의 격자는 r 과 θ 방향으로 등간격(31×31)으로 하였으며 중심에서의 속도변화를 가지고 수렴성을 판단하였다. 즉 iteration때마다 속도 값을 check하였다.

Fig.4 a)는 원관 내에 원의 개수가 6개 원의 길이가 0.5인 경우에 이론 해와 수치 해의 등속도 값을 비교한 결과를 나타낸다. 그림에서 보듯이 점선은 수치해이고 실선은 이론해이다. 원과 벽 사이의 속도는 이론 해와 수치 해의 결과가 거의 일치 하지만, 원관 중심으로 올수록 수치 해의 값이 이론해로 구한 속도보다 다소 크게 나타나고 있다. 이유는 수치해석의 경우에 벽과 원의 영향이 원관 내부에 미치는 영향이 적으므로 기인된다. 이와 같은 오차는 격자를 더 작게 하거나 반복횟수를 늘림으로서 줄일 수 있다. 수치 해와 이론 해의 오차는 0.2-0.5%로 확인되었다. Fig.5는 원의 개수가 많아지고 원의 길이가 길어짐에 따라 원관 중심에서의 최고속도가 점점 원과 원 사이로 이동되고 있음을 보여준다. 원의 길이가 0.7일 때는 r 방향으로는 속도가 최소이고 θ 방향으로는 속도가 최대로 나타나는 일종의 saddle point가 나타났다. 원의 길이가 길어지면서 원관 중심의 속도가 원 사이로 옮겨지고 그 주위로 cell의 형상이 나타남을 확인 할 수 있다. Table.1은 원의 개수가 많아지고 원의 길이가 길어질수록 유량이 작아지며 원의 길이가 0일 때 정확히 Poiseuille flow의 유동과 같음을 확인할 수 있다.

4.2 전단응력 분포

Fig.4 b), c)는 원 끝에서 전단응력이 크게 나타났으며 벽면에서는 원과 원 중심에서 최대로 나타났다. 이론 해와 수치 해의 결과는 벽면에서는 거의 일치하였으나 원 끝으로 갈수록 오차가 심해졌다. 이는 원 끝의 singular point에서는 속도구배가 심하므로 이론 해에서는 전단응력이 급격히 커졌으나, 수치 해에서는 크게 변하지 않았다. 수치 해에서의 오차는 격자를 더 작게 나누어서 계산하면 오차가 줄어들 것이다. 그러나 계산시간이 많이 걸리므로 grid generation을 통해 속도의 변화가 심한 원 끝에서의 격자를 촘촘히 구성하면 된다.

4.4 온도분포

Fig.6은 Prandtl number가 큰 경우의 유체에 대해서 원관 입구에서의 유체의 온도가 하류로 갈수록 벽의 온도로 수렴하고 있다. 이는 원관 입구에서 속도가 Poiseuille flow 로 유입될 때 heat flux는 원관 입구에서의 하류 쪽으로 흐를 때 열 유입이 감소한다는 Graetz Problem의 해석과 일치함을 보여주고 있다.

5. 결론

이론해석과 수치해석의 결과를 비교하면 오차가 0.2~0.5%정도 이내였으며, 수치해석의 경우 원과 원 사이의 속도는 적은 iteration으로 이론해석의 결과에 근접했으나, 원관의 중심에서의 속도는 이론해석으로 구한 결과에 수렴하는데 상당히 많은 iteration이 필요하였다. 이론 해와 수치 해의 오차발생은 원과 벽의 영향이 원점부근의 값에 영향을 덜 미치는데 따른 계산시간의 오차라고 판단된다. 본 연구를 통해 수치해석의 타당성이 입증되었으므로 복잡한 형상의 유동 장이나 온도장 해석에 수치해석을 적용함으로써 보다 효율이 높은 열교환기 설계가 가능하다고 판단된다.

참고문헌

- [1] H. M. Soliman and A. Feingold, Analysis of Fully Developed Laminar Flow in Longitudinal Internally Finned Tube, Chem. Eng. J., vol. 14, 1977, pp.119-128
- [2] I. J. Kettner, Numerical Analysis of Heat Transfer to Laminar Flow in Internally Finned Tube, M.sc. thesis, Technion-Israel Institute of Technology, 1988
- [3] Frank M. White, Viscous Fluid Flow, 2nd Ed, McGraw-Hill Inc., 1991
- [4] Frank M. White, Fluid Mechanics, 2nd Ed., McGraw-Hill Inc., 1991

[5] I. G. Currie, Fundamental Mechanics of Fluids, 2nd Ed, McGraw-Hill Inc., 1993
 [6] Roland Shinzinger and Patricio A.A. Laura, Conformal Mapping :Methods and Applications, Elsevier Science Publishers B. V. , 1991
 [7] J. N. Reddy and D. K. Gartling, The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics, CRC Press. Inc, 1994
 [8] Klaus A. Hoffmann and Steve T. Chlang, Computational Fluid Dynamics For Engineers, A Publication of Engineering Education System, 1993
 [9] J. P. Holman, Heat Transfer, 7th. Ed, McGraw-Hill Inc., 1992
 [10] F. B. Hildebrand Advanced Calculus for Application, 7th Ed., Prentice-Hall, Inc, 1976

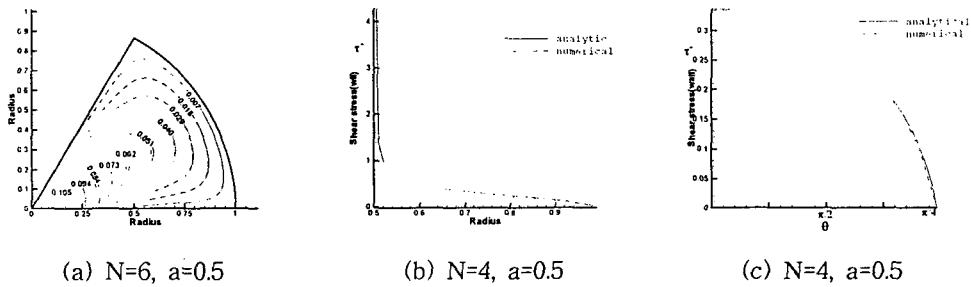


Fig.4 Comparison between analytic and numerical solution

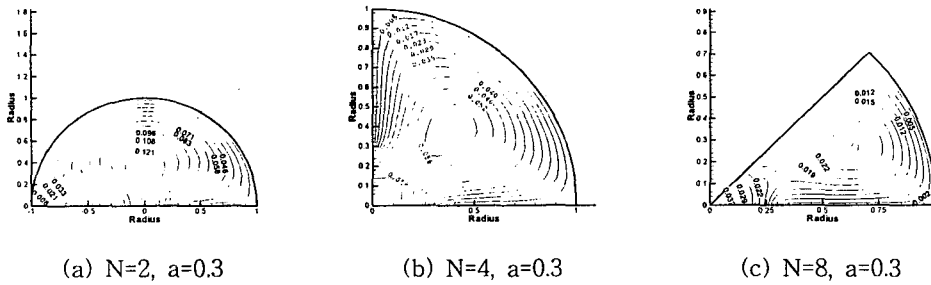


Fig. 5 Velocity contour

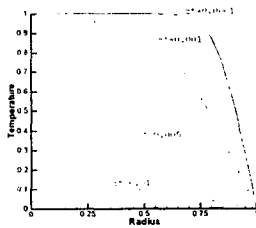


Fig. 6 Temperature distribution at z^* $N=8, a=0.8$

	a=0	a=0.2	a=0.4	a=0.6	a=0.8	Poiseulle flow
N=2	0.148	0.188	0.276	0.305	0.361	0.393
N=4	0.082	0.087	0.130	0.227	0.340	0.393
N=6	0.052	0.054	0.083	0.173	0.313	0.393
N=8	0.036	0.037	0.059	0.139	0.289	0.393
N=10	0.020	0.027	0.045	0.117	0.269	0.393

Table.1 Flow rate