



## 2 차원 캐비티 유동에서 다중 정상 해에 관한 연구

조 지룡, 홍 상표, 김 근오, 김 윤택

인제대학교 기계공학과

E-mail: [mechjrc@ijnc.inje.ac.kr](mailto:mechjrc@ijnc.inje.ac.kr)

### Multiple steady state solutions in a two dimensional cavity flow

Ji Ryong Cho, Sang Pyo Hong, Geun Oh Kim, Yun Taek Kim

In this study steady state solutions of cavity flows driven by two moving walls are studied. The north and east walls of the cavity are movable where as the remaining two walls are fixed in space. Numerical experiments for three different driving schemes for moving walls are done at two different Reynolds numbers of  $Re=40$  and  $400$ . The first scheme is to accelerate north and east walls simultaneously. In the second one, the north wall is started first and the east wall is accelerated later. In the third one the east wall starts first. It is usually expected that all these three cases yield the same steady state solution after sufficiently long time. However, present numerical experiments show that such a usual belief is valid *only* when the Reynolds number is low enough ( $Re=40$ ). At higher Reynolds number ( $Re=400$ ), the flow develops to three different steady states depending on the history of the boundary condition change.

**Keywords:** 이력효과 (History Effect), 다중정상해 (Multiple Steady State Solution), 캐비티 유동(Cavity Flow), 순수 벡터 포텐셜 방법 (Pure Vector Potential Method), 1-방정식 방법 (One Equation Method)

#### 1. 서론

본 연구에서는 유동의 이력효과(History Effect)가 정상상태에서의 유동형태에 어떤 영향을 미치는지를 수치실험을 통하여 확인하고자 한다. 일

반적인 예견으로서는 유동조건에 의하여 주어지는 거대 시간척도 보다도 충분히 긴 시간이 경과하면 유동에 가해진 이력의 효과가 사라지고 주어진 경계조건에 따라 결정되는 오직 하나의 정상상태 만이 존재할 것으로 추정이 되나, 이

에 대하여는 아직 이렇다 할 연구결과가 보고되지 않고 있다.

본 연구에서는 2차원 캐비티 유동에서 시간에 따른 경계조건 변화로 유발이 되는 이력효과를 살펴본다. 급가속 되는 고체 벽에 의하여 구동이 되는 2차원 정방형 캐비티 내부의 흐름은 초기조건과 경계조건이 잘 정의되어지는데 반하여 유동은 매우 복잡한 소용돌이 세포를 가지는 특성으로 인하여 수치해석의 benchmarking에 널리 이용이 되고 있다. 다만 실험적으로 이러한 유동상황을 구현하기는 매우 어렵다. 이제까지의 캐비티 유동에 관한 연구들은 북쪽 벽만의 이동에 따른 효과를 보는데 그쳤지만, 본 연구에서는 북쪽과 동쪽의 두 벽이 움직이는 구조이다 (Fig. 1). 이로부터 다음과 같이 세 가지의 경계조건 변화를 생각할 수 있다. 첫 번째 경우(Case A)는 두 벽이 동시에 움직여서 점차적으로 정상상태에 도달하는 경우이고, 두 번째(Case B)는 북쪽 벽이 먼저 가속이 되어 정상상태에 도달한 이후에 동쪽 벽을 가속하여 재차 정상상태에 도달한다. 마지막 경우(Case C)는 먼저 동쪽 벽이 가속되고 나중에 북쪽 벽이 가속된다. 즉, 세 경우에 있어서 유동은 초기 단계에서는 서로 다른 경계조건 부여 방법에 따라 서로 다른 유동의 형성과정 (혹은 이력)을 거치게 되며, 시간이 충분히 경과한 후에는 세 경우 모두 동일한 경계조건을 가지게 된다. 이러한 세가지 유동전개 상황에 대한 일반적 인식은 시간이 충분히 흘러 정상상태에 도달하면 모두 동일한 유동형태를 나타낼 것으로 인식을 하지만 이에 대한 확증은 존재하지 않는다. 본 연구는 수치실험을 통하여 이러한 의문점을 규명하기 위한 것

이다.

## 2. 유동장의 정식화

### 2.1 와도-벡터 포텐셜 방정식

본 연구에서는 비압축성, 비정상 유체유동에 관심이 있으며, Navier-Stokes 방정식은 Cartesian 좌표계에서 와도  $\omega_i$ 와 벡터 포텐셜  $\psi_i$ 의 방정식으로 무차원화 하여 쓰여질 수 있다 [1].

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_j \partial x_j} = -\omega_i \quad (2)$$

여기서  $\text{Re}$ 는 유동의 Reynolds 수를 나타내며, 와도와 벡터 포텐셜은 속도벡터  $u_i$ 를 이용하여 다음과 정의되었다.

$$\omega_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (3a)$$

$$u_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \quad (3b)$$

윗 식 (1), (2)와 (3b)를 이용하면 임의의 3차원 유동장을 해석할 수 있다. 3차원 유동의 경우에는 각기 세개의 와도 및 벡터 유량함수 성분이 나타난다. 따라서 많은 전산유체역학 관련 참고 문헌에는 6개의 방정식을 풀어야 하는 것으로 기술을 하고 있으나[5,6], 실제에 있어서는 각기 2개의 성분들만 즉 총 네개의 미분방정식만 수치해석을 하여도 유동장을 묘사하는 것이 가능하다. 본 연구는 2차원 비정상 유동현상에 국한된 문제만 취급을 하므로, 이 경우 상기의 식들은 잘 알려진 와도-유량함수 방법으로 귀결이

된다. 2차원의 경우는 와도와 벡터 포텐셜이 다음과 같이 표현이 되고

$$\begin{aligned} \omega_x = \omega_y = 0 \quad \omega_z = \omega \\ \psi_x = \psi_y = 0 \quad \psi_z = \psi \end{aligned} \quad (4)$$

속도성분은

$$u = \partial\psi / \partial y \quad v = -\partial\psi / \partial x \quad (5)$$

로 주어진다. 이를 위 식(1)과 (2)에 적용을 하면

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta\omega - \varepsilon_{ij3} \frac{\partial\omega}{\partial x_i} \frac{\partial\psi}{\partial x_j} \quad (6)$$

$$\Delta\psi = -\omega \quad (7)$$

여기서  $\Delta$ 는 Laplace 연산자이다. 이 두식에서 와도를 소거하면 2차원 비정상 유동에 대한 순수 벡터 포텐셜 방정식이 얻어진다.

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta(\Delta\psi) - \varepsilon_{ij3} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_i} \frac{\partial\psi}{\partial x_j} \quad (8)$$

단지 이 하나의 식만 수치해석하면 유동장이 완벽히 기술이 되므로, 기존의 원시변수법들에 비하여 방정식의 수가 1/3에 불과하며, 압력과 관련된 어떠한 근사과정도 개입되지 않았다. 또한 기존의 와도-유량함수법에 비하여 와도에 대한 경계조건을 필요로 하지 않는 특별한 장점이 있다. 단 기존의 방정식들과는 달리 2차의 방정식이 아니라 벡터 포텐셜에 대한 4차의 미분방정식으로 주어진다.

### 2.2 좌표변환과 유한차분식

유동의 경계가 임의의 형태로 주어지는 보다 일반적인 상황하에서도 앞으로 전개할 수치적 알고리즘을 적용시키기 위하여 앞 절에서 제시한 방정식들을 다음과 같이 물리적 공간  $(x, y)$ 에서 계산공간  $(\xi, \eta)$ 으로 좌표변환을 수행한다.

$$\frac{\partial\bullet}{\partial x_j} = \frac{g_{jm}}{J} \frac{\partial\bullet}{\partial \xi_m} \quad (9a)$$

$$J = g_{x\xi} g_{y\eta} - g_{x\eta} g_{y\xi} \quad (9b)$$

$$g_{x\xi} = \partial y / \partial \eta \quad g_{x\eta} = -\partial y / \partial \xi \quad (9c)$$

$$g_{y\xi} = -\partial x / \partial \eta \quad g_{y\eta} = \partial x / \partial \xi$$

이 좌표변환 관계를 식(8)에 적용하면 계산공간에서의 2차원 벡터 포텐셜에 대한 수송량 방정식은 아래와 같이 주어진다.

$$\frac{\partial\tilde{\Delta}\psi}{\partial t} = G(\psi) \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} G(\psi) = \varepsilon_{ij3} \frac{g_{im} g_{jn}}{J} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial\psi}{\partial \xi_n} \\ + \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{h^{mn}}{\text{Re}} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial \xi_n} \right) \end{aligned} \quad (10b)$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{J} \tilde{\Delta}\psi = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( h^{mn} \frac{\partial\psi}{\partial \xi_n} \right) \quad (11)$$

$$h^{mn} = g_{jm} g_{jn} / J \quad (12)$$

식 (10a-b)에 대하여 여러가지의 차별화 식을 고안 할 수 있겠으나, 본 연구에서는 시간에 대해서는 Crank-Nicolson 방법을 적용하고, 공간좌표에 대해서는 중심차분을 취하여, 시공간에 대하여 모두 2차의 정확도를 가지도록 하였다.

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}\psi_D^{n+1} = \delta t (G(\psi^{n+1}) + G(\psi^n)) / 2 \\ + \tilde{\Delta}\psi^n - \tilde{\Delta}\psi_{OD}^{n+1} \end{aligned} \quad (13)$$

여기서  $\delta t$ 는 적분 시간간격을, 상첨자  $n$ 은 적분 시점을 나타낸다. 이 식의 수치해를 구하기 위하여  $\tilde{\Delta}\psi^{n+1}$ 의 대각선 성분인  $\tilde{\Delta}\psi_D^{n+1}$  만으로 시스템 매트릭스를 구성하며, 비대각선 성분인  $\tilde{\Delta}\psi_{OD}^{n+1}$ 과 플릭스항  $G(\psi^{n+1})$ 은 걸보기 원천항

으로 처리를 하고, 주어진 시점에서 수렴된 해를 구하기 위하여 하부 반복계산 (Sub-iteration) 을 수행한다.

$$a_{i,j} \psi_{i,j}^{n+1,k+1} - a_{i+1,j} \psi_{i+1,j}^{n+1,k+1} - a_{i-1,j} \psi_{i-1,j}^{n+1,k+1} - a_{i,j+1} \psi_{i,j+1}^{n+1,k+1} - a_{i,j-1} \psi_{i,j-1}^{n+1,k+1} = -H_{i,j}^k \quad (14)$$

for  $2 \leq i \leq NI - 1$  and  $2 \leq j \leq NJ - 1$

여기서 계수들은 다음과 같이 표시되고

$$a_{i+1,j} = \left( h_{i+1,j}^{\xi\xi} + h_{i,j}^{\xi\xi} \right) / 2$$

$$a_{i-1,j} = \left( h_{i-1,j}^{\xi\xi} + h_{i,j}^{\xi\xi} \right) / 2 \quad (15a)$$

$$a_{i,j+1} = \left( h_{i,j+1}^{\eta\eta} + h_{i,j}^{\eta\eta} \right) / 2$$

$$a_{i,j-1} = \left( h_{i,j-1}^{\eta\eta} + h_{i,j}^{\eta\eta} \right) / 2$$

$$a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1} \quad (15b)$$

$$H_{i,j}^k = \frac{\delta t}{2} (G_{i,j}^{n+1,k} + G_{i,j}^n) + \tilde{\Delta}_{i,j} \psi^n - \tilde{\Delta}_{i,j} \psi_{OD}^{n+1,k} \quad (15c)$$

$k$  는 하부 반복계산 횟수를 나타낸다. 식 (14)는 TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm)를  $\xi$  방향과  $\eta$  방향으로 교차로 적용하여 해를 구한다. 충분히 수렴된 해가 얻어지면 다음 시간 단계로 진행을 하여 비정상유동에 대한 해를 구하는 과정을 반복한다. 이 과정에서 속도 성분은 필요한 시점에서만 다음과 같이 구하면 된다.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{g_{ym}}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \quad (16a)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{g_{xm}}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \quad (16b)$$

### 2.3 경계조건

식 (15)를 풀기 위해서는 경계면에서의 벡터 포텐셜  $\psi$  와 플릭스 항에 포함이 되는  $\Delta\psi$  의 경계면에서의 값을 부여하여야 한다. 이차원 유

동의 경우  $\psi$  값은 손쉽게 구할 수 있다. 반면  $\Delta\psi$  는 유동 경계면에서

$$J\Delta\psi = h^{\xi\xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + h^{\eta\eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + 2h^{\xi\eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \left( \frac{\partial h^{\xi\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial h^{\xi\eta}}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \left( \frac{\partial h^{\eta\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial h^{\xi\eta}}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad (17)$$

로 주어진다. 경계면에서의 벡터 포텐셜의 1 차 미분항은 물리적 속도벡터 성분 ( $u, v$ ) 과 계산공간에서의 속도성분 ( $u_\xi, u_\eta$ ) 관계를 이용하여 결정한다. 즉, 식 (16)에서

$$u_\xi \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = g_{x\xi} u + g_{y\xi} v \quad (18a)$$

$$u_\eta \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = g_{x\eta} u + g_{y\eta} v \quad (18b)$$

이 관계는 또한 2 차의 교차미분  $\partial^2 \psi / \partial \xi \partial \eta$  의 평가에도 적용이 된다. 나머지 2 차 미분항들은 경계면을 따라서는 중심차분법으로, 경계면에 수직인 방향은 편방향 차분(One-sided difference) 을 하되 공간좌표 격자간격에 대하여 대하여 곱히 2 차의 정확도를 가지도록 차분화를 하였다.

### 3. 수치실험 결과 및 토의

수치해석은 정방형 용덩이의 폭, 벽면의 이동속도, 그리고 유체의 점성에 의하여 주어지는 Reynolds 가 40 인 경우와 400 인 경우에 대하여 이루어졌다. 계산에 사용된 격자계는 x 및 y 방향으로 각기 41 개의 등간격 격자계를 사용하였다. 이 문제의 경우 경계조건은 매우 단순하여 모든 벽면에서  $\psi = 0$ ,  $u = v = 0$  이고, 다만 북쪽 벽과 동쪽 벽의 속도만 상황에 따라

균일한 속도를 가진다. 초기 상태에서는 유체가 정지 상태에 있다고 가정하였다. 적분 시간 간격은 다음과 같이 Courant 수가 1 이 되도록 하였다:  $C \equiv U_{REF} \delta t / \delta x = 1$

식 (14)를 계산할 때 안정된 계산과 함께 수렴속도를 증진시키기 위하여 SOR 을 적용하였는데, 현재의 시스템 매트릭스 구조에서는 많은 수치실험 결과 Courant 수가 1 이고 약간의 over relaxation 을 적용할 때 ( $\beta=1.03-1.11$ ) 가장 효율적인 계산이 수행되었다. 하루 반복계산에서 수렴의 판정은  $|\psi^{n+1,k+1} - \psi^{n+1,k}|_{\max} < 10^{-5}$  로 하였으며 이때 질량의 불평형의 최대치  $|\partial u_i / \partial x_i|_{\max}$  는 전체 계산과정에서  $0.3 \times 10^{-5}$  보다도 작았다.

Fig. 2 에 Reynolds 수가 40 일때 Case B (RE40B) 와 Case C (RE40C)의 두 경우에 대하여 시간의 흐름에 따른 유선의 변동상황을  $t=100$  이후의 여러 시점에서 비교를 하였다. 그림에서 실선은 양의 유량함수 값을, 점선은 음의 유량함수 값을 나타낸다. 이 그림들에서는 캐비티의 두 꼭지점  $(x,y)=(0,0)$ 과  $(1,1)$ 을 잇는 선을 경계로 하여 RE40B 와 RE40C 의 두 경우가 mirror image 를 형성하고 있으며, 시간이 충분히 흐르면 두 경우가 동일한 대칭적인 유동패턴을 나타낸다. 이는 통상적으로 북쪽 벽과 동쪽 벽이 동시에 가속되는 경우(RE40A)에 예견되는 정상 상태에서의 대칭적 유동패턴과 완전히 일치하는 결과이다. 즉 Reynolds 수가 낮은 경우에는 있어서는 유동의 이력과 상관없이 하나의 동일한 정상상태를 가짐이 확인이 된다.

그러나 Reynolds 수를 높이면 ( $Re=400$ ) 이러한 통념은 더 이상 옳지 않다는 사실을 본 연구

결과는 확인시켜준다. Fig. 3 은 RE400B 및 RE400C 의 두 경우에 시간에 따른 유동형태의 변화를 나타낸다. 역시 45도 대각선에 대하여 서로 mirror image 를 형성하면서 유동이 전개되는 점은  $Re=40$  인 경우와 동일하지만, 놀랍게도 시간이 충분히 흐르더라도  $Re=40$  의 경우에서와 같이 대칭적인 유동장이 형성되지 않는다. 즉, 북쪽 벽이 먼저 가속되는 RE400B 의 경우는 음의 유량함수 값을 가지는 유동세포 영역의 기하학적 크기가 양의 값을 가지는 영역보다도 훨씬 크며, RE400C 의 경우는 이와 반대의 특징을 시간이 지나더라도 그대로 유지한다. 즉 경계 조건의 부여 방법차이에 따른 유동의 이력이 시간이 충분히 지나더라도 해소가 되지 않을 나타낸다. Fig. 4 에 정상해를 두 Reynolds 수에 대하여 다시 정리를 하였다. 두 벽이 동시에 가속이 되는 Case A 에 대해서는 Reynolds 수와 상관없이 항상 대칭적인 유동 구조가 유지된다. 저 Reynolds 수의 유동에서는 유동전개 과정에서 부여되는 이력의 효과가 시간이 지남에 따라 소멸이 되고 최종적으로 부과되는 경계조건에 따라 오직 하나의 정상 상태 유동형태만을 나타낸다. 그러나 Reynolds 수가 충분히 크면 비록 최종적인 경계조건이 동일하더라도 유동의 전개 과정 도중의 이력이 완전히 소멸되지 않고 이후의 유동 전개 과정에 지속적으로 영향을 미쳐서 궁극적으로는 정상상태에서 다양한 유동 형태를 만들어 낸다. 큰 Reynolds 수에서의 이러한 다중 해를 만들어내는 이유를 현 연구 단계에서 구체적으로 설명하기는 어렵다. 다만 유동 방정식-Navier-Stokes 방정식-의 대류항이 가지는 비선형성에 기인하는 것으로 추정이 된다.

Reynolds 수에 따른 유동형태 전개과정의 차이는 항력의 그림에서도 관찰이 된다. Case B 와 Case C 의 두 경우에 북쪽 벽과 동쪽 벽의 역할을 맞바꾸면 완전히 동일한 시간에 따른 항력의 변화를 보인다. Reynolds 수가 40 인 경우는 두 벽의 항력이 시간이 지남에 따라 동일한 값을 가지게 됨에 비하여, Reynolds 수가 400 인 경우는 특이한 변화가  $(t-100)^{-1/2} = 0.5$  전후에서 관찰이 되고 이후에는 일정한 항력의 차이가 유지됨을 볼 수 있다.

#### 4. 요약

본 연구에서는 2 차원 캐비티 유동에서 경계조건 부여 방법의 차이에 따른 유체유동의 이력이 최종적인 정상상태에 미치는 효과를 수치실험을 통하여 관찰하였다. 그 결과 유동의 Reynolds 수가 작은 경우는 유동장이 가지는 이력이 시간의 경과와 함께 소멸하여 하나의 정상유동 상태를

를 가지는데 반하여, 큰 Reynolds 수에서는 유동장 이력이 소멸하지 않고 유지됨으로 인하여 다수의 정상유동 형태가 나타남이 확인이 되었다. 엄밀한 이론적 해석은 현재 이루어지지 않았으나 유체 운동량의 증가에 따라 Navier-Stokes 방정식의 비선형성이 영향을 미치고 있다고 여겨진다.

#### 후 기

본 연구는 1999 년도 인제대학교 기계공학과 대학원 전산유체공학 강의 과정의 일부로 수행이 되었다.

#### 참고문헌

- [1] 조지룡, "2 차원 비정상유동 해석을 위한 1-방정식 방법", 한국전산유체공학회 춘계학술대회 논문집, PP. 113-121, 1999 년 5 월, 대전.

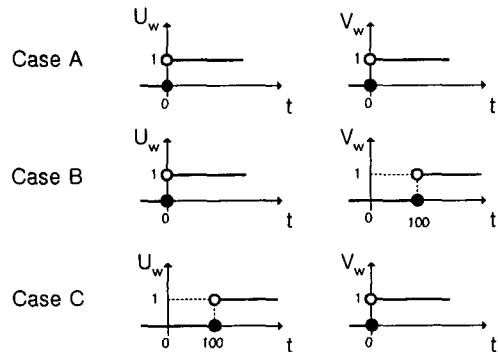
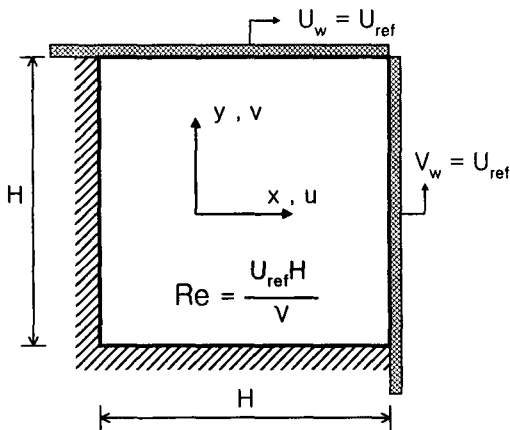


Fig.1 Configuration of the cavity

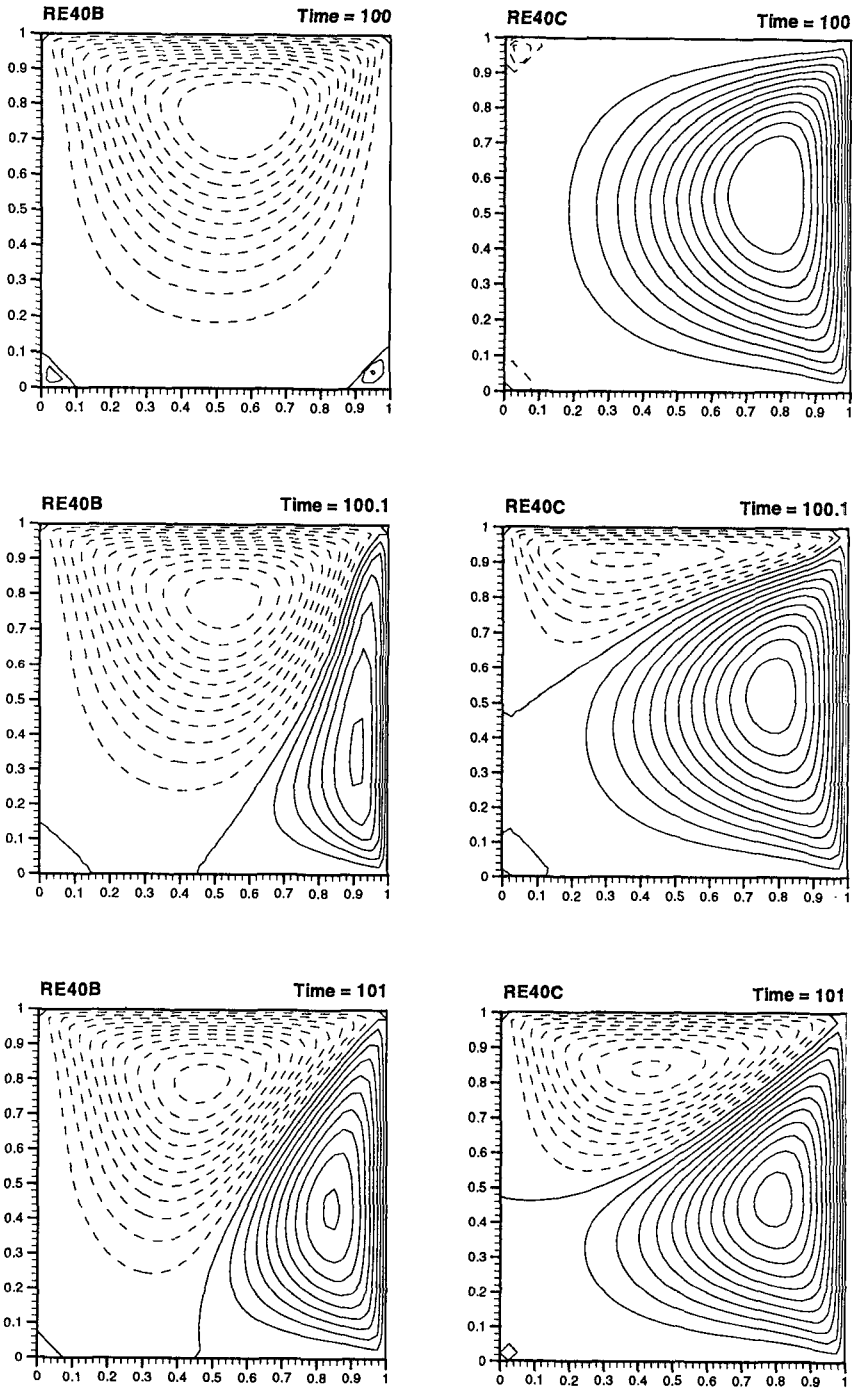


Fig. 2 (continued)

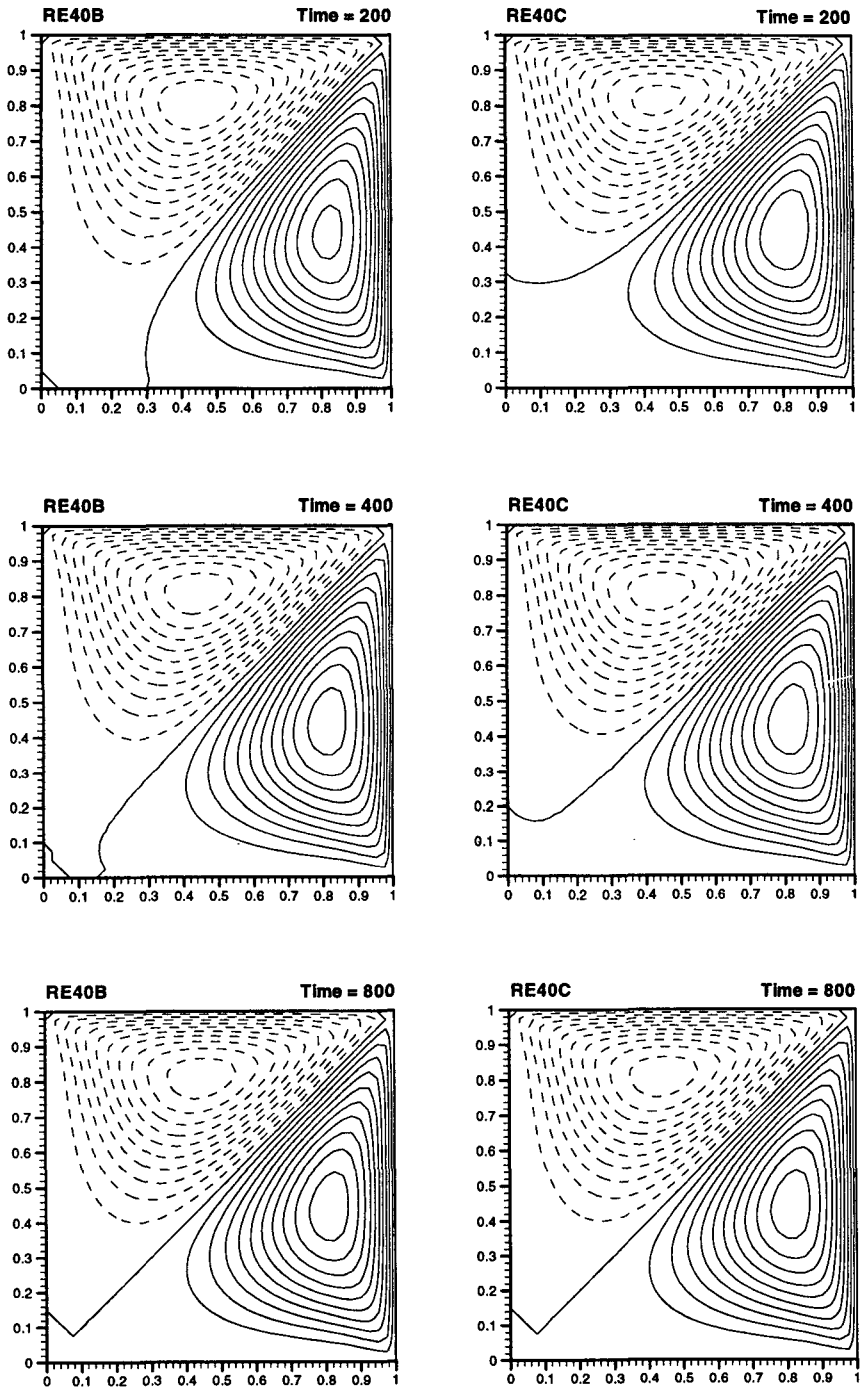


Fig. 2 Development of flow patterns at  $Re = 40$ .



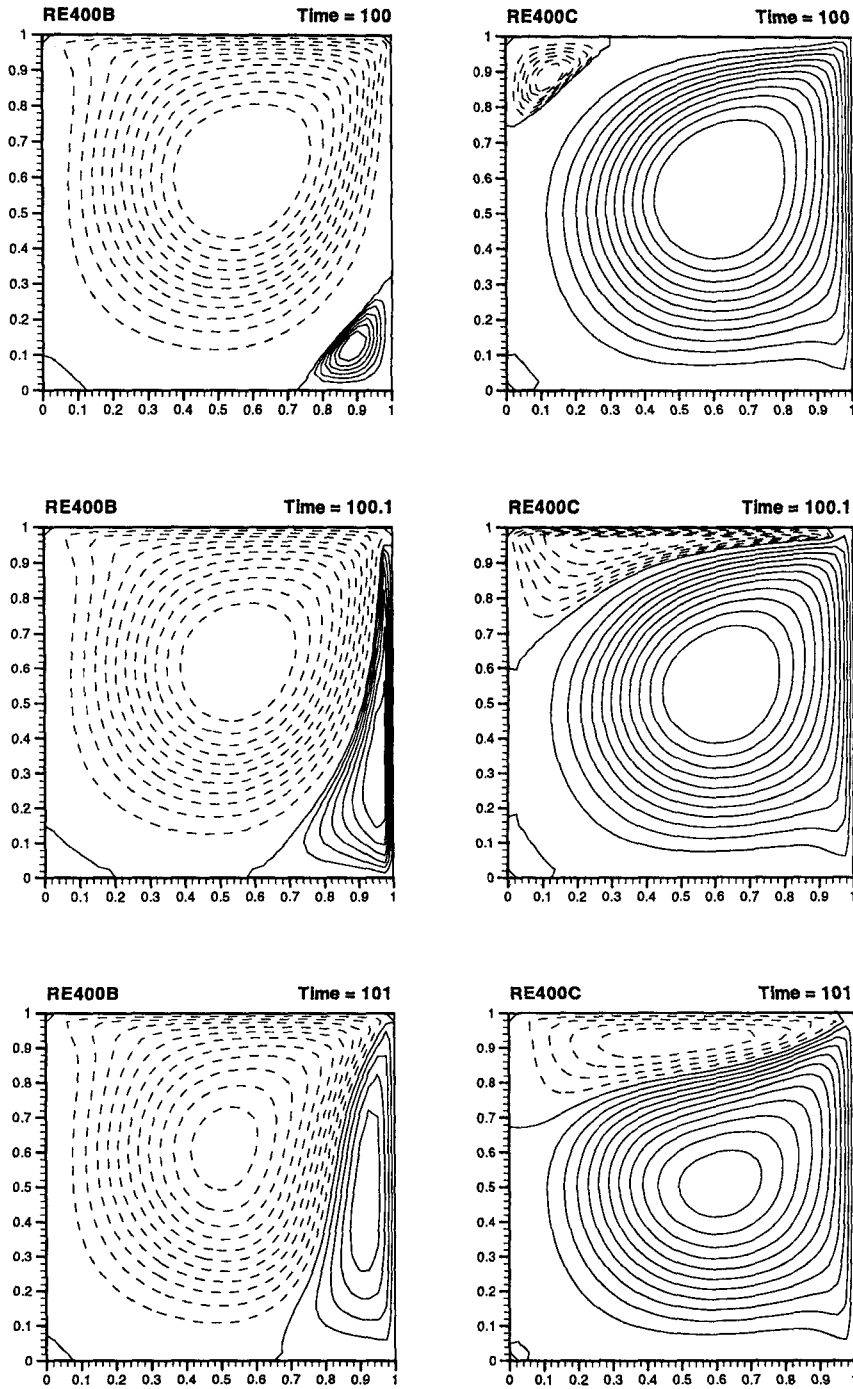


Fig. 3 (continued)

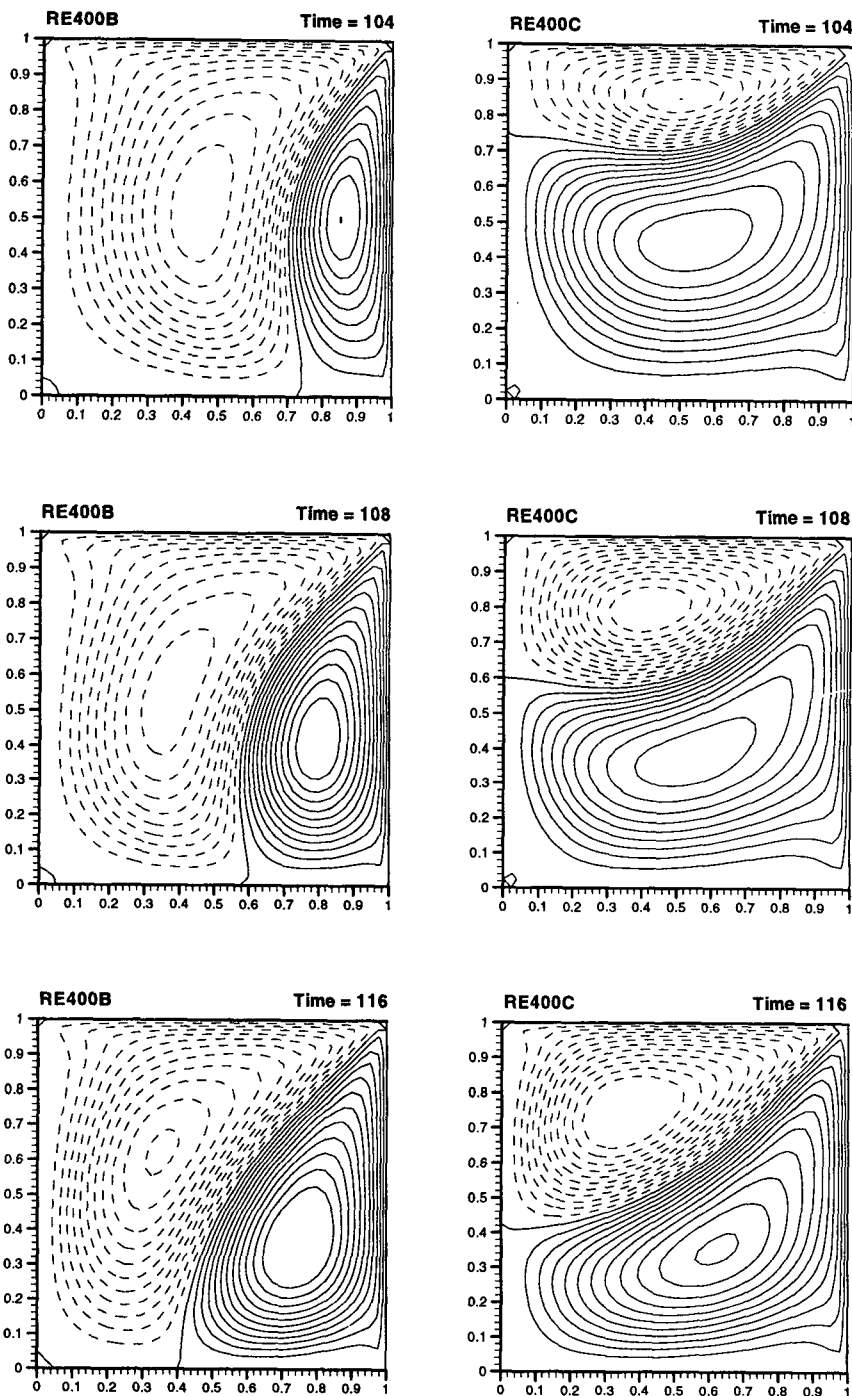


Fig. 3 Development of flow patterns at  $Re = 400$ .

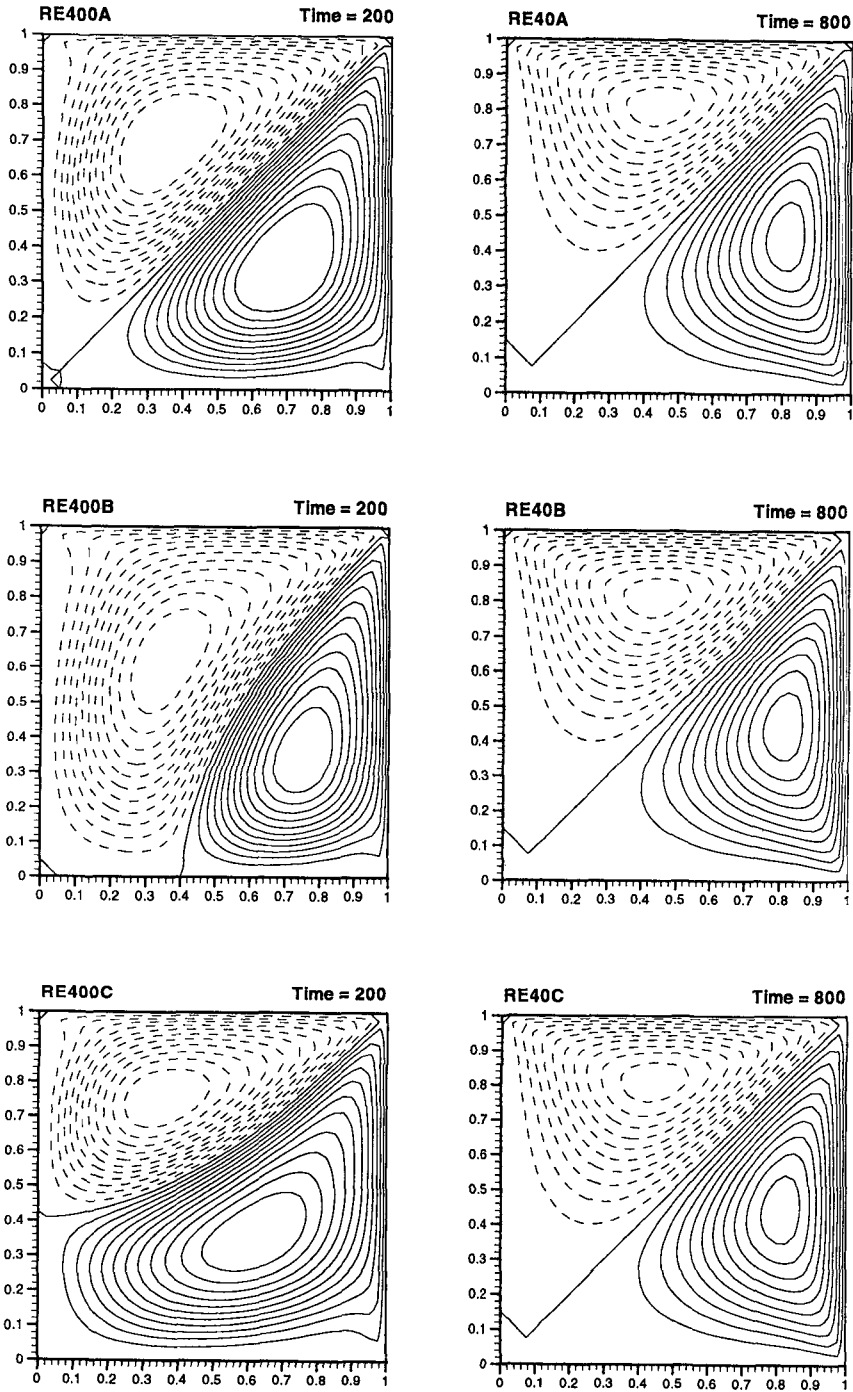


Fig. 4 Comparison of steady state solutions at Re = 40 and 400.

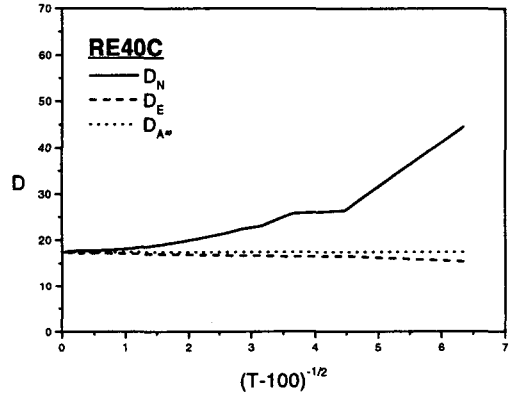
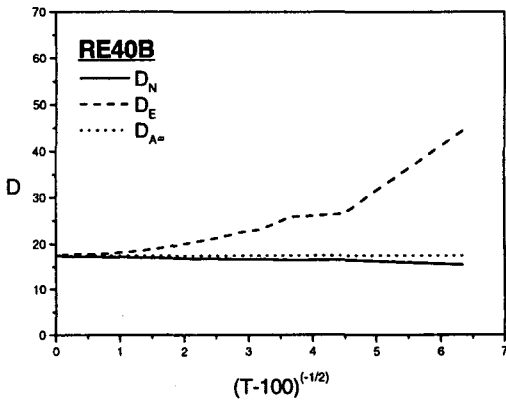
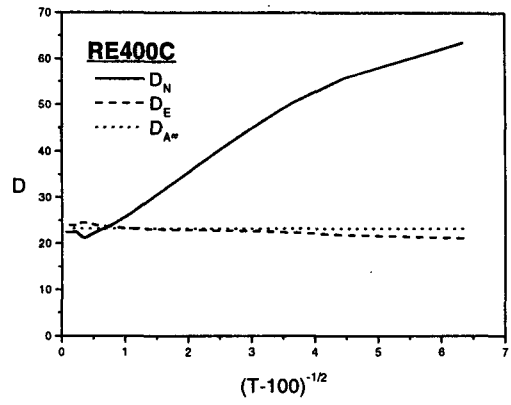
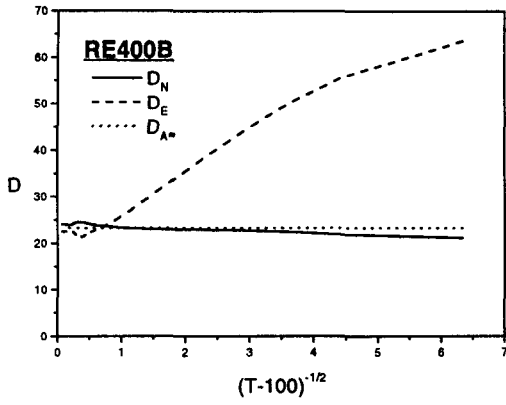


Fig. 5 Drag force vs. time at Re = 40 and 400.