



다양한 근사인수분해 알고리즘을 이용하여 압축성 유동장의 수렴성 및 유용성에 대한 연구

A Numerical Study on Efficiency and Convergence for Various Implicit Approximate Factorization Algorithms in Compressible Flow Field.

권창오¹⁾, 송동주²⁾

ABSTRACT

Convergence characteristics and efficiency of three implicit approximate factorization schemes(ADI, DDADI and MAF) are examined using 2-Dimensional compressible upwind Navier-Stokes code. Second-order CSCM(Conservative Supra Characteristic Method) upwind flux difference splitting method with Fromm scheme is used for the right-hand side residual evaluation, while generally first-order upwind differencing is used for the implicit operator on the left-hand side. Convergence studies are performed using an example of the flow past a NACA0012 airfoil at steady transonic flow condition, i. e. Mach number 0.8 at 1.25 ° angle of attack. The results were compared with other computational results in order to validate the current numerical analysis. The results from the implicit AF algorithms were compared well in low surface with the other computational results; however, not well in upper surface. It might be due to lack of the grid around the shock position. Because the algorithm minimizes the errors of the approximate decomposition, the improved convergence rate with MAF were observed.

1. INTRODUCTION

유체의 운동을 지배하는 비선형 방정식을 컴퓨터를 이용하여 수치적으로 해석하는 전산유체역학이 물리적인 현상을 모사 하는데 유용한 해석 수단으로 널리 사용되고 있다. 1980년대 이후 현재까지 급격한 컴퓨터 하드웨어의 발달과 수치 해석적 알고리즘의 발달로 복잡한 유동 영역에 대하여서도 완전 Navier-Stokes 접근 방법을 가능하게 하고 있다. 그러나 현재까지 개발된 고성능의 슈퍼 컴퓨터의 성능에도 불구하고 항공기와 같은 복잡한 형상의 3차원 물체에 대한 Navier-Stokes 방정식의 해석은 많은 시간이 소요된다. 최근에 들어 이러한 문제점을 해결하기 위하여 계산시간의 단축, 수렴을 가속시키는 방법에 대해 활발한 연구가 진행되고 있는 실정이다.

Euler나 Navier-Stokes 방정식과 같은 시간에 대하여 비선형 쌍곡선형 계는 일반적으로 초기 조건으로부터 시간을 전진시켜 나감으로써 정상해를 얻는다. 1976년 Stager에 의해 개발된 음해법(implicit method) 이후로 강인하고 정밀도가 높은 다양한 공간 차분 음해법들이 개발 되어 왔다. 음해적인 근사인수분해방법은 Beam-Warming의 ADI(Alternating Directional Implicit) 방법으로부터 발전되어 Euler 방정식의 자코비안 행렬이 가지는 국소상사변환을 이용해 내재적인 연산자를 대각화 함으로 2차원의 경우 4개의 스칼라 삼각 대각행렬을 계산함으로써 시간전진을 하는 DADI(Diagonalized ADI) 방법[1], DDADI(Diagonally Dominant Alternating Direction Implicit)가 있다.

DDADI 방법은 Lombard[2], Douglas & Gunn[10] 등에 의해 개발 되었으며, CSCM (Conservative-Super-Characteristic method) 풍상차분법을 일반적인 근사인수분해에 의한 해법과 더불어 실질적으로 양해적(Explicit)인 음해적 근사인수분해 방법을 개발했다. 최근에 들어 이러한 음해법들이 MacCormack[3][4] 등에 의해 다시 연구되고 있으며, Pulliam[1] 등에 의해 다양한 형태의 DADI 방법에 적용되었다[5].

본 연구에서 근사인수 분해 방법중 일반적인 ADI 방법과 DDADI 방법이 가지는 수렴 특성을 비교해 보고 특정한 물리적인 현상에서 CFL 변화에 대해 비교해 보고자 한다. 특히 근사인수분해 과정 중 분해 에러가 가지는 수렴 특성을 알아보기 위하여 수정된 근사인수분해 방법(MAF)을 이용하여 천음속 영역에서 가지는 수렴 특성 및 가속화 방법에 대해서 연구해 보고자 한다.

1) 영남대학교 대학원, 712-749 경북 경산시 대동 214-1

2) 영남대학교 기계공학부

2. NUMERICAL ANALYSIS

2. 1. Governing Equations

본 연구에 사용된 유동장 해석 코드는 CSCM Upwind Navier-Stokes 방법으로 여러 연구를 통하여 검증된 수치기법이다[2][6][7]. 먼저 지배 방정식을 살펴보면 축대칭, 압축성, 완전 기체, 점성 유동장을 지배하는 방정식은 일반곡면 좌표계에서 다음과 같이 벡터 보존 형태로 나타낼 수 있다.

$$\frac{1}{J} \frac{\partial q}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_x}{J} f + \frac{\xi_y}{J} yg \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_x}{J} f + \frac{\eta_y}{J} yg \right) = \frac{1}{J} \delta_\xi q + \Delta_\xi F + \Delta_\eta G = \Delta_\xi F_v + \Delta_\eta G_v \quad (1)$$

여기서 q는 보존 변수, f와 g는 비점성 플럭스, f_v, g_v는 점성 플럭스로 다음과 같은 원시변수로 이루어져 있다.

$$q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \varepsilon \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(\varepsilon + p) \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ v(\varepsilon + p) \end{bmatrix}, f_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{xx} \\ \tau_{yx} \\ u\sigma_{xx} + v\tau_{yx} + \kappa T_x \end{bmatrix}, g_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ u\tau_{xy} + v\sigma_{yy} + \kappa T_y \end{bmatrix} \quad (2) \quad \text{CSCM}$$

Upwind 방법에 있어서 Δ_ξF는 다음과 같이 여러 형태로 쓰일 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta_\xi F &= \bar{A} \partial_\xi q = \overline{MT\Lambda T^{-1}M^{-1}} \partial_\xi q \\ &= \overline{MT\Lambda T^{-1}} \partial_\xi \tilde{q} = \overline{MA'} \partial_\xi \tilde{q} \quad (\bar{A}' = \overline{T\Lambda T^{-1}T}) \\ &= \overline{MT\Lambda} \partial_\xi \tilde{\tilde{q}} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, \tilde{q} = 원시변수(primitive variables)

$\tilde{\tilde{q}}$ = 특성변수(characteristic variable)

보존변수 q와 원시변수 \tilde{q} 그리고 특성변수 $\tilde{\tilde{q}}$ 는 다음과 같은 연관을 갖는다.

$$\partial \tilde{q} = \overline{M^{-1}} \partial q \quad \partial \tilde{\tilde{q}} = \overline{T^{-1}} \partial \tilde{q} \quad (4)$$

M행렬은 원시변수 \tilde{q} 를 보존변수 $\tilde{\tilde{q}}$ 로 변환시켜 주는 행렬이며 $\overline{T^{-1}}$ 행렬은 원시변수를 특성변수로 바꿔주는 행렬이며 밀도와 압력 그리고 마하수를 대수(logarithm) 차분형태로 바꿔 주는 자연 scaling을 사용한다.

위의 식(3)를 이용하여 $\overline{A'} \Delta \tilde{q}$ 를 비점성 플럭스인 Δ_ξF의 값으로부터 구하려면 다음과 같은 방정식을 풀어야 한다.

$$\Delta_\xi F = \overline{MA'} \Delta \tilde{q} \quad \overline{A'} \Delta \tilde{q} = \overline{M^{-1}} \Delta_\xi F = \tilde{M}^{-1} \Delta_\xi q \quad (5)$$

위 식 (5)로부터 \tilde{M}^{-1} 을 구하면 비점성 플럭스항을 알고 있는 변수로 표시할 수 있다.

대각행렬 진리함수를 사용하여 Δ_ξF는 다음과 같이 구할 수 있다. 고유치의 부호에 따라 Δ_ξF는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Delta_\xi F^\pm = \overline{MTD}^\pm \overline{T^{-1}A'} \Delta \tilde{q} = \overline{MTD}^\pm \overline{T^{-1}} \tilde{M}^{-1} \Delta q = \tilde{A}^\pm \Delta q \quad (6)$$

여기서



$$D^{\pm} = \frac{1}{2} \left(I \pm \frac{A}{|A|} \right)$$

식 (6)과 같이 flux difference splitting 을 보존변수 q 를 이용하여 표시한다. 위와 같은 변환으로 CSCM Flux Difference Splitting 방법을 Roe의 형태로 나타낼 수 있다.

2. 2 Numerical Discretization

Upwind방법을 이용하여 일반적인 ij번째 내부점의 유한차분 방정식을 기술하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} & [I + (\tilde{A}^+ \Delta_{\xi})_{i-1} + (\tilde{A}^- \Delta_{\xi})_i + (\tilde{B}^+ \Delta_{\eta})_{j-1} + (\tilde{B}^- \Delta_{\eta})_j] \delta q_{i,j} \\ & = - [(\tilde{A}^+ \Delta_{\xi} q)_{i-1} + (\tilde{A}^- \Delta_{\xi} q)_i + (\tilde{B}^+ \Delta_{\eta} q)_{j-1} + (\tilde{B}^- \Delta_{\eta} q)_j] \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 Δ와 ∇는 전방 및 후방공간 차분기호이다.

(1) Standard ADI(Beam and Warming[8])

$$[-\tilde{A}^+, E_{\xi}, \tilde{A}^-] [-\tilde{B}^+, E_{\eta}, \tilde{B}^-] \delta q = RHS \quad (8)$$

여기서 $E_{\xi} = I + |A|$, $E_{\eta} = I + |B|$

(2) DDADI(Lombard et al [2])

내재적인 왼쪽항을 근사인수분해한 후 대각지배를 강화시킨 ADI 방식을 도입하면 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$[-\tilde{A}^+, E, \tilde{A}^-] E^{-1} [-\tilde{B}^+, E, \tilde{B}^-] \delta q = RHS \quad (9)$$

여기서, $E = I + |A| + |B|$

윗식은 다음과 같은 절차를 통해 순차적으로 해를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & [-\tilde{A}^+, E, \tilde{A}^-] \delta q^* = RHS \\ & [-\tilde{B}^+, E, \tilde{B}^-] \delta q = E \delta q^* \\ & q^{n+1} = q^n + \delta q \end{aligned} \quad (10)$$

(3) MAF(MacCormark [3][4])

내재적인 왼쪽항을 근사인수분해 했을 때 발생하는 에러를 줄이기 위하여 오른쪽 잔류항에 보정을 시켜주는 수정된 근사인수분해법(MAF)은 다음과 같이 쓸수가 있다.

$$\begin{aligned} M & \equiv M'_{\xi} \times [E]^{-1} \times M'_{\eta} = M + P \\ M \times [\delta q] + P \times [\delta q] & = RHS \end{aligned}$$

Algorithm

$$M \times [\delta q^{(n)}] + P \times [\delta q^{(n)}] = RHS + P \times [\delta q^{(n-1)}] \quad (11)$$

여기서

$$M'_{\xi} = \begin{bmatrix} x & & & & \\ & x & & & \\ x & & x & & \\ & C & E & D & \\ & & x & x & x \\ & & & x & x \\ & & & & x & x \end{bmatrix}, M'_{\eta} = \begin{bmatrix} x & x & & & \\ x & x & x & & \\ & x & x & x & \\ & & A & E & B \\ & & & x & x & x \\ & & & & x & x & x \\ & & & & & x & x & x \\ & & & & & & x & x \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} x & & & & \\ & x & & & \\ & & E & & \\ & & & x & \\ & & & & x & \\ & & & & & x & \\ & & & & & & x \end{bmatrix}$$

윗식은 다음과 같은 절차를 통해 순차적으로 해를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 M'_i \delta q^* &= \text{RHS} + P \times [\delta q^{(n-1)}] \\
 M'_n \delta q &= E \delta q^* \\
 q^{n+1} &= q^n + \delta q
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

2. 3 Boundary Conditions

경계면에서 완전결합(fully coupled)된 내재적 근사방법은 Lombard등[2]의 특성 경계방정식에 의해 구할수가 있으며 보조 경계방정식을 보존변수나 원시변수로서 나타낼 수가 있다. 이러한 식을 원시변수로 선형화 시켜보면 다음과 같은 식으로 표현된다.

Auxiliary Boundary Condition

$$f(q) = \text{const}$$

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial q} \equiv T^{-1} M^{-1} = 0$$

다음 두 식은 입구에서나 출구에서의 특성 경계방정식을 나타내고 입구와 출구 경계면에서 1차 내재적 차분 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 (\bar{A}^- + \bar{A}^- \Delta \xi) \delta q_1 &= -(\bar{A}^- \Delta \xi q)_1 \\
 (\bar{A}^+ + \bar{A}^+ \Delta \xi) \delta q_N &= -(\bar{A}^+ \Delta \xi q)_{N-1}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

여기서

$$\bar{A}^{\pm} = \overline{MT} (D^{\pm} T^{-1} + D^{\pm} T^{-1}) M$$

2차원 천음속 점성유동에 대한 경계조건은 벽면에서는 No-slip조건과 벽면 온도는 단일 경계조건을 사용하였다. 외부경계면은 코드길이(chord length)의 15배 이상의 충분한 거리를 두어 고정시켰으며, 출구 경계면에서는 2차의 정확도로 외삽하였다.

3. RESULTS AND DISCUSSION

Fig. 1은 본 연구에 사용된 195×70의 C형 격자계를 보여주고 있으며, 격자계의 구성은 점성영역을 고려하여 벽면에 밀집시켰으며, quarter chord를 중심으로 받음각 만큼 회전시켜 격자를 구성하였다.

천음속 유동장의 수렴특성

천음속 유동장에서 수렴특성을 알아보기 위하여 근사인수분해 방법중 일반적인 ADI, DDADI 및 MAF방법에 대하여 적용해 보았다. 수치해석적의 정확성을 검증하기 위하여 마하수가 0.8, 레이놀즈수가 4.8×10⁶, 받음각이 1.25° 인 NACA0012 익형 주위의 압축성 점성 유동에 대하여 계산해 보았다

Fig. 2은 마하수 0.8, 받음각 1.25°인 경우에 익형 표면을 따른 압력계수분포를 CFL=3인 경우에 나타낸 그림이다. 정상상태의 해를 검증하기 위하여 Pulliam[9]의 계산 결과와 비교해 보았다. 익형 윗면에서 강한 충격파로 인하여 압력이 급격히 증가하고 아랫면에서도 약한 충격파가 발생하고 있음을 알수가 있다. 익형의 윗면에서는 Pulliam의 계산 결과와 비교해 볼 때 약 3%정도 충격파의 위치가 다르게 나타나고 있으나 이것은 충격파 부근의 격자점이 조밀하지 못한 결과라고 생각이 된다. 그러나 전체적인 압력계수의 분포는 서로 잘 일치하고 있음을 알수가 있다. 특히 근사인수분해방법에 의한 결과의 차이는 보이지 않음을 알수가 있었다.

Figs. 3a와 3b는 MAF를 이용하여 구한 NACA0012 익형 주위에 등압선도와 등마하선도를 나타내어 주는 그림이다. 익형 앞전의 정체점 부근에서 높은 압력장이 형성이 되고, 익형 윗면을 따라 점점 가속이 되는 것을 볼 수가 있으며 약 0.61 chord부근에 충격파로 인하여 압력이 급격히 상승하는 것을 보여 주고 있다. 익형에서 발생하는 물리적인 현상과 잘 일치하고 있음을 알 수가 있다.

Fig. 4는 각 인수분해 방법의 수렴특성을 보여 주는 결과이다. 그림에서 알수 있듯이 초기 약 3000번 정도까지는 수렴 특성이 모두 비슷하였다. 그러나 ADI방법의 경우 그 이후로는 CFL 값에 상관없이 수렴하지 않고 해가 진동하는 현상을 보이고 있으며, 두 경우 모두 약 10⁻⁴정도 떨어졌다. DDADI방법의 경우는 CFL값이 1인 경우에는 약 8000번 이후로는 해가 진동하는 현상을 보여 주고



있으나, CFL 값이 클수록 빠른 수렴속도를 보여 주고 있다. ADI방법과 비교해 볼 때 DDADI방법이 대각지배 행렬로 인하여 수렴성이 좋아짐을 알수가 있다[4]. MAF방법과 DDADI방법을 비교해 보면 수렴 특성이 MAF방법이 약 반승정도 좋음을 알수가 있고 이것은 MAF방법이 인수분해 과정에서 발생하는 에러를 줄여주기때문에 수렴특성이 좋아짐을 알수가 있다. 이 방법 역시 CFL 값이 클수록 빠른 수렴속도를 보여 주고 있다.

4. CONCLUSIONS

천음속 유동장에서 수렴특성을 알아보기 위하여 근사인수분해 방법중 일반적인 ADI, DDADI 및 MAF방법을 적용해 보았다. 마하수가 0.8, 레이놀즈수가 4.8×10^6 의 유동에 받음각이 1.25° 인 NACA0012 익형 주위의 압축성 점성 유동에 대하여 계산한 결과 모두 실험 결과와 잘 일치하고 있으며, 수렴 특성은 대각행렬의 지배화, 인수분해 에러가 감소함으로 좋아짐을 알수가 있었다. CFL 값의 변화는 적용 문제의 특성 및 물리적인 현상에 따라 달라지지만 전체적으로 볼 때 값이 클수록 수렴정도도 좋아짐을 알수가 있었다.

5. REFERENCES

- [1] Pulliam, T. H. and Chaussee, D. S., "A Diagonal Form of an Implicit Approximate Factorization Algorithm", Journal of Computational Physics, vol. 39, pp. 347-363, 1981.
- [2] Lombard, C. K., Bardina, J., Venkatapathy, E. and Olinger, J., "Multi-dimensional Formulation of CSCM - An Upwind Flux Difference Eigenvector Split Method for the Compressible Navier-Stokes Equations", AIAA-83-1895, 1983.
- [3] MacCormack, R. W., "A New Implicit Algorithm for Fluid Flow", AIAA-97-2100, 1997.
- [4] MacCormack, R. W. and Pulliam, T. H., "Assessment of a New Numerical Procedure for Fluid Dynamics", AIAA-98-2821, 1998.
- [5] Klopfer, G. H., Van Der Wijngaart, R. F. and Hung, C. M., "A Diagonalized Diagonal Dominant Alternating Direction Implicit(D3ADI) Scheme and Subiteration Correction", AIAA-98-2824, 1998.
- [6] Lombard, C.K., "Conservative Supra-Characteristic Method for Splitting the Hyperbolic Systems of Gasdynamics for Real and Perfect Gases", NASA CR-166307, 1982.
- [7] Lombard, C. K., Oliver, J., Yang, J.Y., Davy, W. C., "Conservative Supra Characteristics Method for Splitting the Hyperbolic System of Gasdynamics with Computed Boundaries for Real and Perfect Gases", AIAA-82-0837, 1982.
- [8] Beam, R. and Warming, R. F., "An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation Law Form", Journal of Computational Physics, vol. 22, pp. 87-110, 1976.
- [9]. Pulliam, T. H. "Artificial Dissipation Models for the Euler Equations", AIAA J., Vol.24, No.12, Dec. 1986.
- [10] Douglas, J. and Gunn, J.E., 1964, "A General Formulation of Alternating Direction Methods-Part I-Parabolic and Hyperbolic Problem", Numerische Mathematic, Vol.6 pp.428-453.

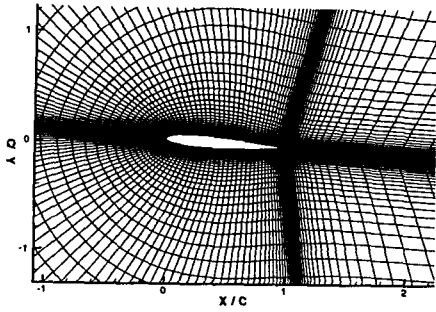


Fig. 1. Mesh near an NACA 0012 (195×70)

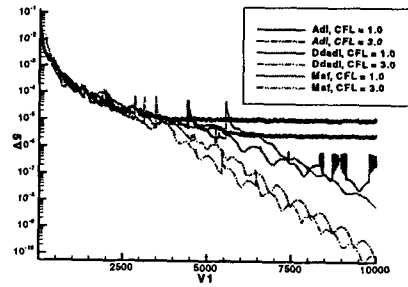


Fig. 4. Comparisons of residuals versus iteration No. for ADI, DDADI, MAF among CFL=1.0 and CFL=3.0

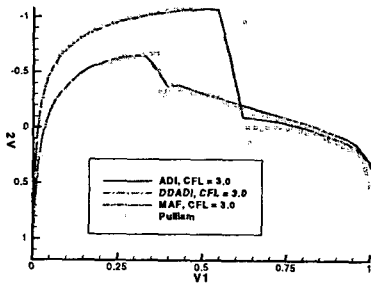
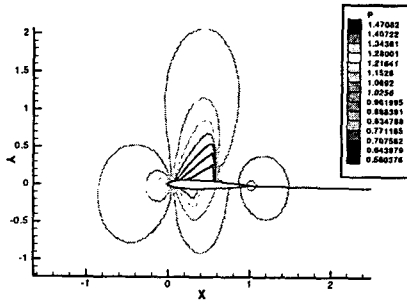
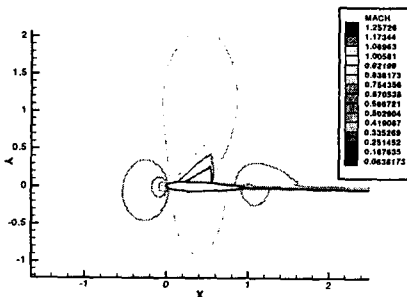


Fig. 2 Comparisons of C_p distribution over NACA 0012 airfoil among Pulliam and current results ($M_\infty=0.80$, $\alpha = 1.25$)



(a)



(b)

Fig. 3 (a)Pressure, (b)Mach No. contour plot over NACA 0012 airfoil