

임의의 입·출구 위치를 가지는 단순확장관의 해석

김 봉 준* · 정 의 봉** · 이 정 환*

부산대학교 기계공학부

Analysis of Simple Expansion Chamber with Arbitrary Inlet/Outlet Location

Bong-Jun Kim, Weui-Bong Jeong and Jeong Hwan Lee

Department of Mechanical Engineering Pusan National University

bjkim@home.pusan.ac.kr wbjeong@pusan.ac.kr vinal@home.pusan.ac.kr

요약

본 연구에서는 기존의 모드적합법의 단점을 개선하여 각 관에 임의의 모드갯수를 선택할 수 있고, 동심원형 단순확장관의 음향특성뿐만 아니라 입·출구가 임의의 위치에 있는 경우에도 모드적합법을 적용할 수 있는 방안을 제시한다. 그리고 제시한 방안으로 프로그램을 작성하여, 각각 임의의 모드와 임의의 입·출구의 위치를 가지는 원형 소음기의 4단자 정수를 구하고, 이로부터 임의의 입·출구 위치에 따른 소음기의 음향특성을 구하여 유한요소법과 비교하여 제안하는 방법의 유용성을 검증하고 고차모드의 영향을 조사하였다.

1. 서론

소음기를 해석하는 방법으로는 덕트 내의 음파를 평면파로 가정하여 해석하는 방법과 덕트 내의 음파를 고차모드까지 고려하여 해석하는 방법이 있다. 덕트 내의 음파를 평면파로 가정하여 해석하는 평면파 이론은 저주파수 영역에서 소음기의 특성을 잘 예측할 수 있다. 그러나 고주파수 영역에서는 입·출구 위치의 위치에 따라 소음기의 특성이 아주 많이 변하게 된다. 이는 소음기내의 고차모드의 영향 때문인데, 평면파 이론에서는 고차모드를 고려하지 않아서 고주파수 영역에서는 소음기의 특성을 정확히 예측할 수 없으므로 고차모드를 고려할 수 있는 소음기의 음향해석법이 필요하다. 고차모드를 고려한 소음기의 음향해석에 대한 많은 선행연구⁽²⁻¹⁰⁾가 있었다. 이들 중 El-Sharkawy⁽³⁾는 Miles⁽²⁾의 접근방법을 이용하여 소음기의 단면적 불연속면에서 압력과 체적속도 연속조건을 적용하여 해석하고 실험으로 검증하였지만, 이는 동심 원형관에만 적용되기 때문에 입·출구가 임의의 위치에 있는 경우는 계

산할 수가 없고, 입·출구와 중간확장덕트에 같은 개수의 모드를 고려해야 하는 단점이 있다.

본 논문에서는 동심원형관에만 적용되는 기존의 모드일치법을 개선하여 입·출구가 임의의 위치에 있는 경우에도 모드일치법을 적용할 수 있는 방안을 제시한다. 그리고 임의의 입·출구의 위치를 가지는 원형 소음기에서 입·출구 그리고 중간확장관에 각각 임의의 모드를 고려하여 4단자 정수를 구하고, 이로부터 임의의 입·출구 위치에 따른 소음기의 투과손실을 구하여 고차모드의 영향을 조사하고 제안하는 방법의 유용성을 검증하고자 한다.

2. 개선된 모드일치법의 제안

원형관의 음파 방정식⁽¹¹⁾은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 p = 0 \quad (1)$$

단,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

여기서 c 는 음파의 위상속도이고 p 는 음압이고 t 는 시간이며, (r, θ, z) 좌표계는 Fig. 1과 같다.

그리고 입자속도와 음압의 관계식은 다음과 같다.

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla p = 0 \quad (2)$$

여기서 ρ_0 는 밀도이다.

덕트의 벽을 강체(rigid wall)라고 가정하면 덕트의 벽에서는 반경방향의 속도가 0이어야 하므로 다음과 같은 경계조건을 가진다.

$$\frac{dJ_m(k_{r,mn} r)}{dr} = 0 \quad , at \quad r = r_0 \quad (3)$$

여기서 r_0 는 덕트의 반경이다. 식 (3)의 경계조건으로

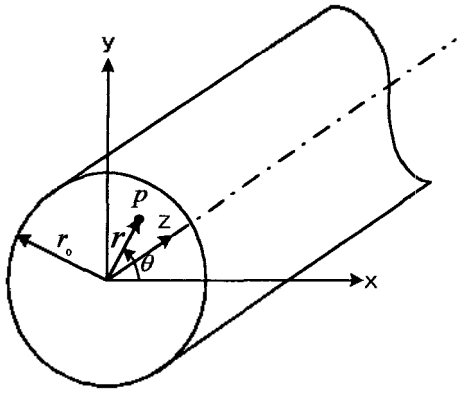


Fig. 1 Cylindrical polar coordinate system (r, θ, z)

부터 $k_{r, mn}$ 을 구하면 음파방정식의 해는 다음과 같고,

$$p(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [J_m(k_{r, mn} r) e^{j\omega t} \cos m\theta \times (P_i e^{-jk_{z, mn} z} + P_r e^{jk_{z, mn} z})] \quad (4)$$

단,

$$k_{z, mn}^2 = k_0^2 - k_{r, mn}^2$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c}$$

z 방향의 입자속도는 다음과 같이 된다.

$$u_z(r, \theta, z, t) = \frac{1}{\rho\omega} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [k_{z, mn} J_m(k_{r, mn} r) e^{j\omega t} \times \cos m\theta (P_i e^{-jk_{z, mn} z} - P_r e^{jk_{z, mn} z})] \quad (5)$$

Fig. 2와 같이 임의의 입·출구의 위치를 가지는 단 순확장형 소음기에서 δ_1 은 입구의 편심거리(offset distance), δ_3 는 출구의 편심거리, θ_0 는 입구와 출구의 상대각도(separation angle)이다. 그리고 입구, 중간확장관, 출구의 채택모드를 각각 $(L_1, L_2), (M_1, M_2), (N_1, N_2)$ 이라고 하면, 압력은 식 (4)를 이용하면 다음과 같다.

$$p_A = A_{00} e^{-jk_{z, 00} z} \quad (6)$$

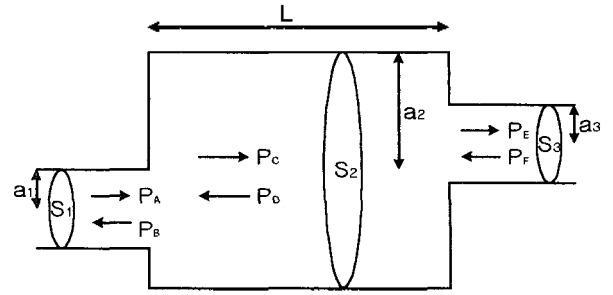
$$p_B = \sum_{m=0}^{L_1} \sum_{n=0}^{L_2} B_{mn} J_m(k_{r, mn} r_1) \cos m\theta_1 e^{jk_{z, mn} z} \quad (7)$$

$$p_C = \sum_{m=0}^{M_1} \sum_{n=0}^{M_2} C_{mn} J_m(k_{r, mn} r_2) \cos m\theta_2 e^{-jk_{z, mn} z} \quad (8)$$

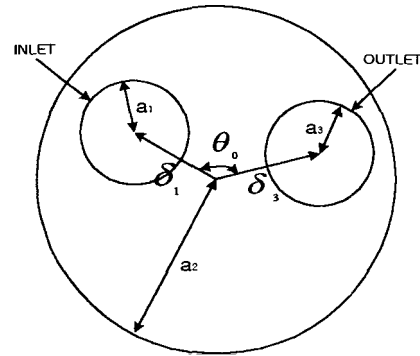
$$p_D = \sum_{m=0}^{M_1} \sum_{n=0}^{M_2} D_{mn} J_m(k_{r, mn} r_2) \cos m\theta_2 e^{jk_{z, mn} z} \quad (9)$$

$$p_E = \sum_{m=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} E_{mn} J_m(k_{r, mn} r_3) \cos m\theta_3 e^{-jk_{z, mn} z} \quad (10)$$

$$p_F = F_{00} e^{jk_{z, 00} z} \quad (11)$$



(a) Circular simple expansion chamber muffler



(b) Inlet/outlet location of muffler

Fig. 2 Geometry of the muffler

여기서, $(r_1, \theta_1, z), (r_2, \theta_2, z), (r_3, \theta_3, z)$ 는 각각 입구, 중간확장관 그리고 출구의 중심을 원점으로 하는 좌표계이다. 입자속도는 식 (5)를 이용하여 같은 방법으로 구할 수 있다. 그리고 입구, 중간확장관 그리고 출구의 음압과 입자속도식으로 부터 $z=0$ 에서의 압력연속조건식 (12)과 입자속도 연속조건식 (13) 그리고 $z=L$ 에서의 압력연속조건식 (14)과 입자속도 연속조건식 (15)을 만들 수 있다.

$$p_A + p_B = p_C + p_D \quad \text{at } z=0, \quad 0 \leq r \leq a_1 \quad (12)$$

$$u_A + u_B = u_C + u_D \quad \text{at } z=0 \quad (13)$$

$$p_C + p_D = p_E + p_F \quad \text{at } z=L, \quad 0 \leq r \leq a_3 \quad (14)$$

$$u_C + u_D = u_E + u_F \quad \text{at } z=L \quad (15)$$

식 (12)를 베셀함수의 직교성과 Graf의 부가정리(Graf's addition theorem)⁽¹²⁾를 이용하여 단면에 대하여 적분하면 식 (12)로부터 식 (16)-(18)의 결과식을 만들어 낼 수 있고 식 (13)-(15)도 같은 방법으로 결과식을 얻을 수 있다.

$$a_1(A_{00} + B_{00}) = a_1(C_{00} + D_{00}) + \frac{2}{k_{r2, 0n}} \sum_{n=1}^{M_2} (C_{0n} + D_{0n}) J_0(k_{r2, 0n} \delta_1)$$

$$\times J_1(k_{r2,0n} a_1) + \sum_{m=1}^{M_1} \sum_{n=0}^{M_2} \frac{2}{k_{r2,mn}} (C_{mn} + D_{mn}) \times J_{-m}(k_{r2,mn} \delta_1) J_1(k_{r2,mn} a_1) \quad (16)$$

$$a_1 B_{0n'} J_0(k_{r1,0n'} a_1) = 2 \sum_{n=1}^{M_1} (C_{0n} + D_{0n}) J_0(k_{r2,0n} \delta_1) \frac{J_0'(k_{r2,0n} a_1)}{k_{r1,0n'}^2 - k_{r2,0n}^2} + 2 \sum_{m=1}^{M_1} \sum_{n=0}^{M_2} (C_{mn} + D_{mn}) J_{-m}(k_{r2,mn} \delta_1) \times \frac{J_0'(k_{r2,mn} a_1)}{k_{r1,0n'}^2 - k_{r2,mn}^2}, \quad n' = 1 \sim L_2 \quad (17)$$

$$a_1 B_{m'n'} \left(1 - \frac{m'^2}{k_{r1,m'n'}^2 a_1^2}\right) J_{m'}(k_{r1,m'n'} a_1) = 2 \sum_{n=1}^{M_1} (C_{0n} + D_{0n}) J_{m'}(k_{r2,0n} \delta_1) \frac{J_{m'}'(k_{r2,0n} a_1)}{k_{r1,m'n'}^2 - k_{r2,0n}^2} + 2 \sum_{m=1}^{M_1} \sum_{n=0}^{M_2} (C_{mn} + D_{mn}) J_{m'-m}(k_{r2,mn} \delta_1) \times \frac{J_{m'}'(k_{r2,mn} a_1)}{k_{r1,m'n'}^2 - k_{r2,mn}^2}, \quad m' = 1 \sim L_1, n' = 0 \sim L_2 \quad (18)$$

한편 단순확장형 소음기의 4단자 정수는 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{pmatrix} p_{in} \\ Y_{in} \nu_{in} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_{out} \\ Y_{out} \nu_{out} \end{pmatrix} \quad (19)$$

여기서 ν 는 질량속도(mass velocity)이고, Y 는 특성 임피던스(characteristic impedance)로 $\frac{a_0}{S}$ 이며 S 는 덕

트의 단면적이다. ζ_{out} 을 출구($z = L$)에서의 고유 음향임피던스(specific acoustic impedance)라 하면 4단자 정수는 경계조건식으로부터 계산할 수 있다.

3. 임의의 입·출구의 위치를 가진 단순확장형 소음기에의 적용

입·출구의 반경은 0.025m이고 중간확장관의 반경은 0.075m인 경우, 일반적으로 입·출구가 임의의 위치에 존재 할 때에는 중간확장관의 (2,2)모드의 차단주파수는 7,193Hz이지만 이보다 낮은 차단주파수를 가지는 (3,0), (4,0), (5,0), (6,0), (7,0), (8,0), (3,1), (4,1)모드를 고려하지 않아 실제 결과를 신뢰할 수 있는 주파수 구간은 (3,0)모드의 차단주파수인 3,030Hz이하가 된다. 그러므로 입·출구도 비슷한 주파수 영역에서 신뢰성을 보장하기 위해서는 (0,0)모드 뿐만 아니라 그 이상의 모드도 포함하여야 한다. 그러므로 중간확장관은 (0,0)~(2,2)모드를, 입·출구에는 (0,0)모드만 채택한 경우와 (0,0)~(1,1)모드까지를 고려한 경우를 비교하여 Fig. 3에 나타내었다. Fig. 3에서 볼 수 있듯이 2,500Hz이상의 주파수 영역에서 입·출구에서의 모드선택에 따라 다른 결과를 보임을 알 수 있다. 그러므로 중간확장관 뿐만 아니라 입·출구에도 고차모드를 고려하는 것이 바람직함을 알 수 있다.

입·출구가 동심원상에 위치하지 않을 때의 결과를 보기 위하여 Fig. 4에 입구와 출구가 0.0375meter만큼 편심되어 있고, 입구와 출구의 상대각도가 45° 인 경우

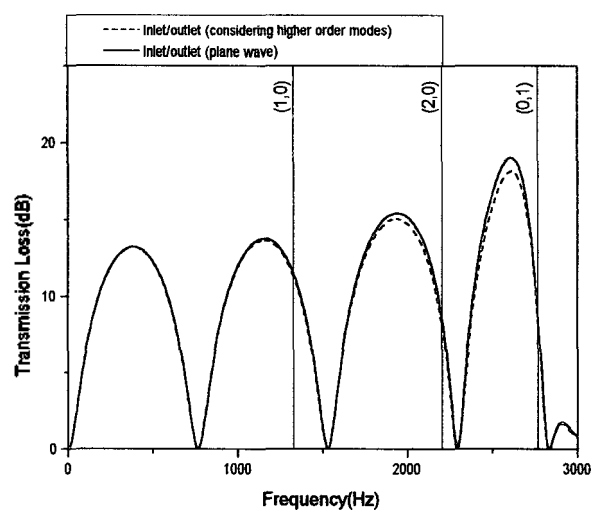


Fig. 3 Transmission Loss of concentric muffler

$$\left[\begin{array}{l} \delta_1 = \delta_3 = 0 \text{ m}, \quad a_1 = a_3 = 0.025 \text{ m}, \\ a_2 = 0.075 \text{ m}, \quad L = 0.225 \text{ m} \end{array} \right]$$

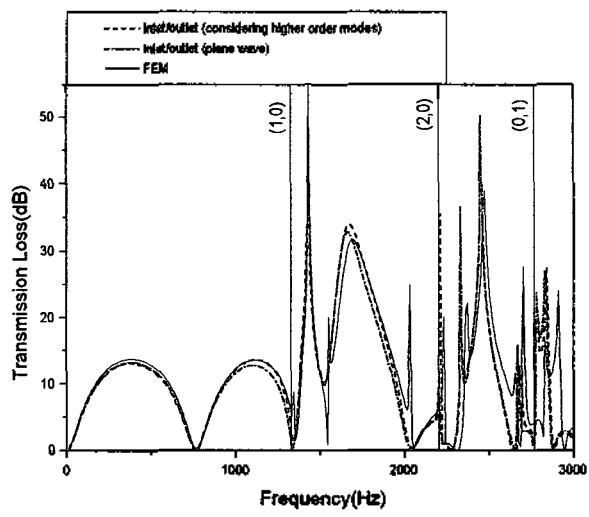


Fig. 4 Transmission Loss of muffler with offset inlet, offset outlet

$$\left[\begin{array}{l} \delta_1 = \delta_3 = 0.0375 \text{ m}, \quad a_1 = a_3 = 0.025 \text{ m} \\ a_2 = 0.075 \text{ m}, \quad \theta_0 = 45^\circ, \quad L = 0.225 \text{ m} \end{array} \right]$$

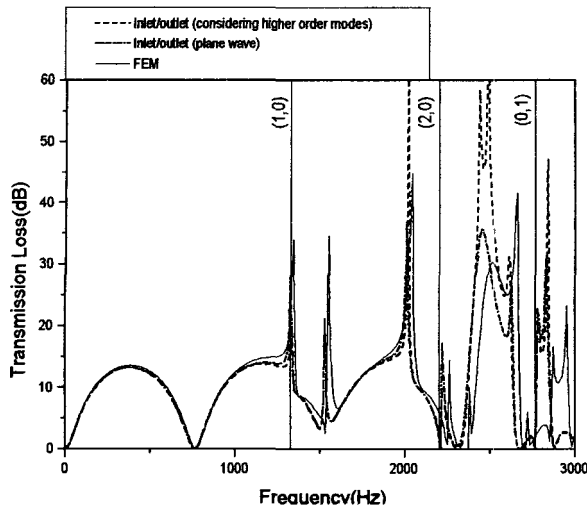


Fig.5 Transmission Loss of muffler with offset inlet, offset outlet

$$\left[\begin{array}{l} \delta_1 = \delta_3 = 0.0375 \text{ m}, a_1 = a_3 = 0.025 \text{ m} \\ a_2 = 0.075 \text{ m}, \theta_0 = 90^\circ, L = 0.225 \text{ m} \end{array} \right]$$

의 투과손실을 보이고, Fig. 5에 상대각도가 90° 인 경우의 투과손실을 보였다. 여기에서 입·출구에는 (0, 0)~(1,1)모드까지를, 중간확장관은 (0,0)~(2,2)모드를 채택하여 계산하였다. Fig. 4에서는 (1,0)모드가 전달되어 그 차단주파수인 1327Hz에서 고차모드의 영향이 나타남을 볼 수 있다. 그러나 입·출구의 상대각도를 90° 로 하면 (1,0)모드의 효과가 제거되어 (2,0)의 차단주파수인 2200Hz까지 평면파 영역이 확장됨을 예상할 수 있고 Fig. 5에서 이를 확인할 수 있다. 또한 Fig. 4과 Fig. 5에 본 논문에서 제안한 방법으로 구한 투과손실과 유한요소법으로 구한 투과손실을 비교하였는데, 그 결과가 잘 일치함을 볼 수 있다.

4. 결론

- 1) 입구와 출구 그리고 중간확장관에 임의의 모드를 채택하여 임의의 입·출구 위치를 가지는 소음기의 음향 특성을 구할 수 있는 개선된 모드일치법을 제안하였다.
- 2) 본 논문에서 제안한 방법으로 4단자 정수와 소음기의 투과손실을 구하고 유한요소법의 결과와 비교하여 잘 일치하는 것을 확인할 수 있었다.
- 3) 본 논문에서 제안한 방법으로 입·출구의 위치에 따른 고차모드의 영향을 확인하였다.

참고문헌

- (1) J.Miles, 1944, "The Reflection of Sound due to Change in Cross Section of a circular", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 16, pp. 14-19.
- (2) A.El-Sharkawy and A.H.Nayfeh, 1978, "Effect of an Expansion Chamber on the Propagation of Sound in Circular Ducts", *Journal of the Acoustical Society of America* Vol. 63, pp. 667-674.
- (3) Jeong-Guon Ih and Byung-Ho Lee, 1985, "Analysis of Higher-Order Mode Effects in the Circular Expansion Chamber with Mean Flow", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 77, pp. 1377-1388.
- (4) Y.-H. Kim and S.-W. Kang, 1993, "Green's Solution of the Acoustic Wave Equation for a Circular Expansion Chamber with Arbitrary Locations of Inlet, Outlet Port, and Termination Impedance", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 94, pp. 473-490.
- (5) M.L.Munjal, 1987, "A Simple Numerical Method for Three-Dimensional Analysis of Simple Expansion Chamber Mufflers of Rectangular as well as Circular Cross-section with a Stationary Medium", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 116, pp. 71-88.
- (6) M.Abom, 1990, "Derivation of Four-Pole Parameters Including Higher Order Mode Effects for Expansion Chamber Mufflers with Extended Inlet and Outlet", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 137, pp. 403-418.
- (7) 김봉준, 정의봉, 황상문, 1999, "고차모드를 고려한 사각형 단순 확장관의 간편음향해석법의 개선", 한국소음진동공학회지, 제9권, 제2호, pp. 340-347.
- (8) 김봉준, 정의봉, 황상문, 1999, "원형단순확장관의 입·출구 위치와 단면 크기를 고려한 음향해석법", 한국소음진동공학회지, 제9권, 제5호, pp. 101-110.
- (9) 김봉준, 정의봉, 이정환, 1999, "원형단순확장관의 음향해석에서 채택모드수를 임의로 선택할 수 있는 모드일치법의 제안", 한국음향학회지, 2000년 게재예정
- (10) K.S.Peat, 1982, "Evaluation of Four-Pole Parameters for Ducts with Flow by the Finite Element Method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 84, pp. 389-395.
- (11) M.L.Munjal, 1987, *Acoustics of Ducts and Mufflers*, New York
- (12) G.N.Watson, 1966 "Theory of Bessel Functions", 2nd edition, Chap.11 and 18, Cambridge University Press, London