에밀레鐘의 萬波息笛音管의 機能을 살리는 方策

Let-out of the Function of Sound Tube in the Bell King Sŏngdŏk the Great

KAIST, Professor, Byung Ho Lee

The Bell King Sŏngdŏk the Great tolls magnificient sound that would be a great vehicle which brings all beings to the Sutras. Since 683, there was a magic flute, MANPASIKJUK, which was in existence in Shilla Dynasty that could lull all the evil-wawes, such an Plaques, Storms, Droughts, Famines and even Enemies. Thus, a sound tube, MANPASIKJUK, was erected in the crown of the Bell Sŏngdŏk the Great so as to be effective to emit the nominal frequency tone whenever the Bell tolls for the national prosperity and welfare the people.

Therefore, the Bell makers tried to find the transmissibility condition through the sound tube, several times during 34 years. However, it seems to be unfinished. Ever since, all of the korean Brahman Bells have the sound tubes of MANPASIKJUK, but none is performed their own functions.

Here, one of the way to let the function of the sound tube of MANPASIKJUK out in the Bell Sŏngdŏk the Great is proposed. There are two steps: the 1st is to elongate 18cm to the present length 77cm to fulfill the transmissibility condition for the nominal frequency 171Hz tone. Nevertheless, only 5% of the nominal frequency of sound is emitted through the corrected sound tube. 2nd step is to rise to 95% of the emission of the tone of nominal frequency, so that an exponential horn with the flare constant $2.8m^{-1}$, length 2.259m and the radius of the mouth 1.772m is to be extended to the corrected sound tube.

에밀레鐘의 萬波息笛音管의 機能을 살리는 方策

KAIST 名譽敎授 李炳昊*

우리의 國寶 에밀레鐘(聖德大王神鐘)은 全世界에 類例가 없는 最高의 音質을 자랑하고 있어, 우리科學의 象徵으로 내세울 만 하다. 그 에밀레鐘에는 萬波息笛의 音管이 붙어있어 鐘을 칠 때마다, 鐘內部의 音도 그 音管으로 뿜아내어져서, 傳說의 靈妙한 萬波息笛의 效能을 發揮하여, 國泰民安을 圖謀하고자 했던 것이 當時의 鍾匠의 念願이었을 것이다.

허나, 34年間 3.4回의 試行錯誤를 겪으면서도 從當은 그 音管機能을 살리지 못하고 未遂에 그쳤다. 참으로 愛惜하다. Nominal frequency의 tone을 여기 本論文에서는 그 機能을 살리기 위하여, 그 音管에 Exponential Horn을 달아, 鐘內部音中 dominant한 nominal frequency 171 Hz의 音을 99.8 %를 그 萬波息笛의 音管을 通하여 뿜아내도록 한 改善策을 提示한다. 즉 flare const $m=2.8m^{-1}$, horn의 거리 2.259m, horn의 mouth의 半徑 1.772m의 exponential horn을 現 77cm의 音管 plus 18cm의 resonance trasmissibility를 위한 correction에 덧붙여야 한다.

이 改善策은 著者가 10年前 1990년 5月에 考案해서 解析했던 것인데, 다른 사람들의 案이 나오지 않기에 이번에 發表해두는 바이다. 【本論文은 著者의 『음향학II』(1999), ISBN 89-374-3634-594420)의 P.900-917에 실려있다.】

I. 鐘에 open tube를 달았다해서 鐘內部의 音이 그 管을 通하여 빠져 나오는 것은아니다. Resonance Transmissibility(共鳴透過)의 條件을 만족해야만, 그에 該當하는 Hz의 音만이 빠져나올 수 있다. 不然이면, 管은 絶壁과 같이 作用한다.

共鳴透過條件은 Input Impedance의 imaginary part가 죽는 것이다.

聖德大王神鐘에서 最大의 振幅을 가진 nominal frequency 171 Hz의 tone이 旣存의 萬波息笛 共鳴透過의 音管을 통하여 빠져 나오려면, 上記의 條件을 滿足해야하는데, 그 條件에서 內徑 15cm, 高 95cm의 音管이 필요함을 안다. 現在 高가 77cm밖에 안되니, 18cm로 보자라는 셈이어서, 18cm를 더 늘여야만 한다. 그래야만 共鳴透過의 條件을 充足시킬 수 있다. 현재, 이 共鳴透過條件을 滿足시키면 100%빠져나올수 있는가. 그렇지가 않다.

II. Correction 18cm를 늘여서, 音管의 Resonance Transmissibility의 條件을 滿足시키면 鐘內部의 音이 얼마나 빠져 나올까? 5.3%밖에는 안빠져 나온다.

그러나 음관을 통해서 171 Hz에 해당하는 종 내부의 fundamental tone이 그대로 빠져나와 밖으로 퍼진다는 것도 생각해 보자. 먼저 음관의 문턱에서 공명전달(resonance transmissibility)의 조건을 만족토록 길이를 95 cm로 늘이고 거기다 exponential horn을 단다. 왜냐하면, 아무리 음관 문턱에서 공명전달 조건을 만족했더라도 음관 끝에서 공명전달이 되는 것은 아니기 때문이다. 우선 exponential horn을 달지 않은 채로 음관구(音管(1))에서 통과계수를 계산해 보기로 하자.

이것은 직선 음관 끝에서 밖으로 나가려는 파와 안으로 들어오려는 파의 진폭의 비부터 계산해야 한다. 즉

$$r_p(x=l) = \frac{p_-(l)}{p_+(l)} = \frac{Z_l - S\rho c}{Z_l + S\rho c} = \frac{Z_l / S\rho c - 1}{Z_l / S\rho c + 1} = \frac{Z_l - 1}{Z_l + 1}. \quad (1)$$

*韓國音響學會顧問

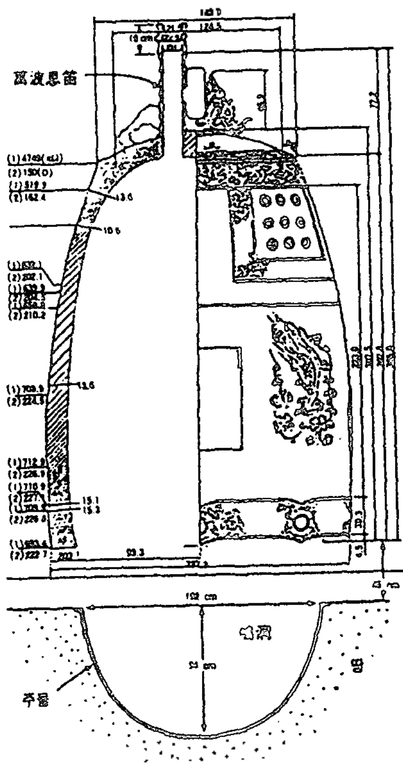

Fig. 1 - 성덕대왕 신종의 정면·단면도와 만파식적의 음관

여기서 Z_t / S = impedance / unit area = specific impedance이다. 따라서 $Z_t = Z_t / S\rho c$는 characteristic impedance ρc로 표시한 specific impedance이며 무차원이다.

L. Ya. Gutin, *J. Tech. Phys.* (USSR) 7, 1096(1957)에 의하면 저주파수에서 flange가 없는 직선 음관의 open end에서 impedance Z_t는

$$Z_t \approx S\rho c\left(\frac{k^2a^2}{4} + j\frac{2}{\pi}ka\right) \tag{2}$$

로 주어진다. 이것이 성덕대왕 신종의 음관에 대해서는

$$ka \approx \frac{\omega}{c}a = \frac{2\pi(171)}{342}(0.075) = \pi(0.075) = 0.23562,$$

$$k^2a^2 = 0.0555,\quad k^2a^2/4 = 0.013879,$$

$$\frac{2}{\pi}ka = 0.150000.$$

그러므로

$$Z_t = S\rho c(0.013879 + j0.150000).$$

그래서

$$r_t = \frac{0.013879 + j0.150000 - 1}{0.013879 + j0.150000 + 1} = \frac{-0.986121 + j0.150000}{1.013879 + j0.150000}.$$

Transmission coefficient α_t는 energywise로 생각하기 때문에

$$\alpha_t = 1 - |r_p|^2 = 1 - r_p \cdot r_p^*$$

$$= 1 - \frac{(-0.986121 + j0.150000)}{(1.013879 + j0.150000)}\frac{(-0.986121 - j0.150000)}{(1.013879 - j0.150000)}$$

$$= 1 - \frac{0.972434 + 0.022500}{1.027950 + 0.022500} = 1 - \frac{0.994934}{1.05045}$$

$$= 1 - 0.947150 = 0.0528.$$

즉 5.3%가 밖으로 새어 나가고 나머지 94.7%가 끝에서 반사해서 음관 안으로 돌아간다. 만일 만파식적의 음관의 반경이 20 cm, 30 cm로 되면 어떠할까. 물론 음관의 직경이 40 cm, 60 cm로 되어 신종의 윤곽이 크게 달라져서 신종의 외관이 좀 추하게 될 것이다. 그러면 transmission coefficient는 28.8%, 66.8%로

각각 개선됨을 알 수 있다.

그리하여 당시의 장인(匠人)들은 여러 번 시행착오를 겪으면서 외관상의 미적 이유 때문에 지금의 반경 7.5 cm의 음관을 고집했을 것이다. 그러나 transmission을 개선하기 위하여 그 위에다 exponential horn의 첨부까지는 생각하지 못한 것은 아닌가? 어쩌면 그 생각을 했을지라도 그것을 붙여 transmission은 개선되지만 원래 꿋꿋한 만파식적의 모양이 어지러지니 난넘하고 말았을지 모른다. 저자는 여러 해를 두고, 그 만파식적의 원만한 기능을 살리고자 생각 끝에 적절한 exponential horn을 첨부할 것을 제의한다. 신종의 원형을 그대로 두고 기능을 살릴 수 있기 때문이다.

III. 無限長의 Exponential Horn을 連結하여 더 많은 音을 뽑아내기. 여기서도 Resonance Transmissibility를 만족해야.

지금 flare const 0.028cm^{-1}으로 고정하고, 첨가할 exponential horn의 mouth 살이 신종의 가장 불룩한 연직선을 넘지 못하도록 한정한다면, exponential horn의 길이는 l = 182.7 cm, mouth의 반경 a_t = 96.8 cm로 확정된다. 왜냐하면,

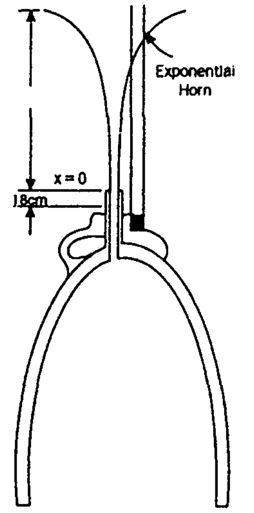

Fig. 2 성덕대왕 신종의 만파식적의 기능을 살리려는 개선책

$S_l = S_0 e^{ml}$, $m = \partial(\ln S_l) / \partial l) = m$, cutoff frequency $f_c = mc / 4\pi$이므로

$$f_c = \frac{0.028(320 \times 10^2)}{4\pi} = 71.3 < 171 \text{ Hz}$$

로 되어 171 Hz의 기본 tone은 문제없이 통과한다. m이 작을수록 transmissibility가 좋아진다.

Exponential horn의 mouth는 open to space이며, flange를 달지 않는 것이 보통인데 이 경우는 엄밀해를 얻을 수 없다. 다만 무한 baffle이 달린 경우만 풀렸을 따름이다(Load Rayleigh). 이 경우의 open end의 impedance는 flange가 없는 경우보다 약간 크지만 오차가 10% 미만이므로 무한 baffle의 경우의 것을 빌려 쓰는 것이 보통이다. 그래서 open end의 impedance Z_l는

$$Z_l = S_l\rho c(R_1 + jX_1), \; R_1 = 1 - \frac{2J_1(2ka_l)}{2ka_l}, \; X_1 = \frac{2K_1(2ka_l)}{(2ka_l)^2}. \tag{3}$$

여기, R_1과 X_1은 각각 piston의 resistance function, reactance function이라 부르고, J_1은 Bessel function, K_1은 modified Bessel function이다.

Exponential horn 내의 평면파의 파동방정식은 velocity potential로

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^2\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + m\frac{\partial\phi}{\partial x}\right], \; S_x = S_0 e^{mx}. \tag{4}$$

여기서 m은 flare constant라 한다. 이것의 해를 $\phi = Ae^{j(\omega t - rx)}$로 놓으면, propagation constant γ는 $\gamma^2 - jm\gamma - k^2 = 0$을 만족해야 한다. 즉

$$\gamma = \frac{jm}{2} + \sqrt{k^2 - \frac{m^2}{4}} = j\alpha + \beta; \; \alpha = \frac{m}{2}, \; \beta = \sqrt{k^2 - \frac{m^2}{4}}. \tag{5}$$

따라서 파동방정식의 해는

$$\phi = e^{-\alpha x}(Ae^{j(\omega t - \beta x)} + Be^{j(\omega t + \beta x)}). \tag{6}$$

이 해가 시사하는 것은, 거리 x가 증가함에 따라 평면파의 진폭이 $e^{-\alpha x}$로 감쇠한다는 것이다. 이때의 위상속도는

$$c' = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{4k^2}}} \tag{7}$$

으로 주어진다. Frequency $\omega(= kc)$에 의존하기 때문에 exponential horn은 분산성(dispersive)을 가져온다.

(10.4.6)에서 particle velocity $\dot{\xi}$와 excess pressure p를 구하면,

$$\dot{\xi} = c^{-\alpha x}[Ae^{-j(\beta x + \theta)} - Be^{j(\beta x + \theta)}]e^{j\omega t}, \tag{8}$$
$$p = \rho c e^{-\alpha x}[Ae^{-j\beta x} + Be^{j\beta x}]e^{j\omega t}.$$

다음은 이들 $\dot{\xi}$와 p를 가지고 acoustic impedance $Z = p / S_x\dot{\xi}$를 구하면

$$Z_x = \frac{\rho c}{S_x}\frac{Ae^{-j\beta x} + Be^{j\beta x}}{A\left(\frac{\beta}{k} - j\frac{\alpha}{k}\right)e^{-j\beta x} + B\left(\frac{\beta}{k} + j\frac{\alpha}{k}\right)e^{j\beta x}}. \tag{10}$$

IV. 有限長의 Exponential Horn을 連結할 때의 最適寸數(數値計算)

유한 horn에 대해서는 Z_x에서 $x = l$일 때, external loading impedance Z_l와 matching하도록 B의 값을 결정해야 한다. 이 조건에서

$$B = \frac{Ae^{-j2\beta l}\left(Z_l e^{-j\theta} - \frac{\rho c}{S_l}\right)}{Z_l e^{j\theta} + \frac{\rho c}{S_l}}. \tag{11}$$

여기서 θ는 $\tan\theta = \alpha / \beta = m \Big/ \sqrt{4k^2 - m^2}$.

따라서 Horn의 문턱 $x = 0$에서 impedance Z_0는

$$Z_0 = \frac{\rho c}{S_0}\frac{A + B}{Ae^{-j\theta} - Be^{j\theta}}.$$

여기나 (10.4.11)의 B를 대입하면,

$$Z_0 = \frac{\rho c}{S_0}\left[\frac{Z_l\cos(\beta l + \theta) + j\frac{\rho c}{S_l}\sin\beta l}{\frac{\rho c}{S_l}\cos(\beta l - \theta) + jZ_l\sin\beta l}\right]. \tag{12}$$

이것이 throat(문턱) impedance의 일반적인 표시이며 horn의 길이 l과 flare constant m과 external loading impedance Z_l에 의존한다. Horn의 mouth가 open to space면, 무한 baffle이 붙어 있다고 하고(이 경우만 엄밀한 해가 존재한다),

$$Z_l = \frac{\rho c}{S_l}[R_1(2ka_l) + jX_1(2ka_l)], \; S_l = \pi a_l^2 \tag{13}$$

을 구어다 쓴다. 앞서 말한 대로, baffle이 안 달린 경우는 이보다는 작지만, 그 오차가 10% 미만이므로 공학적인 응용으로서는 족하다.

$$2ka_l = 2\frac{\omega}{c}a_l = 2\frac{2\pi f}{c}a_l = 2\frac{2\pi(171)}{342}(0.968) = 6.082,$$

$$R_1(2ka_l) = R_0(6.082) = 1 - \frac{2J_1(6.082)}{6.082}$$
$$= 1 - \frac{2(-0.25961)}{6.082} = 1.08536,$$

$$X_1(2ka_l) = X_1(6.082) = 2K_1(6.082) / 6.082^2$$
$$= 2(0.00123) / 6.082^2 = 0.0000666.$$

$$Z_l = \frac{\rho c}{S_l}[1.08536 + j0.0000666].$$

$$\alpha = m / 2 = 2.8\,\text{m}^{-1} / 2 = 1.4\,\text{m}^{-1},$$
$$\beta = \sqrt{k^2 - \frac{m^2}{4}} = \sqrt{\pi^2 - \frac{2.8^2}{4}} = 2.81241\,\text{m}^{-1},$$
$$\theta = \tan^{-1}(\alpha / \beta) = \tan^{-1}(1.4 / 2.81241)$$
$$= \tan^{-1}0.49779 = 0.46376.$$

Exponential horn의 open end에서 reflection back하는 것은 sound pressure로써 얼마나 될까. 즉 $r_p = B / A$를 계산해 보자.

$$\dot{\xi} = e^{-\alpha x}[Ae^{-j(\beta x+\theta)} - Be^{j(\beta x+\theta)}]e^{j\omega t}, \quad (14)$$

$$p = \rho c e^{-\alpha x}[Ae^{-j\beta x} + Be^{j\beta x}]e^{j\omega t}, \quad (15)$$

$$\theta = \tan^{-1}(\alpha / \beta).$$

경계조건은

$$x = 0 : Z_0\dot{\xi}_1 + p_1S_1 = \Psi_0 e^{j\omega t}, \quad (16)$$

$$x = l : Z_l\dot{\xi}_2 - p_2S_2 = 0, \quad (17)$$

$$\Psi_0 e^{j\omega t} \equiv \text{applied force.}$$

위에 $\dot{\xi}$와 p의 두 식의 값을 경계조건에 대입하여 A, B를 결정하면

$$B = Ae^{j2\beta l}\frac{[Z_l e^{-j\theta} - \rho c S_2]}{[Z_l e^{j\theta} + \rho c S_2]}. \quad (18)$$

(10.4.18)과 (10.4.16)에서 B를 소거하면,

$$A = \frac{[Z_l e^{j\theta} + \rho c S_2]}{2De^{-j\beta l}}\Psi_0. \quad (19)$$

여기서

$$2D = (Z_0Z_l + \rho^2c^2S_1S_2)(e^{j\beta l} - e^{-j\beta l})$$
$$+ \rho c[Z_0S_2(e^{j(\beta l-\theta)} + e^{-j(\beta l-\theta)}) + Z_lS_1(e^{j(\beta l+\theta)} + e^{-j(\beta l+\theta)})]$$

즉

$$D = (Z_0Z_l + \rho^2c^2S_1S_2)j\sin\beta l$$
$$+ \rho c[Z_lS_1\cos(\beta l + \theta) + Z_0S_2\cos(\beta l - \theta)], \quad (20)$$

$$B = \frac{e^{-j\beta l}[Z_l e^{-j\theta} - \rho c S_2]}{2D}\Psi_0. \quad (21)$$

여기서 acoustic impedance를 구하면, $Z = p / S\dot{\xi}$이므로

$$Z_x = \frac{\rho c}{S_x}\frac{Ae^{-j\beta x} + Be^{j\beta x}}{A\left(\frac{\beta}{k} - j\frac{\alpha}{k}\right)e^{-j\beta x} - B\left(\frac{\beta}{k} + j\frac{\alpha}{k}\right)e^{j\beta x}}. \quad (22)$$

보통 $ka_l > 5$이면, 무한장의 horn으로 간주해도 옳다. 그때는 물론 반사파가 없으니까 $B = 0$. 우리의 경우에는 $ka_l = \pi(0.968) = 3.208 < 5$이니까 유한 horn으로 생각해야 한다.

pressure의 반사계수는

$$r_p = \frac{B}{A} = e^{-j2\beta l}\frac{[(R_1 + jX_1)e^{-j\theta} - 1]}{(R_1 + jX_1)e^{j\theta} + 1}.$$

그러므로 transmission coefficient α_t는 energywise이기 때문에,

$$\alpha_t = 1 - |r_p|^2 = 1 - r_p r_p^*$$
$$= 1 - e^{-j2\beta l}\frac{[(R_1 + jX_1)e^{-j\theta} - 1]}{[(R_1 + jX_1)e^{j\theta} + 1]}e^{j2\beta l}\frac{[(R_1 - jX_1)e^{j\theta} - 1]}{[(R_1 - jX_1)e^{-j\theta} + 1]}.$$

전개하여 정리하면

$$\alpha_t = 1 - \frac{R_1^2 + X_1^2 + 1 - 2R_1\cos\theta - 2X_1\sin\theta}{R_1^2 \times X_1^2 + 1 + 2R_1\cos\theta - 2X_1\sin\theta}$$

$$= \frac{4R_1\cos\theta}{R_1^2 + X_1^2 + 1 + 2R_1\cos\theta - 2X_1\sin\theta}.$$

앞서 계산한 바와 같이 $R_1 \sim 1$, $X_1 \sim 10^{-3}$이므로 X_1가 들어간 항을 무시하면,

$$\alpha_t = \frac{4R_1\cos\theta}{R_1^2 + 2R_1\cos\theta + 1}. \quad (23)$$

여기서

$$R_1 = 1.08536, \ \cos\theta = \cos 0.46376 = 0.89438.$$

$$\alpha_t = \frac{4(1.08536)(0.89438)}{1.08536^2 + 2(1.08536)(0.89438) + 1}$$

$$= \frac{3.882897}{4.119455} = 0.942575.$$

따라서 94.2%는 transmission이 되고, 5.8%는 reflection back

또 (10.4.22)에서 throat impedance($x = 0$)를 구하면,

$$Z_0 = \frac{\rho c}{S_0}\frac{A + B}{A\left(\frac{\beta}{k} - j\frac{\alpha}{k}\right) - B\left(\frac{\beta}{k} + j\frac{\alpha}{k}\right)}.$$

(10.4.22)로부터 B를 이 식에 대입하여 정리하면

$$Z_0 = \frac{\rho c}{S_0}\left[\frac{Z_l\cos(\beta l + \theta) + j\frac{\rho c}{S_l}\sin\beta l}{\frac{\rho c}{S_l}\cos(\beta l - \theta) + jZ_l\sin\beta l}\right]. \quad (24)$$

즉, 이 exponential horn의 throat impedance Z_0는 horn의 길이와 flare constant와 terminating impedance(mouth의 impedance) Z_l는 앞서 말한 대로 무한 baffle 안에 달려 있는 경우의 것. $Z_l = (\rho c / S_l)[R_1(2ka_l) + jX_1(2ka_l)]$을 사용한다. 여기서

$$R_1(2ka_l) = 1 - \frac{2J_1(2ka_l)}{2ka_l}, \ X_1(2ka_l) = \frac{2K_1(2ka_l)}{(2ka_l)^2}. \quad (25)$$

이놀을 (10.4.24)에 대입해서 정리하면

$$Z_0 = \frac{\rho c}{S_0}\cdot$$
$$\frac{\{R_1\cos(\beta l + \theta) + j[X_1\cos(\beta l + a) + \sin\beta l]\}\{[\cos(\beta l - \theta) - X_1\sin\beta l] - jR_1\sin\beta l\}}{[\cos(\beta l - \theta) - X_1\sin\beta l]^2 + R_1^2\sin^2\beta l}$$

이 throat impedance Z_0를 구한 것은 이 exponential horn으로 resonance transmissibility의 조건을 구하고자 하기 위해서다. 이 조건이 바로 $I_m Z_0 = 0$이라는 것이다. 이 조건은 바로

$$[X_1\cos(\beta l + \theta) + \sin\beta l][\cos(\beta l - \theta) - X_1\sin\beta l]$$
$$- R_1^2\sin\beta l\cos(\beta l + \theta) = 0. \quad (26)$$

이를 전개하면,

$$X_1\cos(\beta l + \theta)\cos(\beta l - \theta) - X_1^2\cos(\beta l + \theta)\sin\beta l$$
$$+ \sin\beta l\cos(\beta l - \theta) - X_1\sin^2\beta l - R_1^2\sin\beta l\cos(\beta l + \theta) = 0.$$

앞서 계산한 바에 의하면 $l \sim 2$m인 경우는 $R_1 - 1$, $X_1 \sim 10^{-3}$ 이어서 이 식에서 X_1이 들어 있는 항은 무시될 수 있어 윗식은 다음으로 요약된다.

$$\cos(\beta l - \theta) = R_1^2\cos(\beta l + \theta) \rightarrow \tan\beta l = \left(\frac{R_1^2 - 1}{R_1^2 + 1}\right) \Big/ \tan\theta. \quad (27)$$

(10.4.27)로부터 throat에서 resonance transmissibility를 얻으려는 horn의 거리 l이 나온다.

設計實例

첫째 (10.4.27)를 푸는 데 trial-and-error의 방법으로 한다. 먼저 우변을 보면 그리 심하게 변하는 함수가 아니다. 여기서 $\tan\theta = \alpha / \beta = 0.497795$로 고정된다($m = 2.8\text{m}^{-1}$, $k = \omega / c = 2\pi(171) / 342 = \pi$). 그리고 $(R_1^2 - 1) / (R_1^2 + 1) \sim 0.1$의 order 이다. 그런데 좌변은 tan 함수이므로 $x \equiv \beta l = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi$, … 부근에서, $+\infty$에서 $-\infty$로 급격히 변하는 함수이며, -0.1

정도의 값을 갖는 것은 $x = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots$ 부근이다. $\beta = 2.8124\ \mathrm{m}^{-1}$이므로 $\beta l = \pi$이면 $l = \pi / \beta = 3.1416 / 2.8124 = 1.117\ \mathrm{m}$로 (10.4.27)의 약산을 하는 데는 너무 짧다. 그리고 이 길이에서는 open end에서 reflection back하는 것이 커서 적절하지 못하다.

다음의 관심이 있는 구역은 $x = \beta l = 2\pi$의 부근이다. 여기서

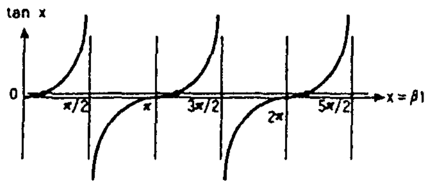

Fig. 3

는 길이 $l = 2.234\ \mathrm{m}$ 부근인데 $x = \beta l = 2\pi$이므로 (10.2.27)의 약산법이 성립되는 구역이다. 그래서 이 구역을 집중 조사키로 한다.

$x \equiv \beta l = 2\pi = 6.2832$이므로 그보다 약간 큰 몇 개를 try 해 보아서 (10.4.27)을 만족하는 x의 값을 찾는 것이다. 몇 개만 보이면,

① $\underline{x = 6.4,\ l = 2.2756\ \mathrm{m}}$

$$2ka_l = 2ka_0 e^{\frac{m}{2}l} = 2\pi a_0 e^{\frac{m}{2\beta}x}$$

$$= 2\pi 0.075 e^{1.4x/2.8124} = 0.47124 e^{0.497785x}.$$

i.e., $2ka_l = 0.47124e^{0.497785(6.4)} = 11.39871$

$$R_1 = 1 - \frac{2J_1(11.38971)}{11.39871} = 1 - \frac{2(-0.22234)}{11.39871} = 1.03901.$$

$R_1^2 = 1.07954.$

$J_1(11.3) = -0.214255$
$J_1(11.39871) = -0.22234$) 82, *HB of Math Fns*, Abramowitz and Stegun, p. 395.
$J_1(11.4) = -0.22450$

$$\frac{R_1^2 - 1}{R_1^2 + 1}(2.00859) = \frac{0.07954}{2.07954}(2.00859) = 0.076826.$$

$$\tan x = \tan 6.4 = 0.1173489.$$

우변이 ~ 0.04 크다.

② $\underline{x = 6.35,\ l = 2.257858\ \mathrm{m}}$

$$2ka_l = 0.47124e^{0.497785(6.35)} = 11.11850.$$

$$R_1 = 1 - \frac{2J_1(11.11850)}{11.11850} = 1 - \frac{2(-0.19364)}{11.11850} = 1.03483.$$

$R_1^2 = 1.070877.$

$J_1(11.1) = -0.191328$
$J_1(11.\underline{11850}) = -0.19364$) 0.01252
$J_1(11.2) = -0.203853$

$$\frac{R_1^2 - 1}{R_1^2 + 1}(2.00859) = \frac{0.070877}{2.070877}(2.00859) = 0.068745.$$

$$\tan 6.35 = 0.066914.$$

우변이 좀 작다. 따라서 x를 좀 올려야 한다.

③ $\underline{x = 6.353,\ l = 2.2589\mathrm{m}}$

$$2ka_l = 0.47124e^{0.497795(6.353)} = 11.13511774.$$

$$R_1 = 1 - \frac{2J_1(11.1351177)}{11.1351177} = 1 - \frac{2(-0.195726)}{11.1351177} = 1.0351548.$$

$R_1^2 = 1.071545.$

$J_1(11.1) = -0.191328$
$J_1(11.\underline{1351177}) = -0.195726$) 0.012525
$J_1(11.2) = -0.203853$

$$\frac{R_1^2 - 1}{R_1^2 + 1}(2.00859) = \frac{0.071545}{2.071545}(2.00859) = 0.0693707.$$

$$\tan 6.353 = 0.069928.$$

우변이 0.000558만큼 크다. 그래서 x를 좀 내려야 한다.

④ $\underline{x = 6.352,\ l = 2.258569\ \mathrm{m}}$

$$2ka_l = 0.47124e^{0.497795(6.352)} = 11.129576.$$

$$R_1 = 1 - \frac{2J_1(11.129576)}{11.129576} = 1 - \frac{2(-0.19503)}{11.129576} = 1.035047.$$

$J_1(11.1) = -0.191318$
3704
$J_1(11.1\underline{29576}) = -0.19503$) 0.012525, $R_1^2 = 1.0713226.$
$J_1(11.2) = -0.203853$

$$\frac{R_1^2 - 1}{R_1^2 + 1}(2.00859) = \frac{0.0713226}{2.0713726}(2.00859) = 0.069162.$$

$$a_l = 0.075e^{1.4(2.259)} = 1.7724\ \mathrm{m}.$$

$$\tan 6.352 = \begin{array}{r} 0.06823 \\ 0.06916 \\ \hline -0.00023 \end{array}$$

우변이 좀 작다. 따라서 x를 좀 올려야 한다.

그러나 이것으로 trial-and-error는 끝맺는다. 따라서 exponential horn을 달아서 resonance transmissibility를 성립시켜 종 내의 171 Hz의 nominal tone을 전부 뽑아 내려면 horn의 길이를 2.259 m = 225 cm 9 mm로 해야 한다. 따라서 Horn의 mouth의 반경은 1.7724 m이다.

Fig. 4. 셰 exponential horn을 부착해서 171 Hz의 fundamental tone을 종 내부에서 끄집어 내도록 개선된 종각의 설계도이다. 즉, 0.18 + 2.259 = 2.439(m)의 길이의 exponential horn을 지금의 만파식적 음관에 달아야 하며, 종각의 천장은 이보다 적어도 0.30 m 이상 높아야 그 만파식적 음관의 기능을 살릴 수가 있다.

마지막으로, 이 exponential horn을 붙였을 때 transmission coefficient α_t를 구해보자.

$$\alpha_t = \frac{4R_e\cos\theta}{R_t^2 + 2R_e\cos\theta + 1}$$

$R_t^2 = 1.0713226$

$R_t = 1.0350471$

$\tan\theta = 0.06823$

$$\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta = \sqrt{1 + \tan^2\theta} = \sqrt{1 + 0.06823^2} = 1.002325$$

$\cos\theta = 0.99768$

$$\therefore \alpha_t = \frac{4(1.0350471)(0.99168)}{1.0713226 + 2(1.0350471)(0.99768) + 1} = 0.9985$$

卽 99.8% transmitted되고,
0.2%만 reflected back한다.

V. 結　論

旣存의 萬波息笛의 音管의 機能을 살려, 聖德大王神鍾을 칠 때마다, 鐘內部의 莊嚴한 Tone이 충분히 빠져나오기만하면, 萬波息笛도 울린 꼴이 되어, 그 萬波息笛의 本來의 靈妙한 國泰民安의 구실을 다할 뿐 아니라, 그 鐘聲도 倍加되어 더욱 우렁차게 들릴 것이다.

그러기 위해 먼저

1. 18cm. 音管의 길이를 늘여서, 一段 萬波息笛으로서의 共鳴透過條件을 滿足시켜 주어야 할 것(이 Correction은 旣存의 萬波息笛音管의 形態로 그대로 살려야한다).
2. Exponential Horn

   flare constant : 2.8/m

   length : 2.259m

   mouth radius : 1.7724m

을 달아, nominal tone의 99.8 %를 뽑아낼 수 있게 할 수 있다.

이때의 exponential horn은

두께 : 8mm

자료 : Lucite (투명)

로 만들어서 添加한 exponential horn으로 하여금 直線形의 萬波息笛의 旣存模樣에 視覺上의 흠이 가지 않도록 해야 할 것이다. 그래서 이 exponential horn은 透明한 Lucite로 만들어서, 視野에 거의 들어오지 않게 하면서, Guidance의 役割을 다하도록 할 것이다.

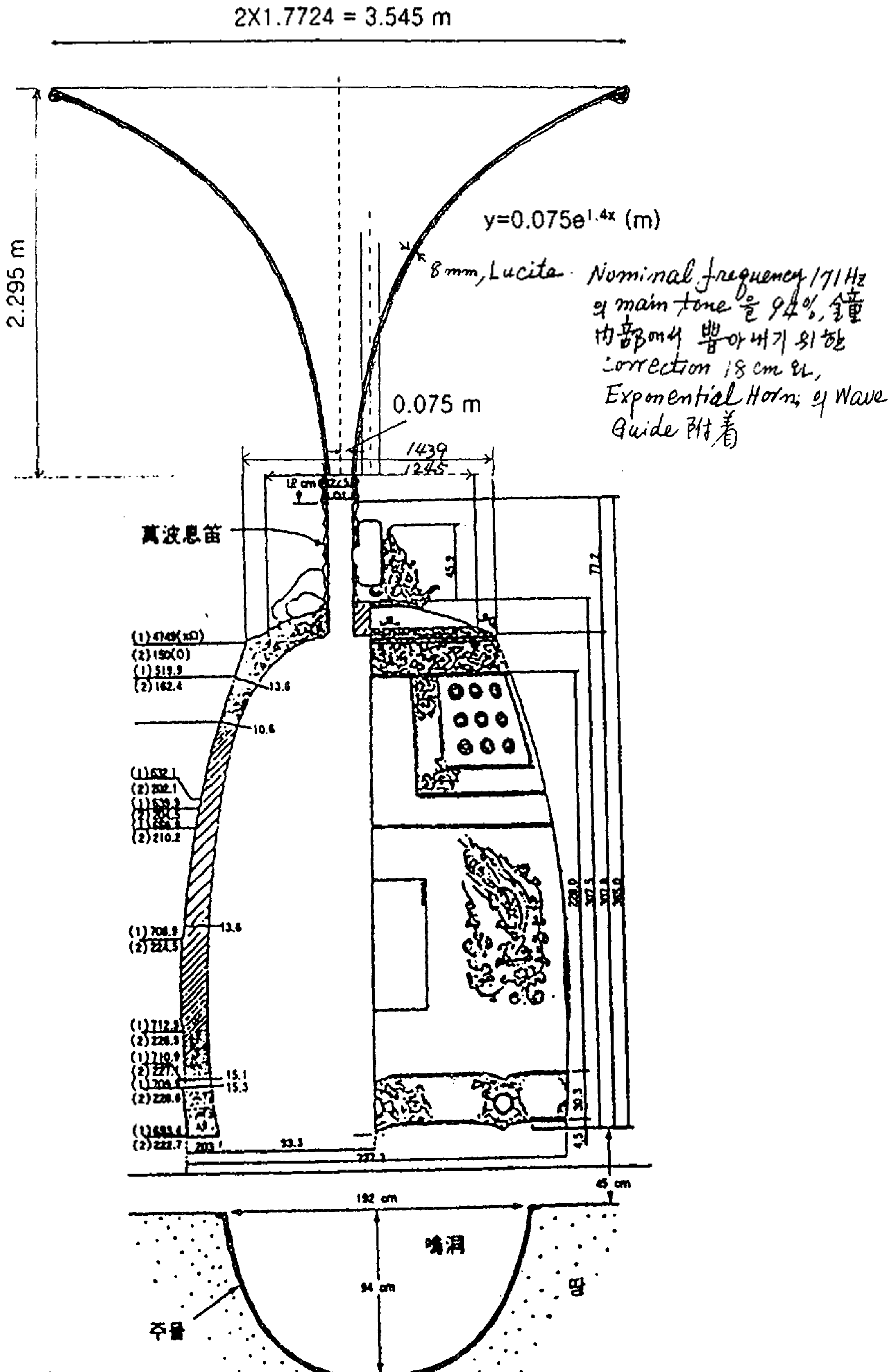

Fig. 4

聖德大王神鐘 萬波息笛音管의 機能을 살린 圖面, 李炳昊 1990年 5月