

초음파 탐촉자용 다층 압전접합체의 진동특성에 관한 이론적 해석

장환수*, 노용래**

* 경북대학교 센서공학과

** 경북대학교 센서공학과/전자전기공학부

Theoretical investigation of vibrational characteristics of a multi-layered piezoelectric element for ultrasonic transducers

Hwan Soo Jang*, Yongrae Roh**

* Dept. of Sensor Eng., Kyungpook National University

** Dept. of Sensor Eng./School of Electronic and Electrical Eng., Kyungpook National University

*soo@aslab.kyungpook.ac.kr, **ryong@eeg.kyungpook.ac.kr

요약

본 연구에서는 공중용 초음파 센서에 많이 사용되고 있는 원판형 압전소자, 정합층, 그리고 후면층, 세 부분으로 이루어진 다층 접합체의 진동 특성을 기계적 진동 방정식을 이용하여 이론적으로 해석하였으며, 해석 결과의 타당성을 유한요소 해석방법을 사용하여 검증하였다. 본 연구의 해석 방법은 다층 판, 특히 압전세라믹과 정합층으로 이루어진 2층과 후면층이 추가된 3층에 대한 진동 방정식에 적절한 경계 조건 및 수렴 조건을 적용하여 고유진동 주파수를 유도하였다. 그리고 이를 이용하여 초음파 탐촉자 개발 시 널리 사용되고 있는 설계변수 즉, 각 층의 반경, 두께, 밀도, 그리고 영률의 변화에 대한 공진주파수의 변화 경향을 분석하였다. 공진주파수 변화 경향에 대한 이 해석 방법의 타당성을 널리 사용되고 있는 유한 요소해석법을 사용하여 검증한 결과, 두 해석결과는 좋은 일치를 보였다. 그러므로 본 연구의 결과는 종래의 등가회로나 유한요소 해석법에 비해 더 간편하고, 더 정확한 해석 결과를 제공할 수 있는 해석도구로써 이용될 수 있을 것이다.

I. 서론

원판형 압전세라믹을 이용한 초음파 트랜스듀서는 의료 진단, 비파괴 검사, 수중정밀검사, 초음파 치료기 등에 많이 사용되고 있다. 전형적인 광대역 초음파 트랜스듀서의 구성 요소로는 초음파를 발생하는 압전세라믹부, 하나 또는 두 개의 정합층부, 그리고 후면층으로 구성된다. 정합층은 초음파가 전파하는 매질과의 임피던스 정합과 압전세라믹을 보호하기 위한 층이며, 후면층은 트랜스듀서의 감도는 저하시키지만 송수신 겸용 트랜스듀서에 중요한 특성인 Ringdown time를 줄이는 역할을 한다[1]. 이렇게 세 부분으로 구성된 초음파 트랜스듀서는 일반적으로 작동주파수가 낮고, 높은 구동전압을 피할 수 있다[2]. 본 연구에서는 등가회로나 유한 요소해석법에 의한 공진주파수 결정방법이 아닌 기계적 진동 변위 미분방정식을 이용하여 원판형의 압전세라믹과 정합층으로 이루어진 구조의 공진주파수의 변화 경향성을 파악하였다. 더 나아가 후면층을 추가한

구조에서의 공진주파수의 변화 경향성도 파악하였다. 이러한 진동 미분방정식을 결정하기 위해서, 운동에너지, 포텐셜에너지, 휨 모멘트와 전단력을 고려하였고, 두께보다 반경이 크다는 가정을 적용하여 휨 진동미분방정식을 유도하였다. 그리고 극좌표계를 고려하여 각도성분은 대칭조건에 의해 무관하다고 가정하였다[3]. 공진주파수를 조사하기 위해서 영률과 포아송 비를 강성계수 행렬성분들과의 관계식을 이용하여, 등방성 재료의 물성으로 변환하였고, 이 변환된 값을 가지고 이론적 해석과 유한 요소해석의 결과를 비교, 검토하였다[4,5]. 본 연구의 해석방법을 이용할 경우 공진주파수를 쉽고 정확하게 결정할 수 있으므로 사용용도에 맞는 초음파 탐촉자의 구동주파수의 결정 및 설계, 제작에 폭넓게 사용될 수 있을 것이다.

II. 이론식 유도

2.1 압전세라믹과 정합층으로 된 진동모드 해석
결합체의 구조는 그림(1)과 같이 압전세라믹과 정합층이 결합된 진동체 구조이며, 정합층의 양 끝단이 주변지지된 형태이다. 진동 방정식을 결정하기 위해서, 정합층과 압전세라믹이 공존하는 부분과 정합층만 있는 부분의 휨 중심축(Neural axis)이 서로 같다고 가정하였고, 압전세라믹과 정합층이 공존하는 부분과 정합층만 있는 부분으로 나누어 이론식을 유도하였다. 단 압전세라믹과 정합층의 접착이 완전하며, 접착층의 전단력은 없다고 가정하였다. 압전세라믹의 반경은 b , 두께는 h_1 이며, 정합층의 반경은 a , 두께는 h_2 이다. 압전세라믹과 정합층이 공존하는 부분의 변위를 $\xi(r, t)$ 라고 하면 운동 방정식이 식(1)과 같이 된다. 그리고 정합층만 있는 부분의 변위를 $\zeta(r, t)$ 라고 하면 식(2)와 같이 표현할 수 있다.

$$(D_1 + D_2)\nabla^4 \xi + (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)\ddot{\xi} = 0, 0 \leq r \leq b \quad (1)$$

$$D_2 \nabla^4 \zeta + \rho_2 h_2 \ddot{\zeta} = 0, b \leq r \leq a \quad (2)$$

운동방정식 (1), (2)의 해를 구하면 각각 식 (3), (4)가 된다.

$$\xi(r) = A_1 J_0(kr) + A_2 I_0(kr) \quad (3)$$

$$\xi(r) = A_3 J_0(kr) + A_4 Y_0(kr) + A_5 I_0(kr) + A_6 K_0(kr) \quad (4)$$

여기서, D_i 는 휨강도, ρ_i 는 밀도, ξ, ζ 는 시간에 대한 미분항, J_0, Y_0, I_0, K_0 는 Bessel함수를 나타낸다.

그리고 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 는

$$\text{상수, } k^4 = \frac{\rho_2 h_2}{D_2} \omega^2, \quad k'^4 = \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{D_1 + D_2} \omega^2, \quad \omega = 2\pi f_0,$$

f_0 는 공진주파수이다. 만약 $i=1$ 이면 압전세라믹을, $i=2$ 이면 정합층을, $i=3$ 이면 후면층을 나타낸다. 운동방정식의 해 (3), (4)의 상수 값들을 계산하기 위해서 주변지지 상태의 경계조건을 적용하였다. 경계 조건은 다음과 같다.

① $r=a$ 일 때 변위 : $\xi=0$

② $r=a$ 일 때 굽힘 수직 모멘트 :

$$D_2[\mu_2 \nabla^2 \xi + (1-\mu_2) \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2}] = 0$$

③ $r=b$ 일 때 변위의 연속성 :

$$\xi(b) = \zeta(b)$$

④ $r=b$ 일 때 변형률의 연속성 :

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{\partial \zeta}{\partial r}$$

⑤ $r=b$ 일 때 굽힘 휨 모멘트의 연속성 :

$$(D_1 + D_2) \frac{\partial \nabla^2 \xi}{\partial r} + D_2 \frac{\partial \nabla^2 \zeta}{\partial r} = 0$$

⑥ $r=b$ 일 때 굽힘 수직 모멘트의 연속성 :

$$D_1[\mu_1 \nabla^2 \xi + (1-\mu_1) \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2}] + D_2[\mu_2 \nabla^2 \xi + (1-\mu_2) \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2}] + D_2[\mu_2 \nabla^2 \zeta + (1-\mu_2) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}] = \mu_v$$

이상의 경계조건들을 식(3), (4)에 대입하여 상수 A_1, A_2 을 A_3, A_4, A_5, A_6 의 관계식으로 나타내고, 행렬 방정식으로 정리하면 식(5) 형태가 되고, $n=3, 4, 5, 6$ 이 됨을 알 수 있다. 각 행렬 $[M], [A_n], [N]$ 의 성분들을

$$ka = \tau, \quad \lambda = \frac{k'}{k}, \quad \eta = \frac{b}{a}, \quad \text{포아송 비는 } \mu_1 = \mu_2 = \mu,$$

$$kb = \eta\tau, \quad k'b = \lambda\eta\tau, \quad \gamma = \frac{D_1}{D_2} \text{로 정의하고, 또한 } \mu_v \text{는}$$

외부 인가전압에 의존하는 압전 효과에 따른 휨 모멘트이므로 그림(1) 형태의 고유 진동주파수를 구하기 위해서는 외부인가 전압을 영으로 해야 한다. 이렇게 하여 정리하면 각 행렬의 성분들이 식(6)과 같이 됨을 알 수 있으며, 공진주파수는 k'^4 또는 k^4 와 ω^2 이 관계식으로부터 계산하면, 식(7)이 된다. 식(7)에서 미결정 변수인 τ 는 지지방식과 물성, 규격에 따라 결정되는 계수이다. τ 를 결정하기 위해서는 식(5)의 non-trivial 해를 구하면 된다. 이는 곧 $\text{Det}[M]=0$ 이 되는 τ 를 구하는 것이다. 또 다른 미결정 변수인 휨 강도를 구하기 위해서 그림(1)처럼 진동면과 직각방향의 좌표를 Z축으로, 휨의 중심축(Neutral axis)을 Z축의 원점으로 두었다. 중심축에서 단면 1차 모멘트가 영이라는 조건에 의

해서 이 축에서 압전세라믹과 정합층의 경계면까지의 거리 z_0 는 $z_0 = \frac{h_2(1-\alpha\beta^2)}{2(1+\alpha\beta)}$ 식으로 표현된다. 이것을 이용하여 D_i, μ_v 를 구하면 식(8), (9)와 같이 된다[6].

$$[M][A_n] = [N] \quad (5)$$

$$[4 \times 4][4 \times 1] = [4 \times 1]$$

$$[A_n] = [A_3 \ A_4 \ A_5 \ A_6]^T, \quad [N] = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$[M] = \begin{bmatrix} J_0(\tau) & Y_0(\tau) & I_0(\tau) & K_0(\tau) \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서,

$$B_1 = J_0(\tau) - \frac{1-\mu}{\tau} J_1(\tau), \quad B_2 = Y_0(\tau) - \frac{1-\mu}{\tau} Y_1(\tau)$$

$$B_3 = -I_0(\tau) + \frac{1-\mu}{\tau} I_1(\tau), \quad B_4 = -K_0(\tau) - \frac{1-\mu}{\tau} K_1(\tau)$$

$$C_1 = b_1 J_1(\eta\tau) - J_0(\eta\tau), \quad C_2 = b_1 Y_1(\eta\tau) - Y_0(\eta\tau)$$

$$C_3 = b_2 I_1(\eta\tau) - I_0(\eta\tau), \quad C_4 = b_2 K_1(\eta\tau) - K_0(\eta\tau)$$

$$F_1 = b_3 J_1(\eta\tau) + J_0(\eta\tau) - \frac{1-\mu}{\eta\tau} J_1(\eta\tau)$$

$$F_2 = b_3 Y_1(\eta\tau) + Y_0(\eta\tau) - \frac{1-\mu}{\eta\tau} Y_1(\eta\tau)$$

$$F_3 = b_4 I_1(\eta\tau) - I_0(\eta\tau) + \frac{1-\mu}{\eta\tau} I_1(\eta\tau)$$

$$F_4 = -b_4 K_1(\eta\tau) - K_0(\eta\tau) - \frac{1-\mu}{\eta\tau} K_1(\eta\tau)$$

$$b_1 = \frac{J_0(\lambda\eta\tau)}{2J_1(\lambda\eta\tau)} \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2(1+\gamma)}\right)$$

$$- \frac{I_0(\lambda\eta\tau)}{2I_1(\lambda\eta\tau)} \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{\lambda^2(1+\gamma)}\right)$$

$$b_2 = -\frac{J_0(\lambda\eta\tau)}{2J_1(\lambda\eta\tau)} \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{\lambda^2(1+\gamma)}\right)$$

$$+ \frac{I_0(\lambda\eta\tau)}{2I_1(\lambda\eta\tau)} \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2(1+\gamma)}\right)$$

$$b_3 = \left(\frac{J_0(\lambda\eta\tau)}{J_1(\lambda\eta\tau)} - \frac{1-\mu}{\lambda\eta\tau}\right) \frac{\lambda(1+\gamma)}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2(1+\gamma)}\right)$$

$$+ \left(\frac{I_0(\lambda\eta\tau)}{I_1(\lambda\eta\tau)} - \frac{1-\mu}{\lambda\eta\tau}\right) \frac{\lambda(1+\gamma)}{2} \left(1 + \frac{1}{\lambda^2(1+\gamma)}\right)$$

$$b_4 = -\left(\frac{J_0(\lambda\eta\tau)}{J_1(\lambda\eta\tau)} - \frac{1-\mu}{\lambda\eta\tau}\right) \frac{\lambda(1+\gamma)}{2} \left(1 + \frac{1}{\lambda^2(1+\gamma)}\right)$$

$$- \left(\frac{I_0(\lambda\eta\tau)}{I_1(\lambda\eta\tau)} - \frac{1-\mu}{\lambda\eta\tau}\right) \frac{\lambda(1+\gamma)}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2(1+\gamma)}\right)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D_2}{\rho_2 h_2} \frac{\tau^4}{a^4}} \quad (7)$$

$$D_1 = \frac{E_1 h_1^3}{3(1-\mu_1^2)} \left[\beta^3 + \frac{3}{2} \beta^2 \phi + \frac{3}{4} \beta \phi^2\right]$$

$$D_2 = \frac{E_2 h_2^3}{3(1-\mu_2^2)} \left[1 - \frac{3}{2} \phi + \frac{3}{4} \phi^2\right]$$

$$\phi = \frac{(1-\alpha\beta^2)}{1+\alpha\beta} \quad (8)$$

$$\mu_v = \frac{E_1 E_2 h_2 e_{31}^2 V}{2} \left[\frac{h_1 + h_2}{E_1 h_1 + E_2 h_2}\right] \quad (9)$$

여기서, E_i 는 영률, h_i 는 두께, V 는 외부 인가전압, e_{31}^2 는 직교좌표계를 극좌표계로 변환하였을때의 압전 상수, $\alpha = E_1/E_2$, $\beta = h_1/h_2$ 를 나타낸다. 그러므로 2층으로 이루어진 결합구조체의 물성과 규격만으로, 식

(7)으로부터 그 구조체의 공진주파수를 결정할 수 있다.

2.2 압전세라믹, 정합층, 후면층의 진동모드 해석

그림(2)는 압전세라믹, 정합층으로 이루어진 구조에서 압전세라믹의 후면에 후면층을 추가한 것이다. 후면층의 반경은 압전세라믹과 같으며, 두께는 h_3 이다. 2층에 적용되었던 가정들을 3층의 진동 미분방정식유도에 모두 적용하였다. 또한 후면층은 압전세라믹의 진동모드에만 의존한다고 가정하였고, 중심축이 정합층에 있다고 가정하여 운동방정식을 유도하였다. 2층 유도방법과 같은 방식으로 압전세라믹, 정합층, 후면층이 있는 부분의 변위를 $\xi_3(r, t)$, 정합층만 있는 부분의 변위를 $\xi_3(r, t)$ 로 나누어서 이론식을 유도하였다. 각 부분의 운동방정식은 식 (10), (11)이 된다.

$$(D_{31} + D_{32} + D_{33})\nabla^4 \xi_3 + (\rho_{31}h_{31} + \rho_{32}h_{32} + \rho_{33}h_{33}) \ddot{\xi}_3 = 0, 0 \leq r \leq b \quad (10)$$

$$D_{32}\nabla^4 \xi_3 + \rho_{32}h_{32} \ddot{\xi}_3 = 0, b \leq r \leq a \quad (11)$$

2층구조의 경계조건 ①~④는 그대로 적용되었으며, 나머지 경계조건인 ⑦, ⑧은 다음과 같다.

⑦ $r=b$ 일 때 굽힘 휨 모멘트의 연속성 :

$$(D_{31} + D_{32} + D_{33})\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial r^2} + D_{32}\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial r^2} = 0$$

⑧ $r=b$ 일 때 굽힘 수직 모멘트의 연속성 :

$$D_{31}[\mu_1 \nabla^2 \xi_3 + (1-\mu_1)\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial r^2}] + D_{32}[\mu_2 \nabla^2 \xi_3 + (1-\mu_2)\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial r^2}] + D_{33}[\mu_3 \nabla^2 \xi_3 + (1-\mu_3)\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial r^2}] + D_{32}[\mu_2 \nabla^2 \xi_3 + (1-\mu_2)\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial r^2}] = u_v$$

여기서, D_{3i} 는 3층구조에서의 휨 강도, ρ_{3i} 은 3층구조에서의 밀도, h_{3i} 는 3층구조에서의 각 층의 두께를 나타내며, u_v 는 3층구조에서의 압전효과에 의한 휨 모멘트를 나타낸다. 3층 구조의 공진주파수를 구하기 위해서는 식(10), (11)의 해를 구하고, 경계조건을 적용하여 2층구조에서 유도한 방법과 같은 방법으로 이론식을 전개하면 고유 진동주파수를 구할 수 있으며, 3층구조의 공진주파수 형태는 식(7)과 같으나 그 성분 값들은 다르다.

III. 유한 요소해석법과 이론식 해석의 비교

3.1 모델링과 진동 모드 분석

압전세라믹과 정합층으로 된 구조(그림1)와 후면층이 추가된 구조(그림2)를 각각 유한 요소해석 상용 프로그램을 사용하여 모델링하고, Modal 분석을 통하여 이론식과 타당성을 검증하였다. 2층구조일 때 압전세라믹의 규격은 반경 3.6, 두께 0.25 mm이고, 정합층의 규격은 반경 4.15, 두께 0.5 mm, 노드(node)수는 755, 요소(element)수는 446개이다. 3층구조일 때 압전세라믹의

규격은 두께 0.1, 정합층의 규격은 두께 0.2 mm, 후면층의 규격은 두께 0.25 mm, 노드(node)수는 964, 요소(element)수는 640개이다. 그리고 2층과 3층구조 모두에 반경과 물성은 동일한 값을 적용하고, 이론식 적용된 경계조건을 사용하였다. 이상과 같이 모델링된 2층과 3층구조에 대한 Modal 분석을 통하여 진동모드를 조사하였고, 그 예로 2층구조에 대한 진동모드를 그림(3)에 나타내었다.

3.2 유한요소법과 이론식의 공진주파수 비교

각각의 설계변수조절에 대한 공진주파수 경향성을 조사하기 위해서 두께, 밀도, 영률을 일정한 비율로 증가 또는 감소시키면서 유한 요소해석법에서의 공진주파수와 이론식에서의 공진주파수의 변화 경향을 비교하였다. 특히 반경에 대해서는 압전세라믹과 정합층 모두 3.6~4.15 mm 까지 변화시키면서 공진주파수의 변화 경향을 파악하였다. 2층구조의 경우에 압전세라믹과 정합층의 설계변수들에 따른 공진주파수의 변화 경향을 그림(4), (5)에 나타내었다. 3층구조에 대해서는 압전세라믹, 정합층, 후면층에 대한 설계변수들 중 정합층의 설계변수들에 대한 공진주파수 변화 경향을 그림(6)에 나타내었다. 이론식 결과와 유한요소 해석법의 결과의 오차는 약 1~2 % 정도였다. 또한 3층구조에서의 압전세라믹과 후면층의 설계변수들에 대해서도 이론식과 유한 요소해석법의 결과를 비교해 보았다. 그 결과 정합층에서 나타난 공진주파수 변화 경향과 같은 오차 범위에서 변화 경향성을 보였다.

IV. 결론

압전세라믹과 정합층으로 이루어진 원판형 초음파 탐촉자의 구조에 대한 진동모드의 해석을 등가회로용이 사용하지 않고, 기계적 진동미분방정식에 경계조건과 수렴조건을 적용하여 해석하였다. 그리고 2층 구조에 후면층을 추가한 원판형 초음파 탐촉자의 진동모드에 대해서도 같은 방법으로 해석을 수행하였다. 그리고 설계변수들의 변화에 대한 고유진동 주파수의 변화 경향성을 조사하였다. 본 연구의 이론적 해석결과의 타당성을 검증하기 위해서 유한 요소해석법을 사용하였으며, 그 결과 유한 요소해석법과 기계적 운동방정식을 이용한 해석법과의 결과가 잘 일치하는 것을 확인하였다. 따라서 본 연구에서 유도한 공진주파수 결정 방법을 사용하면 다층 집합체의 초음파 탐촉자 모델에 대한 진동모드 해석을 쉽고, 정확하게 할 수 있다.

참 고 문 헌

1. A. Iula, N. Lamberti, and M. Pappalardo, "An Approximated 3-D Model of Cylinder-Shaped Piezoceramic Elements for Transducer Design," IEEE Transaction on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, Vol. 45, No. 4, p. 1056, July, 1998.
2. A. Iula, N. Lamberti, R. Carotenuto, and M. Pappalardo, "A 3-D Model of The Classical Langevin Transducer," IEEE Ultrasonic Sym-

posium, p. 987, 1997.

3. C. J. Wellekens, "Vibrations of Backed Piezoceramic Disk-Transducers with Annular Electrodes and Matching Layers-Part I," IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, Vol. Su-29, No. 1, p. 26 January, 1982.
4. O. B. Wilson, "Introduction to Theory and Design of Sonar Transducers," p. 52, 1988.
5. T. Ikeda, "Fundamentals of Piezoelectricity," p. 40, 1990.
6. S. P. Timoshenko, J. M. Gere, "Theory of Elastic Stability," 2nd edition, p. 319-320, 1963.

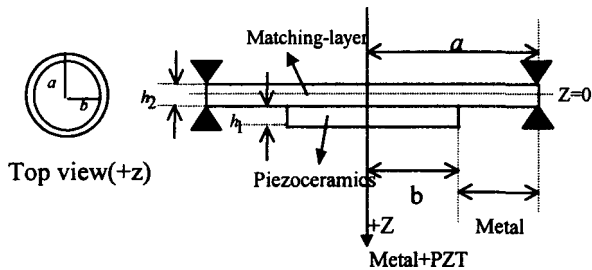


Fig 1. Cross-section of Piezoceramics, Matching-layer

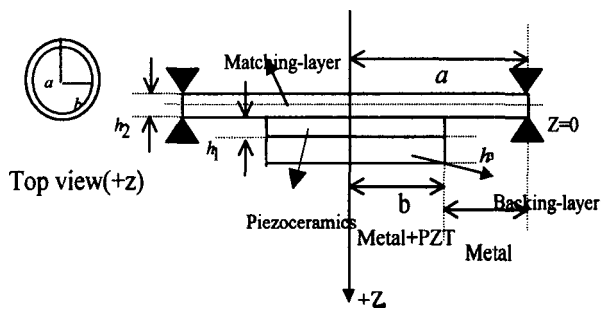


Fig 2. Cross-section of Piezoceramics, Matching-layer, Backing-layer

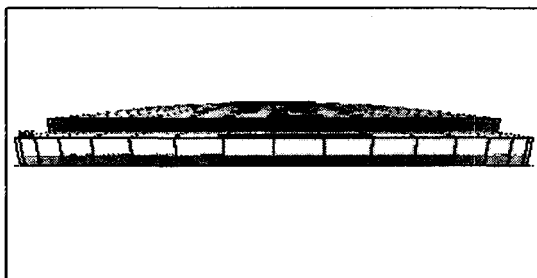


Fig 3. Shape of Vibration Mode

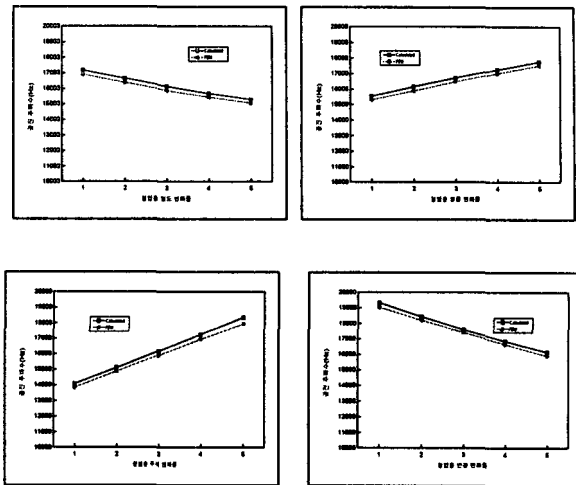


Fig 4. Tendency of Resonant Frequency for matching-layer (2-layer)

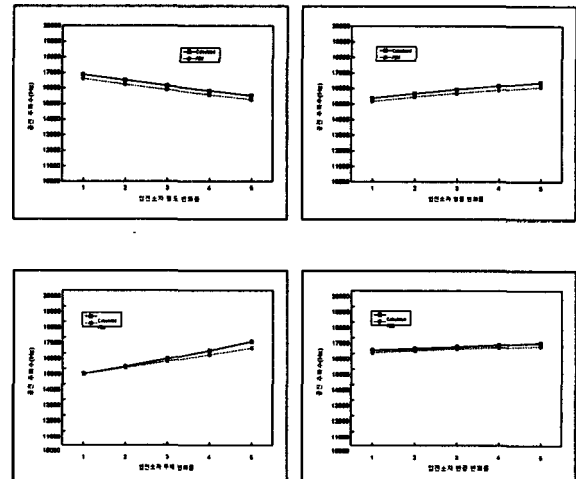


Fig 5. Tendency of Resonant Frequency for Piezoceramics (2-layer)

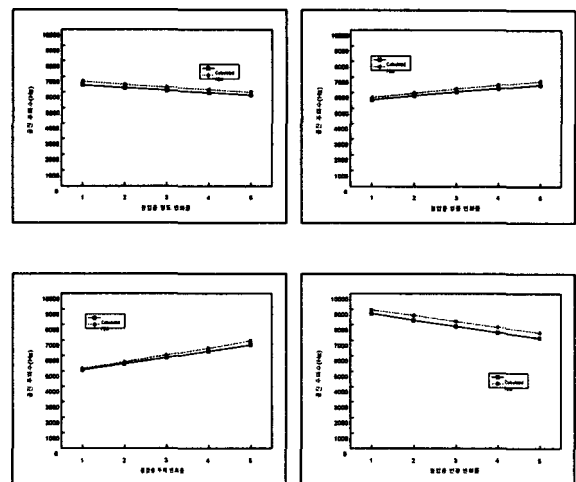


Fig 6. Tendency of Resonant Frequency for Matching-layer (3-layer)