

탄성파를 이용한 평판의 강제 내면진동 해석

길 현 권*, 최 재 성*, 홍 석 윤**

*수원대학교 기계공학과, **서울대학교 조선해양공학과

Wave Analysis of Forced In-Plane Vibration of Plates

Hyun-Gwon Kil, Jae-Sung Choi, Suk-Yoon Hong

요 약

평판의 일반적인 형태의 진동을 해석하기 위해서는, 외면진동뿐만이 아니라 내면진동을 해석하여야 한다. 평판 내면진동의 경우 탄성파인 종파와 전단파의 전파에 의한 영향으로 발생하며, 진동 변위, 진동 에너지, 진동 인텐시티 등의 특성들을 이해하기 위해서는 각 파동의 영향을 분리하여 낼 필요가 있다. 내면진동을 해석하기 위하여 진동 모드법을 사용할 수 있으나, 각 파동에 의한 영향을 분리하여 낼 수가 없다. 본 논문에서는 진동장을 탄성파들에 의한 영향의 합으로 나타냄으로써, 각 파동에 의한 진동 변위, 진동 에너지, 진동 인텐시티 등의 영향들을 분리할 수 있는 해석 방법을 제안하고자 한다. 이러한 해석 방법을 이용하여 점가진력에 의하여 강제 진동하는 평판의 내면 진동장에 대한 수치 계산을 수행하였다. 결과로써 진동 변위, 진동 에너지, 진동 인텐시티 등을 이루는 탄성파들의 기여도와 특성들을 분석함으로써 본 해석 기법의 유용성을 보였다.

I. 서 론

평판 진동의 경우 일반적으로 외면진동만을 고려한 해석이 이루어져 왔다. 그러나 임의 방향을 갖는 가진력에 의한 진동의 경우, 평판의 외면진동뿐만이 아니라 내면진동을 고려한 해석을 수행하여야 한다. 단순 평판의 경우에는 두 진동들간의 연성이 존재하지 않으므로, 각각 분리하여 해석할 수 있다. 그리고 평판 복합 구조물의 경우에는 구조요소들의 경계에서 외면진동과 내면진동의 연성이 발생하므로 두 진동을 함께 고려한 해석을 수행하여야 한다.

평판과 평판 복합구조물의 내면진동에 대한 해석 연구는 최근에 점차 증가하고 있으며 문헌으로서는 [1-5]를 들 수가 있다. 해석 방법으로써는 주로 진동 모드법을 이용하고 있는데, 진동 모드법을 이용하는 경우 각 파동에 의한 영향을 분리하여 낼 수 없는 단점이 있다. 평판 내면진동의 경우 탄성파인 종파와 전단파의 전파에 의한 영향으로 발생하며, 진동 특성(진동 변위, 진동 변위, 진동 에너지,

진동 인텐시티 등)들을 이해하기 위해서는 각 파동의 영향을 분리하여 낼 필요가 있다. 나아가서 평판 복합 구조물의 경우 구조 요소들의 경계에서 발생하는 굽힘파, 종파 그리고 전단파들간의 연성 현상을 해석하기 위해서는 각 파동들간의 영향을 분리할 수 있어야 한다.

본 연구에서는 탄성파를 이용한 평판 복합구조물 강제진동 해석의 첫 단계로서, 단순 평판의 강제 내면진동 해석을 수행하였다. 단순 평판의 강제 내면 진동장을 탄성파들에 의한 영향의 합으로 나타냄으로써, 각 파동에 의한 진동 변위, 진동 에너지, 진동 인텐시티 등의 영향들을 분리할 수 있는 해석 방법을 제안하였다. 이러한 해석 방법을 이용하여 점가진력에 의하여 강제 진동하는 평판의 내면 진동장에 대한 수치 계산을 수행하였다. 결과로써 진동 변위, 진동 에너지, 진동 인텐시티 등을 이루는 탄성파들의 기여도와 특성들을 분석함으로써 본 해석 기법의 유용성을 보였다.

II. 평판의 내면진동 해석

2.1 평판 내면진동의 파동해

그림 1과 같이 (x_0, y_0) 의 위치에 작용하는 원진동수 ω 의 조화력 $F(t) = F_0 \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) e^{i\omega t}$ 에 의하여 발생하는 평판의 내면진동을 고려한다. 평판을 ①과 ②영역으로 나누어 각 영역의 진동을 고려하는 경우, 가진 조건을 경계조건과 마찬가지로 고려할 수 있다. 그러므로 각 영역에서의 진동 형태를 자유진동처럼 취급할 수 있다. 각 영역에서 내면진동에 대한 운동방정식은 u (x 축 방향 변위 성분)와 v (y 축 방향 변위성분)를 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$[L] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (1)$$

여기서 $[L]$ 은 선형 미분연산자 행렬을 나타내고 문헌[6]을 참고할 수 있다. 평판의 내면진동은 다양한 방향으로 전파하는 파동들의 영향으로 발생한다고 볼 수 있다. 파동의 파수와 전파방향은 다음과 같은 파동 벡터로 정의할 수 있다.

$$\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y \quad (2)$$

여기서 k_x 는 x 축 방향 파수 성분, k_y 는 y 축 방향 파수 성분을 나타낸다. 이러한 파동이 야기하는 변위 성분들은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$u = \hat{u} e^{i(-k_x x - k_y y + \omega t)} \quad (3)$$

$$v = \hat{v} e^{i(-k_x x - k_y y + \omega t)} \quad (4)$$

이들을 식(1)에 대입하면, 다음과 같은 식을 얻는다.

$$[L'] \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (5)$$

여기서

$$[L'] =$$

$$\begin{pmatrix} -k_x^2 - \frac{1-\nu}{2} k_y^2 - \frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 & i \frac{1-\nu}{2} k_x k_y \\ -i \frac{1-\nu}{2} k_x k_y & -k_y^2 - \frac{1-\nu}{2} k_x^2 - \frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

그리고 E 와 ν 는 탄성계수와 Poisson비를 각각 나타낸다. 식(5)의 두 번째 식으로부터 해당 파동이

야기하는 변위 성분들의 비는 다음의 관계를 갖음을 알 수 있다.

$$\frac{\hat{v}}{\hat{u}} = i \frac{1}{2} \frac{(1-\nu) k_x k_y}{k_y^2 + \frac{1-\nu}{2} k_x^2 - \frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2} \quad (7)$$

이러한 관계는 평판에서 전파하는 파동과 관련된 고유한 특성에 해당한다. 식(5)에서 \hat{u} 와 \hat{v} 에 대한 해가 존재하기 위해서는 $[L']$ 행렬식의 값이 0이어야 하며, 이러한 조건으로부터 다음과 같은 파동의 전파를 지배하는 분산식을 얻을 수 있다.

$$[(k_x^2 + k_y^2) - k_i^2][(k_x^2 + k_y^2) - k_s^2] = 0 \quad (8)$$

여기서 k_i 과 k_s 는 각각 종파와 전단파의 파수를 나타낸다. 식(8)은 또한 다음과 같이 표현할 수 있으며

$$k_i^2 = k_{ix}^2 + k_{iy}^2 = \frac{\omega^2}{c_i^2}, \quad k_s^2 = k_{sx}^2 + k_{sy}^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2} \quad (9)$$

각각 종파와 전단파에 대한 분산식에 해당한다. $c_i = [E/\rho(1-\nu^2)]^{1/2}$ 과 $c_s = [E/2\rho(1+\nu)]^{1/2}$ 는 종파와 전단파의 전파속도를 나타내며, 여기서 ρ 는 재료의 밀도를 나타낸다. 식(9)의 분산식으로부터 주어진 진동수에서 각 파동이 갖는 파수는 $(\pm k_{ix}, \pm k_{iy})$ 와 $(\pm k_{sx}, \pm k_{sy})$ 임을 알 수 있다. 여기서 이러한 파수 성분들의 조합은 4개의 다른 방향을 갖고 전파되어 나가는 파동의 파수 성분들에 해당한다.

①과 ② 영역 ($j=1,2$)에서 진동장은 종파 (i)와 전단파 (s)에 의한 영향의 합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_j = [u_{ij}(x, y) + u_{sj}(x, y)] e^{-i\omega t} \quad (10)$$

여기서 y 방향을 따라서는 $y=0, L_y$ 에서의 단순지지 경계조건을 만족하는 진동 모드 형태를 고려하고, x 축을 따라서는 $+x$ 방향과 $-x$ 방향으로 전파하는 파동을 고려할 수 있다. 따라서 각 파동에 기인한 변위들을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u_{ip}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^2 U_{nipm} e^{ik_{nmx}} \sin k_{ny} y \quad (11)$$

$$v_{ip}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^2 V_{nipm} e^{ik_{nmx}} \cos k_{ny} y \quad (12)$$

여기서 $k_{ny} = n\pi/L_y$ 이며, 각 영역은 $j=1,2$ 로 중

파 및 전단파에 대해서는 $p=l, s$ 로 고려한다. $k_{n\beta mx}$ 는 종파의 경우 ($p=l$)로 고려되며 다음과 같이 표시된다.

$$k_{n1lx} = -k_{nlx}, \quad k_{n1lx} = k_{nlx} \quad (13)$$

즉 $+x$ 와 $-x$ 방향으로 전파하는 종파의 x 방향 파수를 나타내며, k_{nlx} 는 $k_{nlx} = \sqrt{k_l^2 - k_{ny}^2}$ 와 같이 표시된다. 전단파에 대해서도 마찬가지로 고려될 수 있다. 그리고 해당 변위 성분들의 크기는 본문의 식(7)처럼 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\frac{V_{n\beta pm}}{U_{n\beta pm}} = i \frac{(1+\nu)}{2 \left\{ \frac{1-\nu}{2} k_{n\beta mx}^2 + k_{ny}^2 - k_l^2 \right\}} \quad (14)$$

점 가진력 또한 y 에 대한 sin 급수로 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$F\delta(x-x_0)\delta(y-y_0) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) \sin k_{ny}y \quad (15)$$

여기서

$$F_n(x) = \frac{2}{L_y} F_0 \sin k_{ny}y_0 \delta(x-x_0) \quad (16)$$

진동 변위 성분들을 구하기 위해서는 식(11), (12)에서 각 n 값에 대하여 각 영역에서 4개의 미지수 항들, 즉 $U_{n\beta pm}$ ($j=1, 2$ 그리고 $p=1, 2$)을 결정하여야 한다. 이들 미지수들은 경계조건 및 가진 조건으로부터 구할 수 있다. 단순 지지된 경계 조건은 경계선 $x=0$ 와 $x=L_x$ 에서 y 축 방향의 변위와 수직력 N_{xx} 이 발생하지 않는 조건에 해당하며 다음과 같이 표현된다.

$$u_1(0, y) = 0, \quad N_{xx1}(0, y) = 0 \quad (17)$$

$$v_2(L_x, y) = 0, \quad N_{xx2}(L_x, y) = 0 \quad (18)$$

가진점의 위치에서는, 즉 두 영역의 연결지점에서 변위의 연속성으로부터 다음의 관계를 얻는다.

$$u_1(x_0, y) = u_2(x_0, y) \quad (19)$$

$$v_1(x_0, y) = v_2(x_0, y) \quad (20)$$

그리고 전단력 N_{xy} 과 수직력 N_{xx} 을 고려한 각 방향에 대한 힘의 평형 조건으로부터 다음의 식들을 얻는다.

$$N_{xy1}(x_0, y) = N_{xy2}(x_0, y) \quad (21)$$

$$N_{xx2}(x_0, y) - N_{xx1}(x_0, y) = F\delta(x_0, y_0) \quad (22)$$

식 (17)-(22)의 조건은 식 (12)-(13)의 해당 변위의 각 n 값 성분에 대하여 적용된다. 그러므로 식 (17)-(22)의 조건식으로부터 각 n 값에 대하여 미지수 $U_{n\beta pm}$ 과 $V_{n\beta pm}$ 를 결정할 수 있고, 해당 변위 성분들과 각 파동의 영향을 구할 수 있다.

2.2 진동 에너지 및 인텐시티

진동 변위 성분들을 구하게 되면, 각 영역에서의 진동 에너지 밀도는 다음과 같이 구할 수 있다 [7].

$$\begin{aligned} \langle e_j \rangle = & \frac{\rho h}{4} \text{Re} \left[c_l^2 \frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial u_j^*}{\partial x} + c_l^2 \frac{\partial v_j}{\partial y} \frac{\partial v_j^*}{\partial y} \right. \\ & + 2\nu c_l^2 \frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial v_j^*}{\partial y} + 2c_s^2 \frac{\partial u_j}{\partial y} \frac{\partial v_j^*}{\partial x} \\ & \left. + c_s^2 \frac{\partial v_j}{\partial x} \frac{\partial v_j^*}{\partial x} + \frac{\partial u_j}{\partial t} \frac{\partial u_j^*}{\partial t} + \frac{\partial v_j}{\partial t} \frac{\partial v_j^*}{\partial t} \right] \quad (23) \end{aligned}$$

여기서 첨자 *는 공액 복소수를 나타낸다. 진동 파워 흐름을 나타내는 인텐시티 벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$I_j(x, y) = I_{xj}(x, y) \tilde{e}_x + I_{yj}(x, y) \tilde{e}_y \quad (24)$$

인텐시티 벡터의 각 성분들의 시간평균값은 진동 변위 성분들로 다음과 같이 구할 수 있다 [7].

$$\begin{aligned} \langle I_{xj} \rangle = & -\frac{\rho h}{2} \left[c_l^2 \frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial u_j^*}{\partial t} + \nu c_l^2 \frac{\partial v_j}{\partial y} \frac{\partial u_j^*}{\partial t} \right. \\ & \left. + c_s^2 \frac{\partial v_j}{\partial y} \frac{\partial v_j^*}{\partial t} + c_s^2 \frac{\partial u_j}{\partial y} \frac{\partial v_j^*}{\partial t} \right] \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle I_{yj} \rangle = & -\frac{\rho h}{2} \left[c_l^2 \frac{\partial v_j}{\partial y} \frac{\partial v_j^*}{\partial t} + \nu c_l^2 \frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial v_j^*}{\partial t} \right. \\ & \left. + c_s^2 \frac{\partial v_j}{\partial x} \frac{\partial u_j^*}{\partial t} + c_s^2 \frac{\partial u_j}{\partial y} \frac{\partial u_j^*}{\partial t} \right] \quad (26) \end{aligned}$$

진동 에너지 밀도와 인텐시티는 식(23)-(26)에서 알 수 있듯이 파동 성분들에 의한 연성이 존재함을 알 수 있다. 이러한 점을 고려하면, 진동에너지 밀도와 인텐시티는 다음과 같이 종파에와 전단파에 의한 영향과 기타의 영향으로 구분할 수 있다.

$$\langle e_j \rangle = \langle e_j \rangle_l + \langle e_j \rangle_s + \langle e_j \rangle_{etc} \quad (27)$$

$$\langle I_{xj} \rangle = \langle I_{xj} \rangle_l + \langle I_{xj} \rangle_s + \langle I_{xj} \rangle_{etc} \quad (28)$$

$$\langle I_{yj} \rangle = \langle I_{yj} \rangle_l + \langle I_{yj} \rangle_s + \langle I_{yj} \rangle_{etc} \quad (29)$$

여기서 첨자 *etc* 는 기타 영향을 나타내며, 종파와 전단파의 연성에 의한 영향 그리고 감쇠파와 각 파동간의 연성 그리고 감쇠파 자체에 의한 영향을 나타낸다 (자세한 설명은 다음 장의 내용을 참고). 각 파동에 의한 영향은 각 영역에서 해당하는 파동의 변위 성분들을 식(23)-(26)에 대입함으로써 구할 수 있다.

III. 계산 결과 및 분석

그림 1에서와 같이 원진동수 ω 를 갖고 $x_0 = 1.5 \text{ m}$, $y_0 = 2.5 \text{ m}$ 의 지점에 작용하는 점가진력에 의하여 발생하는 평판의 내면진동을 고려하였다. 평판은 가로 및 세로 각각 5 m , 두께 0.01 m 인 알루미늄으로, 밀도 $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$, 탄성계수 $E = 7.1 \times 10^{10} \text{ Pa}$, Poisson비 $\nu = 0.33$ 을 사용하였다. 구조감쇠를 고려하기 위하여 탄성계수를 복소수 $E(1 - i^* \eta)$ 를 고려하고, 감쇠계수 $\eta = 0.005$ 를 사용하였다.

그림 2는 진동수 5000 Hz 에서 파동의 분산식으로부터 구한 파동의 분산 관계를 보여주고 있다. 그림에서 $k_x^* = k_x L_x / \pi$ 는 x 방향의 무차원화된 파수이며, $k_y^* = k_y L_y / \pi$ 는 y 방향의 무차원화된 파수로 식(11)-(12)의 y 방향 모드 수인 n 에 해당한다. 그림 2에서 왼쪽의 원은 종파 그리고 바깥쪽의 원은 전단파에 해당한다. 그림 2의 결과는 주어진 n 값에 대하여 $n=9$ 까지는 두 종류의 전파성 파동인 종파와 전단파가 동시에 존재함을 보여준다. $n=10$ 과 $n=15$ 사이에서는 전파성 파동으로는 전단파만이 존재하며, 나머지 한 종류의 파동은 감쇠파에 해당한다. 그리고 $n=16$ 부터는 전파성 파동이 존재하지 않음을 알 수 있다. 따라서 내면 진동장은 두 종류의 전파성 파동인 종파와 전단파 그리고 감쇠파의 영향으로 이루어짐을 알 수 있다. 감쇠파의 영향은 가진점 주위와 경계면 주위의 근접장에서 나타나게 된다.

진동수 5000 Hz 에서 평판의 내면 진동장을 예측하기 위하여 $n=20$ 까지 고려하였다. 그림 3은 평판 표면의 32×32 위치에서 예측한 진동장 데이터로부터 2차원 FFT(Fast Fourier Transform)기법을 이용하여, 각 방향으로 전파하는 파동의 영향을

분리하여 얻은 파수 스펙트럼 결과이다. 그림 3(a)와 (b)는 각각 평판 표면에 걸친 x 방향 변위와 y 방향 변위의 결과로부터 구한 파수 스펙트럼 결과를 나타낸다. 파수 스펙트럼 결과로부터 전파성 파동의 분산관계와 두드러진 기여도를 갖는 파동을 분리하여 낼 수 있다. 5000 Hz 에서는 $k_x^* = 6$, $k_y^* = 7$ 을 갖는 종파성분이 주된 영향을 끼치고 있음을 알 수 있다.

그림 4(a)는 진동수 5000 Hz 로 진동하는 평판에서 진동에너지밀도의 시간 평균값 결과를 보여 주고 있다. 진동에너지밀도 또한 종파와 전단파의 영향을 분리하여 낼 수가 있다 (그림 4(b)와 4(c)). 진동에너지밀도 결과로부터는 감쇠가 어느 정도 큰 경우를 제외하고는 가진점의 위치를 파악하기가 쉽지가 않다. 가진점의 위치는 진동에너지를 흐름인 인텐시티를 보여주는 그림 5(a)로부터 파악할 수 있다. 그림 5(a)는 평판 표면에서의 전체 진동에너지 흐름 방향을 잘 보여주고 있으며, 그림 5(b)와 (c)는 종파와 전단파의 전파에 기인한 진동 인텐시티를 분리한 결과를 보여준다. 본 수치 계산에서는 진동수 5000 Hz 에서의 결과들을 보여 주고 있는데, 다른 진동수에서의 해석도 같은 방법으로 이루어질 수 있다.

IV. 결론

본 연구에서는 평판의 내면 진동장을 탄성파들에 의한 영향의 합으로 나타냄으로써, 각 파동에 의한 진동 변위, 진동 에너지, 진동 인텐시티 등의 영향들을 분리할 수 있는 해석 방법을 제안하였다. 이러한 해석 방법을 이용하여 점가진력에 의하여 강제 진동하는 평판의 내면 진동장에 대한 수치 계산을 수행하였다. 결과로써 진동 변위, 진동 에너지, 진동 인텐시티 등을 이루는 탄성파들의 기여도와 특성들을 분석함으로써 본 해석 기법의 유용성을 보였다.

후 기

본 연구는 수중음향특화연구센터 연구과제의 일부 분으로서 국방과학연구소의 지원으로 수행되었으며 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

- (1) B. A. Ovunc, " In-Plane Vibration of Plates

Under External Disturbances Applied At Singular Points," J. Thin-Walled Structures 18, pp.83-95.

(2) K. M. Liew, K.C. Hung and M.K. Lim, "Three-Dimensional Vibration of Rectangular Plates: Variance of Simple Support Conditions and Influence of In-plane Inertia," Int. J. Solids Struct. 31, pp. 3233-3247, 1994.

(3) E. Rrebillard and J. L. Guyader, "Vibrational Behaviour of a Population of Coupled Plates: Hypersensitivity to the Connexion Angle," J. Sound Vib. 188(3), pp. 435-454, 1995.

(4) N. H. Farag and J. Pan, "Free and Forced In-Plane Vibrtion of Rectangular Plates," J.

Acoust. Soc. Am. 103(1), pp. 408-413, 1998.(5) N. H. Farag and J. Pan, "On the Free and Forced Vibration of Single and Coupled Rectangular Plates," J. Acoust. Soc. Am. 104(1), pp. 204-216, 1998.

(6) J.D. Achenbach, *Wave Propagation in Elastic Solides*, North-Holland Publishing Co., 1975.

(7) A.J. Romano, P.B. Abraham, E.G Williams,"A Poynting Vector Formulation for Thin Shells and Plates and Its Application to Structural Intensity Analysis and source Localization. Part I: Theory," J. Acoust. Soc. Am. 87(3), pp.1166-1175, 1990.

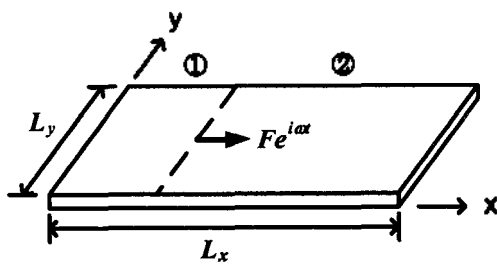


Fig. 1 Plate driven by a point force in x direction.

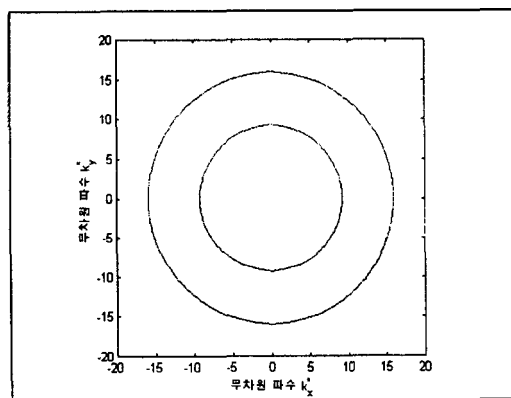
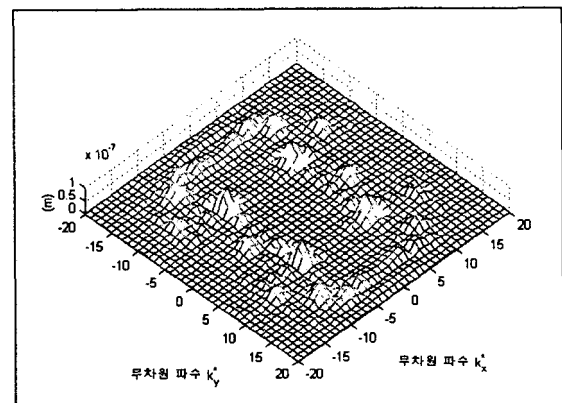


Fig. 2 Dispersion relation of waves propagating on a plate at 5000 Hz.

(a)



(b)

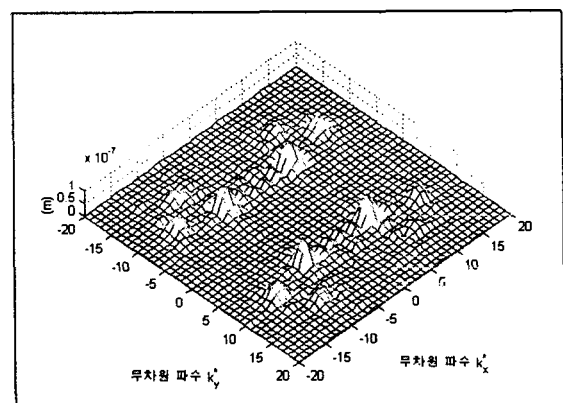


Fig. 3 Wave Spectra for a) displacement field (u) and (b) displacement field (v) at 5000 Hz.

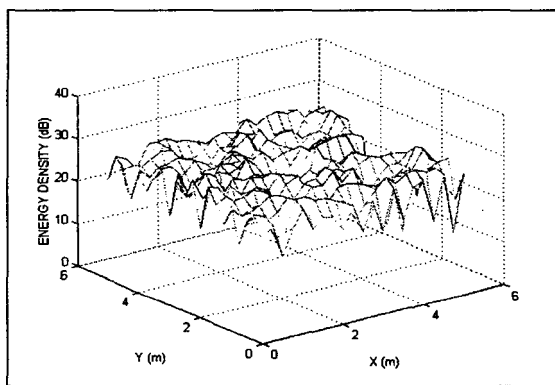
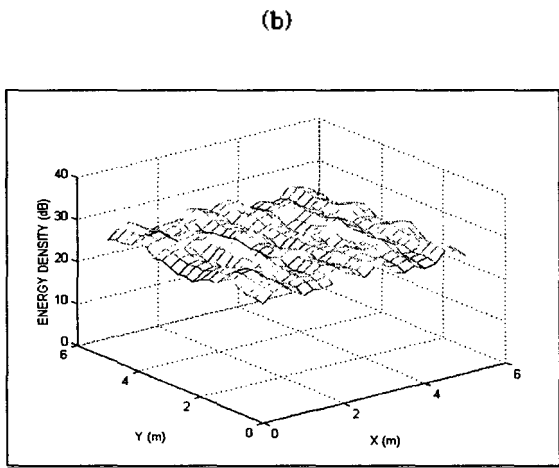
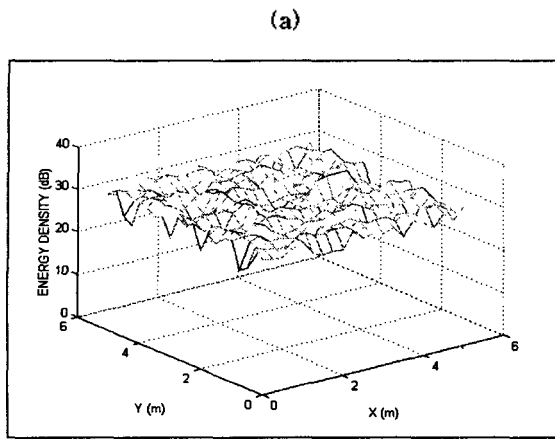


Fig. 4 Energy density distribution due to propagation of (a) total waves, (b) longitudinal waves and (c) shear waves at 5000 Hz.

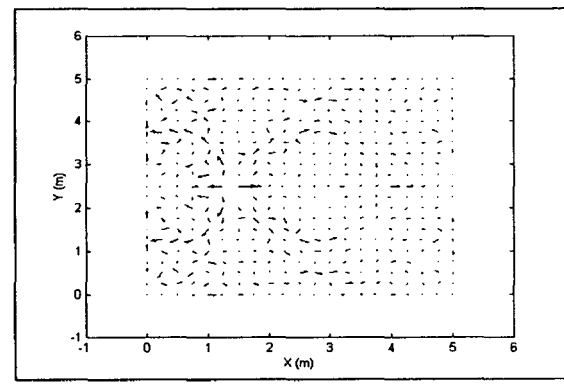
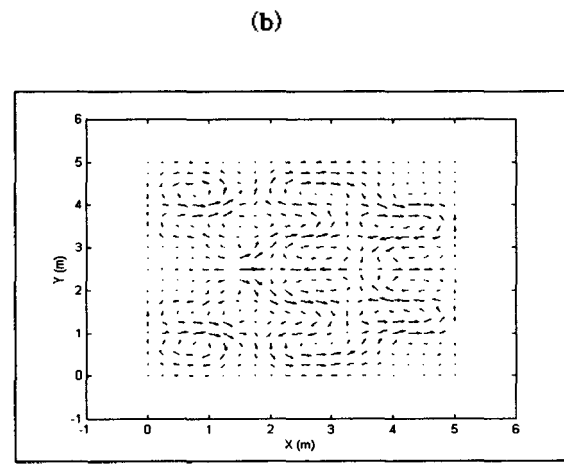
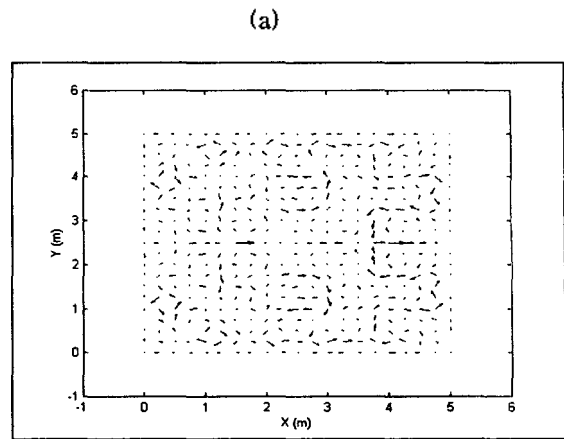


Fig. 5 Intensity due to propagation of (a) total waves, (b) longitudinal waves and (c) shear waves at 5000 Hz.