

유전자 알고리즘을 이용한 IIR 디지털 필터 최적화

송영준, 공성곤
 송실대학교 전기공학과

Optimal Design of IIR Digital Filter Using the Genetic Algorithm

Young-Jun Song and Seong-Gon Kong
 Department of Electrical Engineering, Soongsil University

Abstract - 본 논문에서는 기존의 알고리즘에서 벗어나 새로이 제안된 유전자 알고리즘을 이용하여 디지털 필터를 설계하는데 목적이 있다. 이 방법은 아날로그 필터에서 디지털 필터로의 전환이 불필요하며, 기존의 디지털 필터 설계방법과는 달리 저역통과(low-pass), 고역통과(high-pass), 대역통과(band-pass), 대역소거(band-stop) 필터와같은 주파수 선택별 필터를 각각 독립적으로 설계 가능하게 하고, 이에 따른 계산 손실을 줄일 수 있다. 유전자 알고리즘을 사용하는데 있어 적합도 함수는 주파수 응답 크기를 이용한다. 실제로 주파수 응답특성과 디지털 필터의 계수와는 밀접한 관계가 있으므로, 원하는 필터의 주파수 응답특성을 통해, 디지털 필터의 계수를 최적화 한다. 또한 필터계수 최적화 과정에 있어, 선택, 교배, 돌연변이와 같은 유전 연산자 적용시 필터의 계수들은 각각 안정도가 보장되어지는 범위내에서 선택되게 한다. 디지털 필터를 설계한 후 기존의 방법과 새로이 제안된 방법의 성능을 비교·평가 한다.

1. 서 론

고성능 필터를 설계하는 일은 신호처리분야에 있어 무척 중요하다. 그 이유는 신호를 처리하는데 문제가 있어서 현실적으로 원신호에 원치않은 성분이 섞여 원신호가 왜곡되는 경우가 발생하게 된다. 이런 경우 고성능의 필터는 원신호에 섞인 원치않은 잡음을 효과적으로 제거할 수 있다. 따라서 고성능을 가진 필터를 설계하는 일이야말로 신호처리 분야에 있어서는 반드시 필요한 것이라 할 수 있다. 실제로 필터는 신호처리의 여러 분야 중한 분야인 능동소음제거 분야에서 활발히 사용되어지고 있다.

디지털 필터를 설계하는 방법은 다음과 같다. 기존의 고전적 디지털 필터 설계 방법은 저차화된 아날로그 필터를 구성하고 bilinear 변환과 같은 대수적 변환을 통해 디지털 필터로 변환한다.[9] 변환조건으로는 변환시 필터의 특성이 바뀌지 않아야 하며, 필터의 안정성도 보장되어야 한다. 또한 고역통과(high-pass)필터, 대역통과(band-pass)필터, 대역소거(band-stop)필터와 같은 필터 설계는 저역통과(low-pass) 디지털 필터를 기반으로 또다른 대수적 변환을 통해 이루어진다.

고전적인 방법에 의해 주파수 선택별 필터를 설계하는데는 많은 어려움이 있다. 디지털 필터를 설계하기에 앞서 아날로그 필터를 설계해야 하고, 이 아날로그 필터를 이용하여 저역통과 디지털 필터를 설계한다. 또, 나머지 주파수 선택별 필터의 설계는 이 저역통과 디지털 필터를 이용하여 대수적 변환을 통해 이루어진다는 것이다. 이처럼 복잡한 수식을 이용한 몇 번의 대수적 변환은 많은 시간과 계산량이 요구되어진다. 따라서 고전적 방법에 의거하여 필터의 계수를 최적화 하는데 있어서는 많은 어려움이 있다.

본 논문에서 제안한 IIR 디지털 필터 설계 방법은 유전자 알고리즘을 이용한다. 먼저 필터의 계수를 표현하는 부분을 실수로 코딩한다. 단, 계수는 필터의 안정도가 보장되어지는 범위내에서 발생되어지고, 유전 연산자

적용시에도 필터의 안정성이 보장되어지는 범위내에서 행하여진다. 유전 연산자는 선택(selection), 교배(crossover), 돌연변이(mutation)를 사용한다.

유전자 알고리즘에서 가장 중요한 적합도 함수 결정에 있어서는 주파수 응답의 크기를 이용한다. 이와같은 적합도 함수를 사용한 이유는 실제로 필터의 계수변화에 따라 주파수 응답특성이 가변하므로 서로 매우 밀접한 관계가 있기 때문이다.

마지막으로, 필터의 성능을 확인하기 위해 주파수 응답특성을 살펴보고, 필터규격과의 비교를 통해 성능을 평가한다.

2. 유전자 알고리즘

유전자 알고리즘은 개체집단이 다음 세대의 집단을 형성하는 과정에서 적자생존을 확률적으로 알고리즘화한 것으로써, 집단 유전학의 개체 진화 원리를 이용하여 주어진 문제를 해결한다.

유전자 알고리즘의 동작원리를 살펴보면, 먼저 해후보들(chromosomes)을 이진수 혹은 실수로 코딩하여 부모세대의 개체군(population size)을 형성시킨 다음 적합도 함수(fitness function)에 의해 각 개체를 평가한 후 적합도가 높은 개체가 더 많이 선택될 수 있게 하여 선택되어진 개체들을 교배장소(mating pool)로 보낸다. 이 개체들을 대상으로 유전 연산자에 의해 서로 각자의 정보를 교환하게 한 후 다시 적합도 함수에 의해 이 개체들을 평가하고, 그 값이 원하는 적합도가 될 때까지 혹은 실험자가 정한 반복회수만큼 위의 과정을 계속 되풀이 한다.

3. IIR 디지털 필터계수 최적화

3.1 개요

본 논문의 유전자 알고리즘에 의한 필터계수 최적화 과정을 그림 1에 나타낸다.

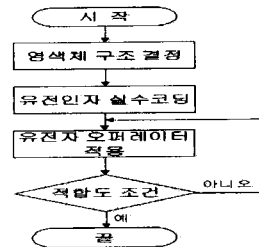


그림 1: GA에 의한 최적화 과정

그림 1에서, 먼저 검색체의 구조를 결정하고 유전인자를 실수로 코딩한 후 안정도(stability)가 유지되는 범위 내에서 각 유전인자를 초기화 한 후 유전 연산자를 적용한다. 이 때 유전 연산자 적용시에도 안정도를 항상 고려하며 유전자 알고리즘을 수행한다.

3.2 염색체 구조

유전자 알고리즘의 염색체 구조를 결정함에 있어 다음과 같은 방법을 사용하고자 한다. 일반적인 IIR 디지털 필터의 전달함수 $H(z)$ 는 식 (1)과 같이 표현 가능하다.

$$H(z) = K \prod_{i=1}^p \frac{(z + b_i)}{(z + a_i)} \prod_{j=1}^q \frac{(z^2 + b_{j1}z + b_{j2})}{(z^2 + a_{j1}z + a_{j2})} \quad (1)$$

여기서 K 는 이득(gain)이고, a_i, a_{j1}, a_{j2} 는 pole에 관련된 계수들이고, b_i, b_{j1}, b_{j2} 은 zero에 관련된 계수들이며, p, q 는 필터의 차수와 관련된 파라미터로 실험자가 임의로 결정할 수 있다.

만일 필터의 전달함수가 식 (2)와 같다면 염색체 구조는 그림 2와 같이 된다.

$$H(z) = K \frac{(z + b_1)(z + b_2)(z^2 + b_{11}z + b_{12})}{(z + a_1)(z + a_2)(z^2 + a_{11}z + a_{12})} \quad (2)$$

a ₁	a ₂	a ₁₁	a ₁₂	b ₁	b ₂	b ₁₁	b ₁₂	K
----------------	----------------	-----------------	-----------------	----------------	----------------	-----------------	-----------------	---

그림 2: 염색체 구조

그림 2에서는 전달함수 $H(z)$ 의 분모부분에서 1, 2차 모델의 계수들을 차례로 위치시키고, 다음으로 분자의 1, 2차 계수들을 차례로 위치시킨 후 마지막으로 필터의 이득을 위치시킴으로써 염색체 구조를 완성한다.

3.3 필터의 안정성 및 유전자 오퍼레이터

IIR 디지털 필터의 구조 결정에 따른 필터의 안정성 문제를 살펴보자. IIR 디지털 필터의 경우 안정성(stability)이 반드시 보장되어야 한다. 그렇게 되기 위해서는 디지털 필터의 모든 극(pole)들은 반드시 z -plane의 단위원(unit circle)내에 위치하여야 한다. [9] 따라서 식 (2)에서 전달함수 $H(z)$ 에서 분모의 1차 모델에 대한 계수 a_1, a_2 에 대해서는 $(-1, 1)$ 범위내의 랜덤값을 발생시키고, 2차 모델의 계수들 a_{11}, a_{12} 에 대해서는 삼각 안정도(triangle stability)에 의해 a_{12} 는 $(-1, 1)$ 범위내에서 랜덤값 r 을 발생시키고, a_{11} 은 $(-1-r, 1+r)$ 의 범위 내에서 랜덤값을 발생시켜 계수값으로 사용한다. [1][2][3]

유전 연산자 적용시에도 필터의 안정성이 보장되어야 하므로 다음과 같은 범칙에 의해 연산자를 적용한다. 유전 연산자 적용시 필터의 안정성에 문제가 되는 것은 '교배'와 '돌연변이'이다. 만일 교배를 하려하는 염색체를 각각 C_x, C_y 라 하면, 그것들에는 각각 1차 모델 계수인 $a_i^{(x)}, a_i^{(y)}$ 가 있고, 2차 모델 계수인 $a_{jk}^{(x)}, a_{jk}^{(y)}$ 가 각각 존재한다. 이 때 교배확률을 p_c 라 하면 임의의 랜덤값을 발생하였을 때 이 랜덤값이 p_c 보다 작을 경우 염색체 C_x, C_y 에 대해 식 (3)과 같이 교배를 행한다.

$$\begin{aligned} a_i &= \alpha a_i^{(x)} + (1-\alpha) a_i^{(y)} ; \alpha \in [0, 1] \\ a_{jk} &= \alpha a_{jk}^{(x)} + (1-\alpha) a_{jk}^{(y)} ; k=1, 2 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 α 는 0에서 1사이의 랜덤값이다.

돌연변이의 경우에는 돌연변이 확률을 p_m 이라 하면, 염색체에 임의의 랜덤값을 발생시키고, 이 랜덤값이 돌연변이 확률 p_m 보다 작을 경우 그 염색체는 식 (4)와 같이 돌연변이를 적용한다.

$$\begin{aligned} a_{j2} &= n_1 ; n_1 \in (-1, 1) \\ a_{j1} &= n_2 ; n_2 \in (-1 - n_1, 1 + n_1) \end{aligned} \quad (4)$$

n_1, n_2 는 임의의 랜덤값이다.

3.4 적합도 함수

유전자 알고리즘에서 가장 중요한 적합도 함수 설정에 있어서는 주파수 응답특성의 크기를 이용한다. 실제로 필터의 계수 변화에 따른 주파수 응답특성의 변화와는 매우 밀접한 관계가 있다. 따라서 실험에서 설정한 적합도 함수의 값이 좋을 때의 필터 계수가 필터의 좋은 특성을 나타낸다. 따라서 적합도 함수 F 는 다음 식 (5)를 통해 나타내어진다.

$$F \triangleq \frac{1}{1 + \sum_{k=0}^{N_1} e_s(\omega_k) + \sum_{k=0}^{N_2} e_p(\omega_k)} \quad (5)$$

$$e_s(\omega_k) = \begin{cases} |H(e^{j\omega_k})| - 1 & \text{if } |H(e^{j\omega_k})| > 1 \\ (1 - \delta_1) - |H(e^{j\omega_k})| & \text{if } |H(e^{j\omega_k})| < (1 - \delta_1) \end{cases} \quad (6)$$

$$e_p(\omega_k) = |H(e^{j\omega_k})| - \delta_2 \quad \text{if } |H(e^{j\omega_k})| > \delta_2 \quad (7)$$

(δ_1, δ_2): 허용범위, p : 통과대역, s : 저지대역, N_1, N_2 : 샘플수

4. 실험 및 결과

실험을 통해 전통적 방법에 의해 설계한 디지털 필터와 유전자 알고리즘에 의해 설계한 디지털 필터의 주파수 응답 특성을 비교한다.

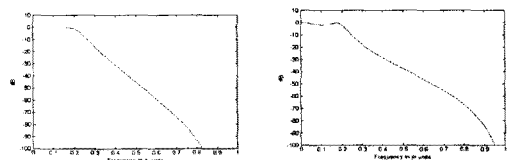
표 1은 실험에 사용된 필터의 규격을 나타낸다.

표 2: IIR 디지털 필터의 규격

필터종류	필터규격	K
LP	$\delta_1 \leq H(e^{j\omega}) \leq 1, 0 \leq \omega \leq 0.2\pi$ $ H(e^{j\omega}) \leq \delta_2, 0.3\pi \leq \omega \leq \pi$	$ H(1) = 1$
HP	$ H(e^{j\omega}) \leq \delta_2, 0 \leq \omega \leq 0.7\pi$ $\delta_1 \leq H(e^{j\omega}) \leq 1, 0.8\pi \leq \omega \leq \pi$	$ H(e^{j\omega}) = 1$
BP	$ H(e^{j\omega}) \leq \delta_2, 0 \leq \omega \leq 0.25\pi$ $0.75\pi \leq \omega \leq \pi$ $\delta_1 \leq H(e^{j\omega}) \leq 1, 0.4\pi \leq \omega \leq 0.6\pi$	$ H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = 1$
BS	$\delta_1 \leq H(e^{j\omega}) \leq 1, 0 \leq \omega \leq 0.25\pi$ $0.75\pi \leq \omega \leq \pi$ $ H(e^{j\omega}) \leq \delta_2, 0.4\pi \leq \omega \leq 0.6\pi$	$ H(1) = 1$

여기서 (δ_1, δ_2) = (0.8414, 0.1778)이다.

그림 3에서는 전통적인 여러 방법에 의해 설계한 IIR 디지털 필터 중 저역통과 필터에 관한 주파수 응답 특성 곡선을 나타낸다.



(a) Butterworth

(b) Chebyshev I

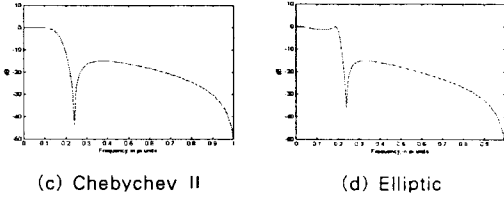


그림 3: 고전적 방법에 의해 설계한 저역통과 필터

그림 3에서의 여러 필터 설계방법에 의해 결정 되어진 IIR 디지털 필터의 전달함수는 식 (8), 식 (9), 식 (10), 식 (11)과 같다.

$$H_B(z) = \frac{0.0016z^5 + 0.0079z^4 + 0.0158z^3 + 0.0158z^2 + 0.0079z + 0.0016}{z^5 - 2.8750z^4 + 3.5907z^3 - 2.3544z^2 + 0.8018z - 0.1125} \quad (8)$$

$$H_{C1}(z) = \frac{0.0082z^3 + 0.0247z^2 + 0.0247z + 0.0082}{z^3 - 2.2705z^2 + 1.9438z - 0.6073} \quad (9)$$

$$H_{C2}(z) = \frac{0.1174z^3 - 0.0594z^2 - 0.0594z + 0.1174}{z^3 - 1.9508z^2 + 1.3939z - 0.3273} \quad (10)$$

$$H_E(z) = \frac{0.1084z^3 - 0.0552z^2 - 0.0552z + 0.1084}{z^3 - 2.2381z^2 + 1.9448z - 0.6003} \quad (11)$$

그림 4에서는 유전자 알고리즘을 적용하였을 때, 각 주파수 선택별 필터에 따른 적합도 그래프를 나타낸다.

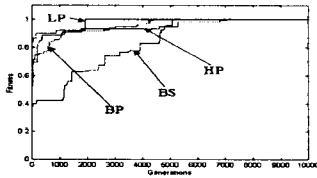


그림 4: 유전자 알고리즘 적합도

그림 4에서는 각 주파수 선택별 필터에 대해 적합도 값을 나타낸 것으로 세대가 지날수록 모든 주파수 선택별 필터에 대해 적합도의 값이 향상됨을 볼 수 있다.

유전자 알고리즘을 진행시키는데 있어 교배확률 $p_c = 0.4$, 돌연변이 확률 $p_m = 0.2$ 를 사용하였으며, 개체군 크기는 100으로 하였다.

그림 5는 그림 4에서 최대 적합도일 때의 주파수 선택별 IIR 필터의 주파수 응답 특성 곡선을 나타낸다.

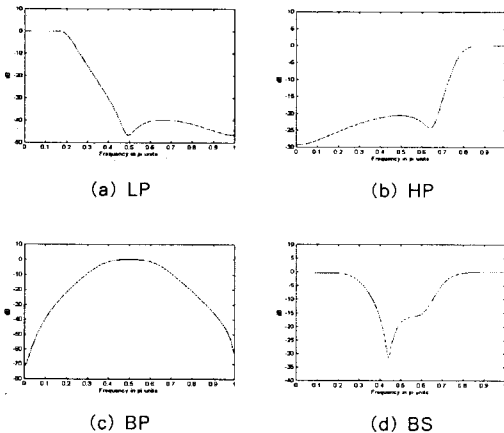


그림 5: GA에 의해 최적화된 필터

그림 5에서의 주파수 선택별 필터의 전달함수는 각각 식 (12), 식 (13), 식 (14), 식 (15)와 같다.

$$H_{LP}(z) = 0.0384 \frac{(z+0.6704)(z^2-0.0520z+0.8372)}{(z-0.6400)(z^2-1.3828z+0.7027)} \quad (12)$$

$$H_{HP}(z) = 0.1366 \frac{(z-0.5385)(z^2+0.8131z+0.7962)}{(z+0.4549)(z^2+1.2419z+0.6358)} \quad (13)$$

$$H_{BP}(z) = 0.1016 \frac{(z^2-0.1601z-0.4785)(z^2+0.0467z-0.9100)(z^2-0.2588z-0.6435)}{(z^2-0.4833z+0.4891)(z^2-0.1850z+0.0617)(z^2+0.5350z+0.5269)} \quad (14)$$

$$H_{BS}(z) = 0.4797 \frac{(z-0.0699)(z^2-0.3616z+0.9409)(z^2+0.5698z+0.6994)}{(z+0.0852)(z^2-0.8004z+0.4563)(z^2+0.8775z+0.5242)} \quad (15)$$

표 2는 주파수 선택별 필터에 대해 필터 종류별 최소 필터 차수를 나타낸 것이다.

표 2: 각 주파수 선택별 최소 필터 차수

필터종류	BWTH	CHEBY1	CHEBY2	ELLIPTIC	GA
LP	5	3	3	3	3
HP	5	3	3	3	3
BP	10	6	6	6	6
BS	10	6	6	6	5

표 2를 통해 필터를 설계하는데 있어 기존의 방법에 비해 GA를 이용한 필터가 가장 저차화된 모델로 표현 가능함을 알 수 있다.

5. 결론

IIR 디지털 필터를 설계하는데 있어 기존의 방법과 달리 새로이 제안한 GA를 이용한 방법을 적용하였다. 이 방법에서는 유전자 알고리즘의 염색체를 안정도가 보장되는 범위내에서 실수로 코딩하였고, 그 염색체를 이용하여 유전자 오퍼레이터를 적용하여 원하는 필터계수를 찾아내었다. 전통적인 방법에 의하여 찾은 필터차수보다는 비교적 낮은 차수로 모델링 할 수 있었으며, 필터규격에 합당한 필터를 설계할 수 있었다.

[참고 문헌]

- [1] K. S. Tang, K. F. Man, S. Kwong and Z. F. Liu, "Design and Optimization of IIR Filter Structure Using Hierarchical Genetic Algorithms," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 45, No 3, June, 1998.
- [2] B. Widrow, S. D. Stearns, *Adaptive Signal Processing*, Prentice Hall, 1985.
- [3] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall, 1996
- [4] D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison Wesley, 1989.
- [5] R. Cheng, M. Gen, *Genetic Algorithms and Engineering Design*, A Wiley Interscience Publication, 1997.
- [6] 공성근, 김인택, 박대희, 박주영, 신요한, *유전자 알고리즘 입문*, 진영사, 1997.
- [7] K. S. Tang, K. F. Man, S. Kwong and Q. He, "Genetic Algorithms and their Applications," *IEEE Signal Processing Magazine*, pp22-37, Nov. 1996.
- [8] S. C. Ng, S. H. Leung, C. Y. Chung, A. Luk, and W. H. Lau, "The Genetic Search Approach" *IEEE Signal Processing Magazine*, pp38-46, Nov. 1996.
- [9] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice Hall, 1989.