

H_2/H_∞ 제어를 이용한 슬라이딩 모드제어

박 승 규, 곽 군 평, 김 민 찬*
 창원대학교 전기공학과

Sliding Mode Control Using H_2/H_∞ Controller

Seung-Kyu Park, Gun-Pyong Kwak, Min-Chan Kim*
 Department of Electrical Engineering, Changwon National University

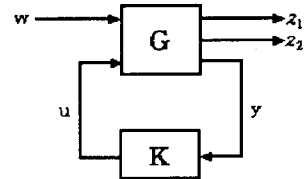
Abstract - In this paper, a novel sliding mode control is proposed by using H_2/H_∞ controller. this technique is constructed based on the augmented system with a virtual state and make it has the dynamics of the original system and then H_2/H_∞ controller has robust characteristics of sliding mode control for existing parameter uncertainty. The reaching phase is excluded by setting initial virtual state value appropriately.

1. 서 론

제어계통의 강인성 향상에 적합한 H_∞ 제어이론은 대부분 계통의 파라메타가 정확하다는 가정하에서 전개되어 왔고 상태공간 접근방식 H_∞ 제어에서는 외란과 그것의 출력에 대한 영향이 상태공간 행렬에 의해서 명확하게 표현되어 있으며 파라메타 불확실성이 존재하는 경우에 외란의 입출력 전달함수의 H_∞ -norm을 최소화하기는 제어 이득을 결정하기 위한 리카치 방정식의 조건을 찾아내는 연구가 많이 되어 왔지만 그 특성이 저하된다. 그리고 이 방법만으로는 다양한 제어기 구성이 어렵기 때문에 본 논문에서는 성능최적화문제로 많이 알려져 있는 H_2 제어 기법과 연관한 제어기 설계기법인 H_2/H_∞ 설계문제를 다루고자 한다. 그리고 강인 제어기법으로 많이 도입되고 있는 SMC(Sliding Mode Control)는 불확실성과 외란의 크기를 알고 정합조건을 만족시킨다면 강인한 특성을 가지고 있으며 많은 좋은 결과들과 응용분야가 있지만 input chattering과 reaching phase가 존재하며 상태 궤적은 실제 시스템의 입력 수만큼 낮은 차수의 슬라이딩 평면의 동특성에 의해서 결정되기 때문에 다른 제어기법과 같이 사용하는데 어려움이 있다. 이러한 단점을 극복하기 위해 H_2/H_∞ 제어기를 구성함에 있어서 파라메타 불확실성이 존재하는 경우에 대해서도 그 동특성을 유지할 수 있기 위해 가상상태를 도입하여 슬라이딩 평면을 구성함으로써 슬라이딩 모드가 공칭 시스템의 동특성을 가지게 하며 다른 제어기와와의 연계성도 가진다. 또한 가상 상태의 초기값을 적절하게 선택하면 reaching phase도 없앨 수가 있다.

2. 문제 설정

다음 그림과 같은 불확실한 파라메터를 갖는 일반적인 혼합된 H_2/H_∞ 문제를 포함한 two-port 블록도의 시스템을 고려한다.



(그림 1) two-port 블록도

일반적으로 전달함수행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$G(s) = C(SI - A)^{-1}B + D \quad (1)$$

위의 식을 packed-matrix기호를 사용하면 다음식과 같이 된다.

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2)$$

또한 H_2 와 H_∞ -norm의 정의는 아래와 같다.

$$\|G(s)\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(G^*(j\omega)G(j\omega))d\omega \right]^{1/2} \quad (3)$$

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma} |G(j\omega)| \quad (4)$$

다음과 같은 상태공간행렬로 표현된 플랜트는 다음과 같다.

$$G(s) = \begin{bmatrix} (A + \Delta A) & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_1 \\ C_2 & 0 & D_2 \\ C_3 & D_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

본 논문에서의 제어기 설계의 목적은 파라메타가 불확실한 시스템에 대해 아래와 같은 식의 조건을 만족하는 만족하는 제어기 K를 찾는 것이다.

$$\inf \{ \|T_1(K)\|_2 \mid K \text{ admissible with } \|T_2(K)\|_\infty < \gamma \} \quad (6)$$

여기서 $T_1(K)$, $T_2(K)$ 는 w에서 z_1, z_2 까지의 페루프 전달함수행렬이다.

3. 공칭 시스템의 H_2/H_∞ 제어기의 설계

공칭 시스템은 다음과 같다.

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_1 \\ C_2 & 0 & D_2 \\ C_3 & D_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

또한 다음과 같은 가정이 필요하다.

- ① (A, B_1) is stabilizable, (C_1, A) is detectable
- ② (A, B_2) is stabilizable, (C_3, A) is detectable
- ③ $D_1^T [C_1 D_1] = [0 \ I]$
- ④ $D_2^T [C_2 D_2] = [0 \ I]$
- ⑤ $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_3 \end{bmatrix} D_3^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$

출력제한 시스템의 혼합된 H_2/H_∞ 제어문제를 풀기 위해서는 다음과 같은 두 리카치 방정식을 풀어야 한다.

$$\begin{aligned} (A - B_2 D_1^T C_1)X + X(A - B_2 D_1^T C_1) \\ + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T)X + C_1^T (I - D_1 D_1^T) C_1 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (A - B_1 D_2^T C_2)Y + Y(A - B_1 D_2^T C_2)^T \\ + Y(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2)Y + B_1 (I - D_2^T D_2) B_1^T = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

따라서 $\|T_2(Q)\|_\infty < \gamma$ 를 만족하는 제어기 $Q \in RH_2$ 가 존재하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

- ① $H \in \text{dom}(\text{Ric})$, $X = \text{Ric}(H) \geq 0$
- ② $J \in \text{dom}(\text{Ric})$, $Y = \text{Ric}(J) \geq 0$
- ③ $\rho(XY) < \gamma^2$

그리고 $Q \in RH_2$ 의 상태공간 행렬표현식은 다음과 같다.

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} \frac{A + B_2 F + \gamma^{-2}(B_1 + ZLD_2) B_1^T X + ZLC_2}{F} & \begin{array}{c} -ZL \\ 0 \end{array} \end{array} \right] \quad (10)$$

여기서, $X = \text{Ric}(H)$, $Y = \text{Ric}(J)$

$$F = -(B_2^T X + D_1^T C_1), \quad L = -(Y C_2^T + B_1 D_2^T)$$

$$Z = (I - \gamma^{-2} YX)^{-1}$$

위의 식을 최소 차수의 제어기를 구하기 위해 X 를 다음과 같이 놓으면

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix}$$

리카치 방정식을 만족하는 해 $X_{11} = X_{12} = X_{22} = X_{12}^T$ 가 되고 $D_2 B_2^T X = 0$ 이며 만약 $F_1 = -B_2^T X_{11}$ 이라고 하면 $F = [F_1 - F \ F_1]$ 이 되며 $ZLC_3 = [N_1^T \ N_2^T]$, $\widehat{A}_2 = A + B_2 F + LC_3$ 이라 놓으면 제어기 K 는 다음과 같다.

$$K = \left[\begin{array}{ccc|c} \widehat{A}_2 & B_2 F_1 - B_2 F & B_2 F_1 & -L \\ N_1 & A + B_2 F_1 & -LC_3 + B_2 F_1 + N_1 & 0 \\ N_2 & \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_{11} & A + LC_3 + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_{11} + N_2 & 0 \\ F & F_1 - F & F_1 & 0 \end{array} \right] \quad (11)$$

또한 정칙행렬 $T = \begin{bmatrix} -I & I & -I \\ 0 & I & -I \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ 로 similarity transformation하면 제어기 K 는 다음과 같이 된다.

$$K = \left[\begin{array}{cc|c} \widehat{A}_2 - N_1 & -LC_3 + N_1 & L \\ -N_1 - N_2 & A + B_2 F_1 + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_{11} + N_1 + N_2 & 0 \\ -F & F_1 & 0 \end{array} \right] \quad (12)$$

식의 간략화를 위해 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} A_k &= \begin{bmatrix} \widehat{A}_2 - N_1 & -LC_3 + N_1 \\ -N_1 - N_2 & A + B_2 F_1 + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_{11} + N_1 + N_2 \end{bmatrix} \\ B_k &= \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_k = [-F \ F_1], \quad D_k = 0 \end{aligned}$$

4. H_2/H_∞ - SMC의 설계

새로운 슬라이딩 평면을 구성하기 위해 외란항을 제외한 공칭 시스템을 고려하면 다음과 같은 controllable canonical form으로 바꿀 수 있다.

$$\dot{x}_0(t) = A_c x_0(t) + B_c u_0(t) \quad (13)$$

$$\text{여기서, } A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

이고 $u_0(t)$ 는 H_2/H_∞ 제어 입력이다.

따라서 공칭 시스템에 대한 H_2/H_∞ 제어기는 다음과 같이 표현된다.

$$u_0 = K_0 y \quad (14)$$

위의 식에서 K 는 다음과 같은 전달함수이다.

$$K_0 = C_K (SI - A_K)^{-1} B_K + D_K \quad (15)$$

식(15)를 controllable canonical form으로 바꾸면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{p}_0(t) &= A_0 p_0(t) + B_0 y_0(t) \\ u_0(t) &= C_0 p_0(t) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{여기서, } A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \cdots & -\alpha_n \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_0 = [\bar{\beta}_1 \ \bar{\beta}_2 \ \bar{\beta}_3 \ \cdots \ \bar{\beta}_n]$$

그리고 $u_0(t)$ 는 다음과 같다.

$$u_0(t) = \bar{\beta}_1 p_{01}(t) + \bar{\beta}_2 p_{02}(t) + \cdots + \bar{\beta}_n p_{0n}(t) \quad (17)$$

또한 $\dot{u}_0(t)$ 는 다음식을 만족한다.

$$\dot{u}_0(t) = \bar{\beta}_1 p_{02}(t) + \bar{\beta}_2 p_{03}(t) + \cdots + \bar{\beta}_n p_{0n}(t) \quad (18)$$

여기서,

$$\dot{p}_{0n}(t) = -\alpha_1 p_{01}(t) - \alpha_2 p_{02}(t) - \cdots - \alpha_n p_{0n}(t) \quad (19)$$

이므로 식(18)는 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} \dot{u}_0(t) &= -\bar{\beta}_n \alpha_1 p_{01}(t) + (\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_n \alpha_2) p_{02}(t) + \cdots \\ &\quad + (\bar{\beta}_n \alpha_{n-1} - \bar{\beta}_n \alpha_n) p_{0n}(t) \end{aligned}$$

가상상태 x_r 는 다음과 같이 정의된다.

$$\dot{x}_r(t) = -\alpha_n x_r(t) - \cdots - \alpha_2 x_3(t) - \alpha_1 x_2(t) + \dot{u}_0(t)$$

결국 가상상태를 포함하는 augmented system은 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ \dot{x}_r(t) &= -\alpha_n x_r(t) - \cdots - \alpha_2 x_3(t) - \alpha_1 x_2(t) + \dot{u}_0(t) \end{aligned} \quad (20)$$

여기서, $u(t)$ 는 슬라이딩 모드를 보장하는 가변입력이다. 식(20)에서 새로운 슬라이딩평면은 다음과 같이 정의된다.

$$s(x, x_r) = x_v(t) + \alpha_n x_n(t) + \cdots + \alpha_1 x_1(t) - u_0(t) = 0 \quad (21)$$

또한 reaching phase는 위의 식에서 $s=0$ 를 다음을 만족하는 가상상태의 초기값을 넣어주면 없앨 수가 있다.

$$x_r(t_0) = -\alpha_n x_n(t_0) - \cdots - \alpha_1 x_1(t_0) + u_0(t_0) \quad (22)$$

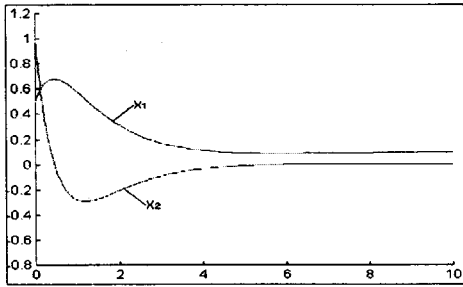
5. 시뮬레이션

본 논문에서는 다음과 같은 동특성을 가지는 2차계통을 고려한다.

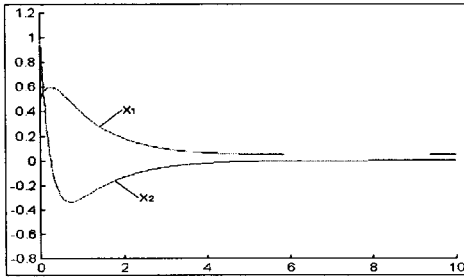
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

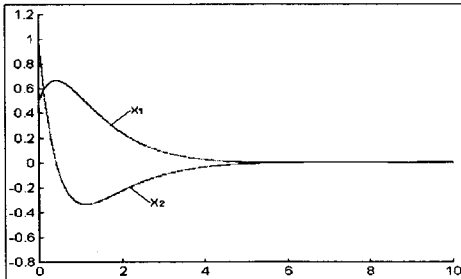
$$\Delta a_{1\max} = \Delta a_{2\max} = 2.2, \Delta a_1 = \Delta a_2 = 2 \text{ (시뮬레이션 시 } w_{\max} = 0.5, w = 0.2)$$



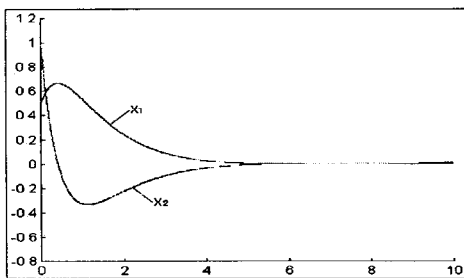
[그림 2] 외란만 존재할때의 H_2/H_∞ 제어기의 상태궤적



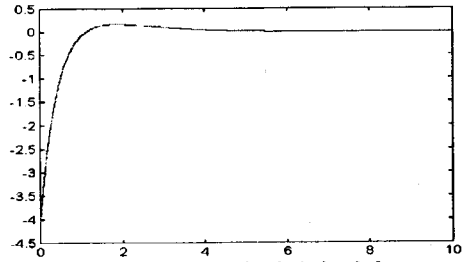
[그림 3] 외란과 불확실성이 모두 존재 할 때의 H_2/H_∞ 제어기의 상태궤적



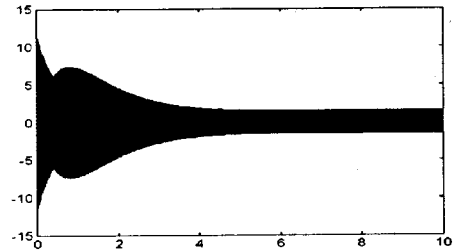
[그림 4] 외란만 존재시의 H_2/H_∞ -SMC 제어기의 상태궤적



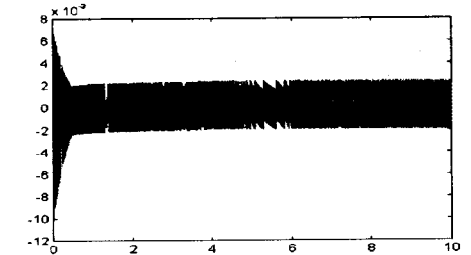
[그림 5] 외란과 불확실성이 모두 존재 할 때의 H_2/H_∞ -SMC 제어기의 상태궤적



[그림 6] 가상 상태의 궤적



[그림 7] H_2/H_∞ -SMC 제어기의 입력



[그림 8] H_2/H_∞ -SMC 제어기의 슬라이딩 평면

6. 결 론

본 논문에서는 강인한 특성을 가진 SMC 제어의 문제점을 해결하기 위해 가상상태를 이용한 새로운 SMC를 제안함으로써 슬라이딩 평면이 H_2/H_∞ 제어기에 의해서 제어되므로 공칭 시스템의 동특성을 가질 수 있고 파라미터 불확실성이 존재하는 경우에도 강인한 특성을 유지함을 보였다. 또한 제시된 공칭 제어기의 입력은 어떤 제어기든지 무관함으로 이는 다른 제어기와 의 연계성도 가질 수 있다는 것을 의미한다. input chattering 문제는 기존에 연구되어 온 방법들을 이용하면 더 효과적인 결과를 얻을 수가 있다.

본 연구는 한국과학재단 지정 창원대학교 공작기계기술연구센터의 지원에 의한 것입니다.

[참 고 문 헌]

- [1] M.A. Roeta and P.P. Khargonekar, " H_2 -optimal control with an H_∞ -constraint : The state feedback case", Automatica, Vol.27, no.2, pp.307- 316, 1991.
- [2] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis, "State-space solution to standard H_2 and H_∞ control problems", IEEE Trans. Automat. Contr., vol.34, no.8, pp.831-847, Aug. 1989.
- [3] HUNG, J. Y., GAO, W., HUNG, J.C. "Variable structure control : A survey", IEEE Trans. on Industrial Electronics, Vol. 40, No.1, pp.2-22, 1993
- [4] S.K. Park, H.G. Ahn, "Robust controller design with novel sliding surface", IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol.146, No.3, May 1999.