1999년도 대한전기학회 정기총회 및 추계학술대회 논문집 1999. 11. 20

이산시 쌍일차 계통에서 연속적 근사화 방법을 이용한 최적제어기 설계

김 범수, 임 묘택
고려대학교 전기공학과

Design of an optimal controller for the discrete time bilinear system by using a successive approximation method

Beom-Soo Kim, Myo-Taeg Lim
Department of Electrical Engineering, Korea University

Abstract - The finite time optimum regulation problem of a discrete time bilinear system with a quadratic performance criterion is obtained in terms of a sequence discrete algebraic Lyapunov equations. Our new method is based on the successive approximations. This algorithm saves the computation time to solve the optimal problem, and the design procedure is illustrated for an example.

1. 서 론

많은 물리적 계통이 선형과 비선형 사이에 존재하는 쌍일차 계통을 갖으며 이에 대한 연구결과가 많이 보고되고 있다[4]. 이산시 쌍일차 계통은 수식적으로 다음과 같이 표현된다. $x(k+1)=Ax(k)+\sum_{i=1}^{m}u_i(k)N_ix(k)+Bu(k)$ 이러한 이산시 쌍일차 계통의 최적 제어기 설계시 상태 및 공상태 차분 방정식에서 비선형 두점 경계값의 해를 해석적으로 구하기가 매우 어렵다. 연속시 쌍일차 계통에서 최적 제어를 구하는 방법으로는 Hofer[3] 의 알고리즘과 Aganovic[1] 이 제시한 방법이 있다. Hofer는 대수 Riccati 방정식을 반복 사용하는 알고리즘을 제시하였고, Aganovic은 연산속도가 더 빠른 대수 Lyapunov 방정식을 사용하는 알고리즘을 개발하였다. 이산시 쌍일차 계통에서의 최적 제어에 관한 연구로는 계통을 시변 선형 최적 문제와 유사한 상태-공상태 차분 방정식으로 근사화하여 이산 대수 Riccati 방정식을 반복을 통해서 해를 구하는 연구 결과가 있다[5]. 본 논문에서는 연속시 쌍일차 계통에서의 최적제어기 설계에 관한 연구[1,2,3]를 이산시 쌍일차 계통으로 확장하여 유한 시간 내에서 평가함수를 최소화하는 새로운 최적 제어기 설계 알고리즘을 제시한다. 제안된 알고리즘은 선형 시변계통으로 근사화된 상태-공상태 차분 방정식에서 시변 이산 대수 Riccati 방정식 대신 연속적 근사화 방법을 이용함으로써 시변 이산 대수 Lyapunov 방정식을 이용해서 해를 구하게 된다. 따라서 시변 이산 대수 Riccati 방정식을 이용해서 해를 구하는 것 보다 시변 이산 대수 Lyapunov 방정식을 이용함으로써 연산속도를 빠르게 할 수 있는 최적제어기 설계가 가능하다. 본 논문에서는 이산시 쌍일차 계통에서 이산 대수 Riccati 방정식을 반복 사용하여 최적 제어를 구하는 알고리즘을 설명한후 대수 Lyapunov 방정식을 반복 사용하여 최적 제어를 구하는 새로운 알고리즘을 제시한다. 그리고 이 알고리즘의 타당성을 시뮬레이션을 통해서 입증한다.

2.이산시 쌍일차 계통에서 연속적 근사화 방법을 이용한 최적제어기 설계

일반적으로 이산시 쌍일차 계통에서 최적 제어기를 설계할때 상태 및 공상태 차분 방정식에서 비선형 두점 경계값의 해를 해석적으로 구하기가 매우 어렵기 때문에 선형 시변 계통으로 근사화하여 해를 구한다.

2.1 이산 대수 Riccati 방정식을 이용한 최적제어기 설계

다음과 같이 정의되는 이산시 쌍일차 계통에서의 최적 제어 문제를 고려해 보자.

$$x(k+1)=Ax(k)+\{x(k)M\}u(k)+Bu(k) \qquad \{x(k)M\}=\sum_{i=1}^{n}x_i(k)M_i,\ x(0)=x^0 \tag{1}$$

여기서, $x\in R^n$ 는 상태 변수, $u\in R^m$ 는 제어 변수이고 A,B,M_i 는 각각 알맞은 차원을 갖는 상수 행렬이다. 그리고 유한 시간 내에서 최소화 할 평가 함수는 식(2)와 같이 주어진다.

$$J=\frac{1}{2}x^T(N)Fx(N)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[x^T(k)Qx(k)+u^T(k)Ru(k)] \tag{2}$$

여기서 $F\in R^{nxn}$는 양의 준정부호 대칭 행렬, $Q\in R^{nxn}$는 양의 정부호 대칭 행렬, $R\in R^{mxm}$ 은 양의 준정부호 대칭 행렬이다. 평가 함수 (2)를 갖는 계통 (1)에서 최적 제어는 다음과 같은 가정 1 하에서 근사화 알고리즘을 사용하여 구할 수 있다.

가정 1. 쌍 (A,B) 는 안정화 할 수 있고(stabilizable) $X_c=\{x\in R^n \mid (A,B+\{xM\})\}$으로 정의된 안정도 영역에 머물고, $(A,\sqrt{Q})$는 검출 가능(detectable) 하다.

식 (1)로 정의되는 이산시 쌍일차 계통에서 평가함수를 최소화하는 최적 제어기를 근사화 방법을 이용하여 구하는 알고리즘은 다음과 같다. 먼저 초기 단계에서는 이산시 쌍일차 계통에 대하여 식 (3)으로 표현되는 이산시 선형 계통만을 고려하여 이에 해당되는 대수 이산 Riccati 방정식(4)에서 $P_0(k+1)$를 구한다.

$$x_0(k+1)=Ax_0(k)+Bu_0(k) \tag{3}$$

$$Q+A^TP_0(k+1)A-A^TP_0(k+1)B(R+B^TP_0(k+1)B)^{-1}B^TP_0(k+1)A=0 \tag{4}$$

대수 이산 Riccati 방정식에서 구해진 $P_0(k+1)$를 이용하여 제어 입력을 식 (5)와 같이 구한다.

$$u_0(k)=-K_0(k)x_0(k) \tag{5}$$

여기서, $K_0(k)=(R+B^TP_0(k+1)B)^{-1}B^TP_0(k+1)A$ 이다. 이산시 선형 계통에서 구해진 $x_0(k+1)$를 이용하여 이

산시 쌍일차 계통을 $i=1,2,\cdots$ 반복하여 $x_i(k+1)$를 구한다.

$$x_i(k+1)=Ax_i(k)+(\{x_i(k)M\}+B)u_i(k) \quad (6)$$

반복 단계에서는 대수 이산 Riccati 방정식이 식 (7)과 같이 표현되고 여기서 구해진 $P_i(k+1)$를 이용하여 제어 입력을 식 (8)과 같이 구한다.

$$\begin{aligned}0 &= Q+A^TP_i(k+1)A-A^TP_i(k+1)\,\widehat{B}_i(n)(R+\\ &\widehat{B}_i^T(k)P_i(k+1)\,\widehat{B}_i(k))^{-1}\,\widehat{B}_i^T(k)P_i(k+1)A\end{aligned} \quad (7)$$

$$u_i(k)=-K_i(k)x_0(k) \quad (8)$$

여기서 $K_i(k)=(R+\ \widehat{B}_i^T(k)P_i(k+1)\,\widehat{B}_i(k))^{-1}\,\widehat{B}_i^T(k)$ $P_i(k+1)A$ 이고 $\widehat{B}_i(k)=B+\{x_{i-1}(k)M\}$이다. 식 (6) - (8)을 반복하게 되면 $u_i(k)\rightarrow u_{opt}(k)$, $x_i(k)\rightarrow x_{opt}(k)$로 수렴하여 최적 제어를 구할 수 있다.

2.2 연속적 근사화 방법을 이용한 최적 제어기 설계

연속적 근사화 방법은 동적 프로그래밍에서 함수 방정식의 해를 구하는 주요 도구중의 하나로서 여러 제어 분야에서 사용되고 있다[1]. 이산시 쌍일차 계통에서 새로운 최적 제어 알고리즘을 도출하기 위해 선형 시변으로 근사화된 계통에 연속적 근사화 방법을 적용하면 최적 제어 입력을 구하는 단계에서 이산시 시변 대수 Riccati 방정식 대신에 이산시 시변 대수 Lyapunov 방정식의 해를 구하는 과정을 거친다. 따라서 제안된 새로운 알고리즘은 기존 대수 Riccati 방정식을 이용하는 것보다 연산 속도가 매우 빠르다.

연속적 근사화 방법을 이용하여 식 (1)로 정의되는 이산시 쌍일차 계통에서 식 (2)로 주어진 평가 함수를 최소화하는 새로운 최적 제어 알고리즘은 다음과 같다. 먼저 초기 단계에서는 이산시 쌍일차 계통에 대하여 식 (9)로 표현되는 이산시 선형 계통만을 고려하여 이에 해당되는 이산 대수 Riccati 방정식(10)에서 $P_0(k+1)$를 구한다.

$$x_0(k+1)=Ax_0(k)+Bu_0(k) \quad (9)$$

$$\begin{aligned}&Q+A^TP_0(k+1)A-A^TP_0(k+1)B(R\\ &+B^TP_0(k+1)B)^{-1}B^TP_0(k+1)A=0\end{aligned} \quad (10)$$

이산 대수 Riccati에서 구해진 $P_0(k+1)$를 이용하여 제어 입력을 식 (11)과 같이 구한다.

$$u_0(k)=-K_0(k)x_0(k) \quad (11)$$

여기서, $K_0(k)=(R+B^TP_0(k+1)B)^{-1}B^TP_0(k+1)A$ 이다. 반복 단계에서는 연속적 근사화 방법을 사용한다. 최적 제어 및 상태, 공상태 방정식을 구하기 위해서 식 (1) 과 같이 정의되는 이산시 쌍일차 계통과 주어진 평가 함수(2)에 대응되는 Hamiltonian을 식(12)와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}H=&\frac{1}{2}\{x^T(k)Qx(k)+u^T(k)Ru(k)\}\\ &+\lambda^T(k+1)\{Ax(k)+(\{x(k)M\}+B)u(k)\}\end{aligned} \quad (12)$$

따라서 식(12) 로 정의된 Hamiltonian에 의해서 상태 방정식, 공상태 방정식, 최적 제어 입력은 각각 식 (13), (14), (15)로 구해진다.

$$x(k+1)=Ax(k)+(\{x(k)M\}+B)u(k) \quad (13)$$

$$\begin{aligned}\lambda(k)=&Q(k)x(k)+A^T(k)\lambda(k+1)\\ &+\frac{\partial}{\partial x(k)}\lambda^T\{xM\}u\end{aligned} \quad (14)$$

$$u(k)=-R^{-1}(\{x(k)M\}+B)^T\lambda(k+1) \quad (15)$$

식(14)로 표현되는 공상태 방정식에서 공상태 벡터의 i 번째 열 요소 $\lambda_i(k)$ 는 식 (16)과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}\lambda_i(k)=&[Q(k)x(k)]_i+[A^T(k)\lambda(k+1)]_i\\ &-\frac{1}{2}\lambda^T(k+1)(M_iR^{-1}(B+\{x(k)M\})\\ &+(B+\{x(k)M\})R^{-1}M_i^T))\lambda(k+1)\end{aligned} \quad (16)$$

여기서 $\widehat{B}=B+\{x(k)M\}$, $\lambda(k)=P_0(k)x(k)$라 정의하면 상태 방정식과 최적제어 입력을 식(17),(18)과 같이 다시 표현할 수 있다.

$$x(k+1)=\widehat{A}(k)x(k) \quad (17)$$

$$u(k)=-K(k)x(k) \quad (18)$$

여기서 $\widehat{A}(k)=A(k)-\widehat{B}K(k)$ 로 정의하였으며 $K(k)=(R(k)+\ \widehat{B}^TP_0(k+1)\,\widehat{B})^{-1}\,\widehat{B}^TP_0(k+1)A(k)$로 정의하였다. i-번째 반복과정에서 공상태와 상태 변수와의 관계는 식(19)와 같이 된다.

$$\lambda_i(k+1)=P_i(k)x_i(k+1) \quad (19)$$

식 (19)에 식(17)을 대입한후 이 결과와 식 (17)을 Hamiltonian 식 (12)에 대입하여 최적 제어 입력 조건을 구하게 되면 식 (20)으로 표현되는 시변 이산 대수 Lyapunov 방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned}P_i(k+1)=&\ \widehat{A}_i^T(k)P_i(k+1)\ \widehat{A}_i(k)\\ &+\{Q+K_i^T(k)RK_i(k)\}\\ K_i(k)=&(R+\ \widehat{B}_i^T(k)P_{i-1}(k+1)\ \widehat{B}_i(k))^{-1}\\ &\widehat{B}_i^T(k)P_{i-1}(k+1)A\end{aligned} \quad (20)$$

따라서 (20) 식으로 표현되는 시변 이산 대수 Lyapunov 방정식에서 $P_i(k+1)$를 구하면 최적 제어 입력은 식(21)과 같이 구할수 있다.

$$u_i(k)=-K_i(k)x_0(k) \quad (21)$$

여기서 $K_i(k)=(R+\ \widehat{B}_i^T(k)P_i(k+1)\,\widehat{B}_i(k))^{-1}$ $\widehat{B}_i^T(k)P_i(k+1)A$이다.이 반복 단계에서 Lyapunov 방정식의 해가 $\| P_i(k+1)-P_{opt}(k+1)\| < \gamma$, (γ은 작은 양의 실수 값) 이면 $P_i(k+1)\rightarrow P_{opt}(k+1)$ 로 수렴하며 $u_i(k)\rightarrow u_{opt}(k)$, $x_i(k)\rightarrow x_{opt}(k)$로 수렴하여 주어진 이산시 쌍일차 계통에 대한 최적 제어를 구할 수 있다. k 스텝에서 최적 제어를 구하면 $x_0(k+1)=x_{i-1}(k+1)$ 로 정의 한후 다음 스텝에서 (13)-(22) 를 반복한다.

2.3 시뮬레이션 및 결과

이산시 쌍일차 계통에서의 최적제어를 구하기 위해 제안된 새로운 알고리즘을 화학 반응기[1,3] 에 적용한

다. 이산시 쌍일차 모델은 다음과 같다.

$$A=\begin{bmatrix} 1.0429 & 0.0083 \\ -0.3316 & 0.9467 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} -0.0026 \\ 0.0004 \end{bmatrix}$$
$$M_1=\begin{bmatrix} -0.0204 \\ 0.0033 \end{bmatrix} \quad M_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

여기서 정규화된 상태 변수 x_1, x_2는 각각 화학 반응기에서의 온도와 농도를 나타내며, 제어 입력 u 는 리액터를 감싸고 있는 재킷(Jacket)에서의 쿨링 흐름율이다. 그리고 F, Q, R 은 각각 다음과 같이 설정하였다.

$$F=\begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ R=1$$

그리고 초기값은 $x^0=[0.15\ 0\ ]^T$로 설정했을때 시뮬레이션 결과는 그림 1, 2, 3, 4, 5 와 같다. 그림 1, 2 는 각각 온도와 농도를 나타내며 그림 4 는 그림 1 을, 그림 5 는 그림 3 을 확대한 것이다.그림 1, 2, 4 에서 보면 3 번째 반복에서 초기 반복보다 빨리 수렴시키는 것을 알 수 있다. 그림 3, 5 는 최적 제어 입력값으로서 3 번째 반복에서 최적 제어를 구할 수 있음을 보이고 있다.

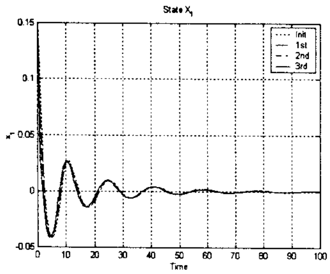

그림 1 상태 x_1 의 궤적

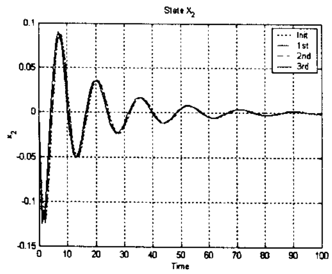

그림 2 상태 x_2 의 궤적

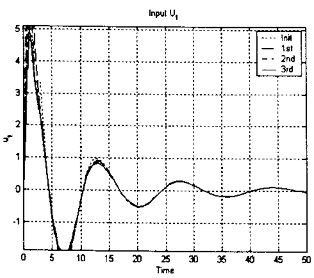

그림 3 제어 입력의 궤적

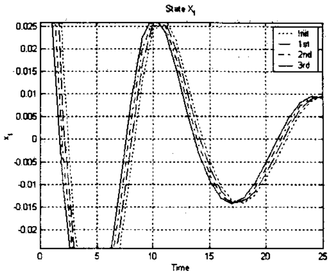

그림 4 상태 궤적 x_1 확대

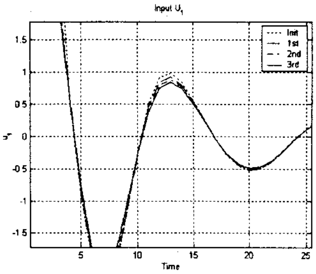

그림 5 제어 입력 확대

3. 결 론

본 논문에서는 이산시 쌍일차 계통에서 유한 시간 내에 평가함수를 최소화하는 최적 제어기를 설계할때 해석적으로 구하기가 매우 어려운 상태 및 공상태 차분 방정식의 비선형 두점 경계값 문제를 근사화 방법을 사용하여 해를 구하는 새로운 최적 제어기 설계 알고리즘을 제시하였다. 제안된 알고리즘은 선형 시변계통으로 근사화된 상태-공상태 차분 방정식에 연속적 근사화 방법을 적용하여 시변 이산 대수 Lyapunov 방정식을 이용해서 해를 구하였다. 따라서 시변 이산 대수 Riccati 방정식을 이용해서 해를 구하는 것 보다 연산 속도를 빠르게 할 수 있는 최적제어기 설계가 가능하였고 이의 타당성을 시뮬레이션을 통해서 입증하였다.

[참 고 문 헌]

[1] Z. Aganovic, Z. Gajic, "Successive Approximation Procedure for Steady-State Optimal Control of Bilinear System", Journal of Optimal Theory & Appl., Vol. 84, 2, pp. 273-291, 1995

[2] W.A. Chebuhar, V. Constanza, "Approximation Procedures for the Optimal Control of Bilinear Systems", Journal of Optimal Theory & Appl., Vol. 43, pp. 615-627, 1984

[3] E. Hoffer, B. Tibken, "An iterative method for the finite-time bilinear quadratic control problem", Journal of Optimal Theory & Appl., Vol. 57, pp. 411-427, 1988

[4] R. Mohler, *Nonlinear Systems - Applications to Bilinear Control*, Prentice-Hall, 1991

[5] 강현구,김범수, 임묘택 "특이 섭동 이산시 쌍일차 계통에서의 폐루프 최적 제어기 설계", 1999 대한 전기학회 하계학술대회, No. B, pp. 643-645, 1999