

근사화된 2계 모델을 이용한 시간지연을 갖는 제어시스템의 성능개선

이규용\*, 양승현\*, 허명준\*\*, 이석원\*

\*호서대학교 제어계측공학과, \*\*순천향대학교 전기전자공학부

Improved Performance of the Time-Delay Systems Using the Approximated 2nd-Order plus Dead Time Model

Kyu-Yong Lee\*, Seung-Hyun Yang\*, Myung-Joon Hur\*\* and Suk-Won Lee\*

\*Dept. Control & Instrumentation Eng. Hoseo Univ.

\*\*Devison of Electrical & Electronic Eng. Soonchunhyang Univ.

**Abstract** - The practical control problems for the time-delay system is considered. The delay-free characteristics of the Smith Predictor is available only when both the process and it's model are exactly matched. So it does not used widely in practical industrial processes. In this paper, using the 2nd-order plus deadtime model in place of the plant model of the Smith predictor, the proposed controller shows the improved performance in case of the very long time delay. And the range of integral constant of the PI controller is also proposed.

1. 서 론

시스템을 설계하거나 해석하는데 있어 플랜트에 존재하는 시간지연은 큰 장애가 된다. 초기에 제안된 Smith Predictor는 시간지연의 영향을 받지 않고 제어를 설계할 수 있는 우수한 특성을 가지고 있으나 플랜트와 플랜트의 모델이 완전히 일치해야 한다는 제약조건이 있어서 실제 산업 현장에 그대로 적용하기가 곤란하다[1].

최근 Wang등[2]에 의해 제안된 시간지연항을 포함한 2계 근사화 모델은 플랜트의 주파수응답의 특정한 두 점만을 이용하여 플랜트 모델의 모든 파라미터를 결정할 수 있고, 얻어진 모델식은 시간지연항을 포함한 1계 근사화로 모델링하는 많은 경우[3, 4]에 비해 플랜트가 가지고 있는 특성을 비교적 잘 표현한다. 또한 이를 바탕으로 제안된 PID 튜닝 방법은 시스템의 계수(number of order)나 시간지연의 크기에 관계없이 대부분의 시스템에 대하여 비교적 만족할만한 성능을 나타내고 있다. 그러나 플랜트의 주파수 응답에서 특정한 위상값(-π, -π/2)을 만족하는 주파수가 존재하지 않는 플랜트에 대해서는 제안된 근사화 모델을 얻기가 곤란할 뿐만 아니라, 시간지연이 매우 큰 플랜트에 대해서는 기준 입력에 대한 응답속도 및 외란 영향의 제거 효과가 뒤지는 경향이 있다.

본 논문에서는 Wang등이 제안한 시간지연항이 포함된 근사화된 2계 모델링 방법을 고찰하고, 이를 Smith Predictor에 적용함으로써, 시간지연이 크게 나타나는 플랜트에 대해 기준입력 및 부하 외란에 대한 응답특성이 비교적 우수함을 보였다.

2. 시간지연항을 포함한 2계 근사화 모델

고계 시스템(high-order system)을 시간지연을 포함한 저계 근사 모델(deadtime plus low-order approximated model)로 근사화 하는 방법은 많이 알려져 있다. 그 중 시간지연을 포함한 1계 근사 모델도 많이 사용되고 있으나 시스템의 진동과 같은 특성은 나타낼 수가 없기 때문에 그러한 경우, 시간지연을 포함한 2계 근사 모델을 사용하여 표현한다. 이러한 근사모델을

얻는 방법에는 시간영역에서 제단응답을 이용하여 모델의 파라미터를 결정하거나 주파수 응답을 이용하기도 하며, 파라미터 추정기법을 사용하기도 한다. 최근 Wang 등이 제안한 시간지연항을 포함한 2계 근사 모델은 플랜트의 주파수 응답중 단지 두 점만을 이용한다. 다음과 같은 2계 근사화 모델을 고려한다.

$$\widehat{G}_p(s) = \frac{e^{-sL}}{as^2 + bs + c} \quad (1)$$

결정해야할 것은 a, b, c, L이며, 이 파라미터들을 결정하기 위해 주파수 응답의 위상이

$$\angle G(j\omega_c) = -\pi, \angle G(j\omega_b) = -(\pi/2) \quad (2)$$

를 만족하는 두 개의 주파수 포인트  $s = j\omega_c, s = j\omega_b$ 를 선정한다. 이때,

$$G(j\omega_c) = \widehat{G}(j\omega_c), G(j\omega_b) = \widehat{G}(j\omega_b) \text{ 라면}$$

$$c - a\omega_c^2 + j b\omega_c = \frac{\cos(\omega_c L) - j \sin(\omega_c L)}{-|G(j\omega_c)|} \quad (3)$$

$$c - a\omega_b^2 + j b\omega_b = \frac{\cos(\omega_b L) - j \sin(\omega_b L)}{-|jG(j\omega_b)|} \quad (4)$$

식(3), (4)를 풀면

$$\frac{\sin(\omega_c L)}{\cos(\omega_b L)} = \frac{\omega_c |G(j\omega_c)|}{\omega_b |G(j\omega_b)|} \quad (5)$$

$$a = \frac{1}{\omega_c^2 - \omega_b^2} \left[ \frac{\sin(\omega_b L)}{|G(j\omega_b)|} + \frac{\cos(\omega_c L)}{|G(j\omega_c)|} \right] \quad (6)$$

$$b = \frac{\sin(\omega_c L)}{\omega_c |G(j\omega_c)|} \quad (7)$$

$$c = \frac{1}{\omega_c^2 - \omega_b^2} \left[ \frac{\omega_c^2 \sin(\omega_b L)}{|G(j\omega_b)|} + \frac{\omega_b^2 \cos(\omega_c L)}{|G(j\omega_c)|} \right] \quad (8)$$

을 얻는다. 식(5)는 비선형 방정식이므로 직접 해를 구할 수는 없다. 그러나 근접 해를 알면 Newton-Raphson 방법으로 거의 정확한 해를 구할 수 있으므로 우선 근접해를 얻기위해 다음의 근사식을 이용한다.

$$\begin{aligned} \sin(x) &= px^2 + qx \\ \cos(x) &= px^2 + rx + 1 \end{aligned} \quad (9)$$

여기서,

$$p = \frac{8}{\pi^2}(1 - \sqrt{2}), \quad q = \frac{2}{\pi}(2\sqrt{2} - 1), \quad r = \frac{2}{\pi}(2\sqrt{2} - 3)$$

이다. 식(5)와 (9)로부터 다음을 얻는다.

$$p(\omega_c^2 - \theta\omega_b^2)L^2 + (q\omega_c - \theta r\omega_b)L - \theta = 0 \quad (10)$$

여기서  $\theta = \frac{\omega_c |G(j\omega_c)|}{\omega_b |G(j\omega_b)|}$  이다.

식(10)의 해 중 절대값이 작은 것을 선택해서 다음의 Newton-Raphson방법의 초기값으로 이용한다.

$$L_2 = L_1 - \frac{f(L_1)}{f'(L_1)} \quad (11)$$

여기서

$$f(L) = \frac{\sin(\omega_c L)}{\cos(\omega_b L)} - \frac{\omega_c |G(j\omega_c)|}{\omega_b |G(j\omega_b)|}$$

$$f'(L) = \frac{\omega_b \sin(\omega_b L) \sin(\omega_c L) + \omega_c \cos(\omega_b L) \cos(\omega_c L)}{\cos^2(\omega_b L)}$$

이다.

식(11)에 의해 얻어진 L을 식(6), (7), (8)에 대입하여 2계 근사화 모델을 얻는다.

이 방법은 근본적으로 주파수 응답을 이용하는 것이므로, 모델링 하는데 있어 플랜트가 적분기를 포함하는 경우와 같이 식(2)를 만족하는  $\omega_c$ 와  $\omega_b$ 를 선정할 수 없을 때는 이 방법을 적용하기가 곤란하다.

### 3. 시간지연이 포함된 2계 근사화 모델을 이용한 시간지연 시스템의 제어기

시간지연이 있는 시스템을 제어하기 위해 많은 연구가 진행되어 왔다. Watanabe[5], Matausek[6] 등은 플랜트에 적분기가 포함된 경우, 정상상태 오차를 제거하는 구조를 가진 변형된 Smith Predictor를 발표하였고 안정도 문제에 관한 연구[7]도 많이 발표되었다. 원래의 Smith Predictor는 플랜트의 모델을 선형 전달함수와 시간지연항으로 분리해서 모델의 시간지연 출력과 실제 플랜트의 출력을 상쇄시키고, 모델의 시간지연 되지 않은 출력을 피드백 시키는 구조로 이루어져 있다(그림1).

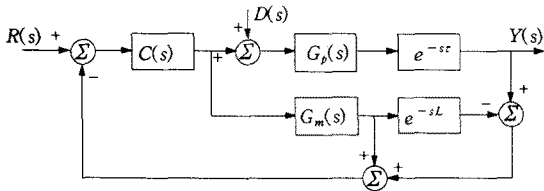


그림1 Smith Predictor

그림(1)에서  $R(s)$ 는 기준입력을,  $Y(s)$ 는 출력을,  $D(s)$ 는 외란을 각각 나타내며,  $C(s)$ 는 주제어기,  $G_p(s)e^{-sL}$ 는 플랜트이고,  $G_m(s)e^{-sL}$ 은 근사 모델이다. 이때, 전달함수  $Y(s)/R(s)$ 는 다음과 같다.

$$\frac{C(s)G_p(s)e^{-sL}}{1 + C(s)G_m(s) + C(s)[G_p(s)e^{-sL} - G_m(s)e^{-sL}]} \quad (12)$$

외란에 대한 전달함수  $Y(s)/D(s)$ 는

$$\frac{G_p e^{-sL} [1 - \{G_m(s)e^{-sL}C(s) - C(s)G_m(s)\}]}{1 - [C(s)G_m(s)e^{-sL} - C(s)G_p(s)e^{-sL} - C(s)G_m(s)]} \quad (13)$$

가 된다.

위의 구조에서 플랜트와 모델식이 완전히 일치한다고 하면 기준입력에 대한 출력의 전달함수는 다음과 같이 간략화 된다.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G_p(s)e^{-sL}}{1 + C(s)G_m(s)} \quad (14)$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p e^{-sL} [1 - \{G_m(s)e^{-sL}C(s) - C(s)G_m(s)\}]}{1 + C(s)G_m(s)} \quad (15)$$

여기서 주 제어기  $C(s)$ 는 다음과 같다고 가정한다.

$$C(s) = \frac{as^2 + \beta s + \gamma}{s} \quad (16)$$

2절에서 얻어진 2계 근사화 모델을  $G_m(s)e^{-sL}$ 라고 하고 이것이 플랜트와 일치한다고 하면 즉,

$$G_m(s)e^{-sL} = \frac{e^{-sL}}{as^2 + bs + c} \approx G_p(s)e^{-sL}$$

라고 하면, 식(12)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\frac{as^2 + \beta s + \gamma}{as^3 + (a+b)s^2 + (\beta+c)s + \gamma} e^{-sL} \quad (17)$$

만약  $\gamma=0$ 이면 정상 상태값은

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{as + \beta}{as^2 + (a+b)s + (\beta+c)} e^{-sL} = \frac{\beta}{\beta+c}$$

이 되어 정상상태오차가 항상 발생하게 된다.

본 논문의 시뮬레이션에는 주 제어기로서 PI제어기를 사용했으며 이 경우( $a=0$ )에는

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\beta s + \gamma}{as^3 + bs^2 + (\beta+c)s + \gamma} e^{-sL} \quad (18)$$

이 되고, 식(18)의 특성 방정식에서 Routh판별법을 사용하여 전체 시스템이 안정할  $\gamma$ 의 범위를 구하면

$$\gamma < \frac{b(\beta+c)}{a} \quad (15)$$

이 된다.

### 4. 모의 실험

예1.

$$G_p(s) = \frac{1}{(s^2 + 2s + 3)^3 (s + 3)} e^{-5s}$$

인 경우, 다음과 같은 값을 얻는다.

$$\omega_c = 0.42466 \text{ rad/s}$$

$$\omega_b = 0.21372 \text{ rad/s}$$

$$G(j\omega_c) = -0.012924$$

$$G(j\omega_b) = -0.0125j$$

그 결과 근사화 모델은

$$G_m(s)e^{-sL} = \frac{1}{60.9539s^2 + 77.5317s + 81.0119} e^{-6.3629s}$$

이다. 모의 실험은 Smith Predictor에 2계 근사화 모델을 이용했으며, 기준입력으로 단위 스텝을, 100초 후에 -5크기의 스텝 부하외란을 가했다. 또한 비교를 위해 똑같은 환경에서 Wang의 PID제어기를 이용했을때의 응답을 같이 표시했다. (그림2)

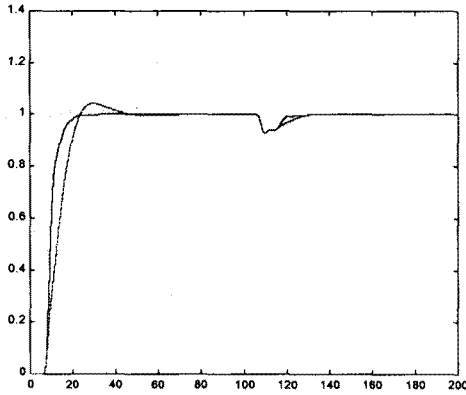


그림2 예1 단위 계단응답  
(실선:제한한 Smith Predictor, 점선:Wang의 PID)

예2.

$$G_p(s)e^{-sr} = \frac{1}{(s^2 + s + 1)(s + 2)^2} e^{-10s}$$

$$\omega_c = 0.7259 \text{ rad/s}$$

$$\omega_b = 0.384 \text{ rad/s}$$

$$G(j\omega_c) = -0.2549$$

$$G(j\omega_b) = -0.2579j \text{ 이고, 근사 모델은}$$

$$G_m(s)e^{-sL} = \frac{1}{6.7393s^2 + 6.5916s + 4} e^{-10.3079s}$$

이다. 시뮬레이션은 기준입력으로 단위 스텝을, 100초 후에 -1크기의 스텝 부하외란을 가했다. 예1과 마찬가지로 비교를 위해 똑같은 환경에서 Wang의 PID제어기를 사용했다.(그림3)

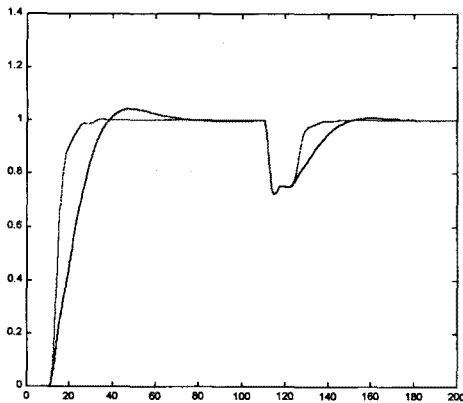


그림3 예2의 계단응답  
(실선:제한한 Smith Predictor, 점선:Wang의 PID)

그림(4)는 예2 플랜트의 시간지연의 불확실성에 대한 응답을 나타내고 있다. 실선은 변화 없을때의 응답이고, 점선은 플랜트의 시간지연이 ±10% 변화했을 때이다. 그림에서 보는바와 같이, 진동이 발생하지만 비교적 안

정된 응답을 보이고 있다.

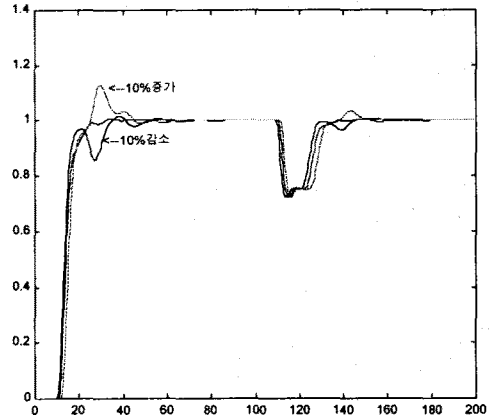


그림4 플랜트의 시간지연이 ±10% 변화했을때의 응답

## 5. 결 론

실용적인 측면에서 시간지연이 존재하는 플랜트를 효과적으로 제어하는 문제를 다루었다. 주어진 주파수 응답의 두 점만을 이용하여 얻어진 시간지연요소가 포함된 2계 근사화 모델을 Smith Predictor에서의 플랜트 모델로 이용함으로써, 시간지연값이 상당히 클 경우에도 기준입력에 대한 응답 및 외란제거 효과가 우수함을 보였다. 또한 주 제어기로서 PI제어기를 사용할 경우, 전체 폐루프 시스템이 안정하기 위한 적분상수의 선택범위를 제시하였다. 그리고 플랜트의 시간지연에 어느 정도의 불확실성이 존재하는 경우, 응답에서 진동이 발생하지만 비교적 우수한 성능을 가지고 있음을 컴퓨터 모의 실험을 통해 보였다.

## (참 고 문 헌)

- [1] J. J. Huang and D. B. DeBra "Predictor Type Temperature Control Design Through Parameter Mismatches", Proc. American Control Conf., pp. 1054-1057, 1997
- [2] Q. G. Wang, T. H. Lee, h. W. Fung, Q. Bai, and Yu Zang "PID Tuning for Improved Performance", IEEE Trans. Contr. syst. Technol., vol. 7, pp. 457-465, 1999
- [3] K. J. Astrom and T. Hagglund "PID Controllers: Theory, Design, and Tuning", ISA, 1995
- [4] W. K. Ho, O. P. Gan, E. B. Tay, and E. L. Ang "Performance and gain and Phase Margins of Well-Known PID Tuning Formulas", IEEE Trans. Contr. Syst. Technol., Vol. 4, No. 4, pp. 473-477, 1996
- [5] K. Watanabe "A New Modified Smith Predictor Control for Time-Delay Systems with an Integrator", Proc. 2nd Asian Contr. Conf., Vol.3, pp. 127-130, 1997
- [6] M. R. Mateusek and A. D. Micic "A Modified Smith Predictor for Controlling a Process with an Integrator and Long Dead-Time", IEEE Trans. AC, Vol.41, No.8, pp. 1199-1203, 1996
- [7] 양승현, 박영일, 정차근, 이석원 "시간지연이 존재하는 시스템에 대한 제어기의 안정도 해석", Proc. 13th KACC, 1권, pp. 259-262, 1998.