

다변수 예측제어 시스템의
강인성 향상을 위한 관측기 다항식 설계

김정수, 윤태웅
고려대학교 전기공학과

Observer Design for Enhanced Robustness of
Multivariable predictive control

Jung-Su Kim and Tae-Woong Yoon
Department of Electrical Engineering, Korea Univ

Abstract - This paper considers enhancing the robustness of a MIMO(Multi-Input Multi-Output) predictive control system. The characteristic polynomial matrix of the closed-loop is shown to consist of two factors P_c and T , where P_c is determined by the tuning knobs of the predictive controller and T is an observer or prefilter polynomial matrix. The robust stability condition is derived in terms of P_c and T . A guideline on the selection of T is then presented for open-loop stable processes.

1. 서 론

단일 입출력 예측제어 시스템에 대해서 관측기 다항식 (또는 T 필터)을 통해 시스템의 강인성을 향상시킬 수 있음은 Clarke & Mothadi (1989) 의해서 언급되었다[1]. 즉, 입출력 데이터를 사용하는 예측 제어에서 고려하는 CARIMA(Controlled Autoregressive Integrated Moving Average) 모델에서의 관측기 다항식은 추정되어지는 파라메타보다는 시스템의 강인성을 향상시키는 관측기 다항식으로서 이용된다는 것이다[2]. 단일 입출력 시스템에 대해서 이러한 역할을 하는 T 필터의 체계적인 설계기법은 Yoon & Clarke (1995) [2], Julio & Camacho (1999) [3] 등에 의해 제시되었다. 그러나 다변수 예측제어를 위한 다변수 CARIMA 모델에서의 T 필터 행렬에 대해서는 아직 체계적인 설계 기법이 제시되어 있지 않다. 본 논문에서는 Yoon & Clarke (1995) [2]에 의해 제안된 단일 입출력에서의 T 필터 선정기법을 다변수 시스템으로 확장한 기법을 제시한다. 다변수 예측제어기의 페루프 방정식을 유도하고 다변수 예측제어기의 강인 안정성(robust stability)을 위한 조건을 특이값 부등식(singularvalue inequality) 형태로 유도한다. 이를 바탕으로 개루프가 안정한 시스템에 대해 하나의 채널에 대해서 T 필터의 적절한 모양과 차수를 가정하여 시스템의 강인 안정도를 향상시키는 전체 T 필터 행렬의 설계 기법을 제시한다.

2. 본 론

2.1 다변수 예측제어 법칙

이 절에서는 Yoon[4]이 제안한 다변수 예측제어 법칙을 소개한다. 모델은 다음과 같이 표현된다.

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + \frac{T}{\Delta} \xi(t) \quad (2.1)$$

여기서, $u(t)$ 와 $y(t)$ 는 입력과 출력 벡터, $\xi(t)$ 는 백색 잡음, $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$, $T(q^{-1})$ 는 대각요소만을 갖는 전달함수 행렬이고 Δ 는 차분 연산자 $(1 - q^{-1})$ 이다. 이로부터 최적 예측을 구하면 다음과 같다.

$$\hat{y}_i(t+k) = G_i^k \Delta u(t+k-1) + f_i(t+k) \quad (2.2)$$

$$f_i(t+k) = \frac{F_i^k}{T_i} y_i(t) + \frac{H_i^k}{T_i} \Delta u(t-1) \quad (2.3)$$

여기서 F_i^k , G_i^k 및 H_i^k 는 다음 (2.4)의 Diophantine 항등식을 만족시킨다.

$$T_i = A_i \Delta E_i^k + q^{-k} F_i^k, E_i^k B_i = G_i^k T_i + q^{-k} H_i^k \quad (2.4)$$

이러한 모델과 최적 예측에 대해 다음과 같은 일반적인 2차 비용함수를 고려한다.

$$J = \sum_{i=1}^m J_i \quad (2.5)$$

여기서

$$J_i = \left(\sum_{k=N_y}^{N_y-1} \mu_i(k) [w_i(t+k) - \hat{y}_i(t+k)]^2 + \sum_{k=N_y}^{N_y+m-1} \frac{\mu_i(N_y)}{\gamma} [w_i(t+N_y) - \hat{y}_i(t+k)]^2 + \sum_{k=0}^{N_y-1} \rho_i(k) \Delta u_i(t+k)^2 \right) \quad (2.6)$$

이것은 Yoon과 Clarke (1995)[5]가 SISO 예측제어에서 고려했던 비용함수를 MIMO의 경우로 확장한 것이다[4]. 여기서 비용함수를 간단한 벡터형태로 나타내기 위해서 Yoon[4]에서와 같은 방법으로 벡터 ΔU , w_i , y_i , f_i , \bar{w}_i , \bar{y}_i , \bar{f}_i , $\Delta u(t)$, Q , Λ , Λ_0 등을 정의한다. 이 벡터들을 사용하여 비용함수를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$J = \sum_{i=1}^m \left([y_i - \bar{w}_i]^T Q [y_i - \bar{w}_i] + \frac{\alpha^{-2N_y}}{\gamma} [\bar{y}_i - \bar{w}_i]^T [\bar{y}_i - \bar{w}_i] \right) + \Delta U^T \Lambda \Delta U \quad (2.7)$$

또한, 최적예측은 다음처럼 간단히 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} y_i &= G \Delta U + f_i \\ \bar{y}_i &= \bar{G} \Delta U + \bar{f}_i \end{aligned} \quad (2.8)$$

제어법칙을 더욱 간략히 나타내기 위하여 G , \bar{G} , p , w , \bar{w} , f , \bar{f} , M 등을 역시 Yoon[4]과 같이 정의한다. p 는 $\gamma=0$ 일 때 등식조건 $\bar{G} \Delta U = \bar{w} - \bar{f}$ 에 대한 Lagrange multiplier이다. 이들을 이용하여 위의 제어법칙을 다시 쓰면 아래와 같다

$$\begin{bmatrix} \Lambda + G^T M G & \bar{G}^T \\ \bar{G} & -\gamma \alpha^{2N_y} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^T M (w - f) \\ \bar{w} - \bar{f} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

이는 Yoon과 Clarke [5]가 제시한 SISO 예측제어에서와 같은 형태이다. 출력을 제한하기 위해 위의 제어법칙에서 구한 ΔU 중 $\Delta u(t)$ 만이 (ΔU 의 처음 n 개 요소) 시간 t 에 인가되고 위의 최적화과정은 다시 반복된다 (receding-horizon).

2.2 페루프 해석과 강인 안정도

이 절에서는 다변수 예측제어 시스템의 페루프 방정식을 유도하고 이 페루프가 시스템의 불확실한 파라메타에 대

해서도 안정하게 되는 강인 안정도 조건을 구한다.

2.2.1 다변수 예측제어 시스템의 페루프 해석

(2.9)와 같이 얻어진 제어 법칙에 대해 이동 구간 (receding-horizon) 기법에 의한 한 스텝에서의 제어 입력을 구하면 다음과 같다.

$$\Delta u(t) = \begin{bmatrix} \Delta u_1(t) \\ \Delta u_2(t) \\ \vdots \\ \Delta u_n(t) \end{bmatrix} = [I \ 0] \Delta U(t) \quad (2.10)$$

$$= \sum_{i=N_1}^{N_2} K_i \begin{bmatrix} w_1(t+i) - f_1(t+i) \\ w_2(t+i) - f_2(t+i) \\ \vdots \\ w_n(t+i) - f_n(t+i) \end{bmatrix}$$

I 는 채널수와 같은 차원의 단위행렬이다. (2.3)식을

(2.10) 식의 f_i 에 대입하고

$$\bar{T} = \text{lcm}(T_1, T_2, \dots, T_n), T_{i-} \cdot T_i = \bar{T}, \quad (2.11)$$

$$T_{i-} = \text{diag}[T_{1-}, T_{2-}, \dots, T_{n-}]$$

로 정의하면, 다음과 같은 제어 법칙을 얻는다.

$$R \Delta u(t) = K_s \bar{T} \omega(t) - S y(t) = \bar{T} \omega'(t) - S y(t) \quad (2.12)$$

여기서 R, S, K_s 는 다음과 같이 정의된다.

$$R = \bar{T} + q^{-1} \sum_{i=N_1}^{N_2} K_i \begin{bmatrix} T_1 - H_1^i \\ T_2 - H_2^i \\ \vdots \\ T_n - H_n^i \end{bmatrix}, K_s = \sum_{i=N_1}^{N_2} K_i \quad (2.13)$$

$$S = \sum_{i=N_1}^{N_2} K_i \begin{bmatrix} F_1^i T_{1-} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2^i T_{2-} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_n^i T_{n-} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$= \sum_{i=N_1}^{N_2} K_i \begin{bmatrix} F_1^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2^i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_n^i \end{bmatrix} T_{i-} = S_r T_{i-}$$

$$S_r = \sum_{i=N_1}^{N_2} K_i \begin{bmatrix} F_1^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2^i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_n^i \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

이러한 다변수 제어 법칙에서 페루프 방정식을 구하는 데 있어서 행렬 연산의 순서 문제로 인해 같은 페루프 방정식이지만 형태가 다르게 나타난다. 여기서는 전개의 편의를 위해 $u(t)$ 와 $w(t)$ 사이의 페루프 방정식을 구한다. (2.12)식과 (2.1)로부터 $u(t)$ 와 $w(t)$ 사이의 페루프 방정식을 구하면 외란이 없는 경우 다음과 같다.

$$(\bar{A}R\Delta + q^{-1}SA_-B)u(t) = \bar{A}\bar{T}\omega'(t) \quad (2.16)$$

(2.16)식과 (2.4)식을 이용하면 (2.17)과 같이 페루프 방정식에서 분리 원리(separation principle)가 성립함을 알 수 있다.

$$P_\omega = \bar{A}R\Delta + q^{-1}\bar{S}B = P_c T_- T \quad (2.17)$$

$$P_c = (\bar{A}\Delta + q^{-1} \sum_{i=N_1}^{N_2} K_i A_- \begin{bmatrix} (B_1 - G_1^i A_1 \Delta) \\ (B_2 - G_2^i A_2 \Delta) \\ \vdots \\ (B_n - G_n^i A_n \Delta) \end{bmatrix}) \quad (2.18)$$

여기서

$$\bar{A} = \text{lcm}(A_1, A_2, \dots, A_n), \bar{S} = SA_- \quad \text{이다.}$$

2.2.2 강인 안정도 조건

실제 시스템의 페루프 방정식과 같이 모델에 additive uncertainty를 추가하여 페루프 방정식을 고려하면 다음과 같다.

$$(R\Delta + q^{-1}S(A^{-1}B + \Delta_a))u(t) = \bar{T}\omega'(t) \quad (2.19)$$

$$(R\Delta + q^{-1}\bar{A}^{-1}\bar{S}B + q^{-1}S\Delta_a)u(t) = \bar{T}\omega'(t) \quad (2.20)$$

$$(\bar{A}R\Delta + q^{-1}SA_-B + q^{-1}\bar{A}S\Delta_a)u(t) = \bar{A}\bar{T}\omega'(t) \quad (2.21)$$

이러한 페루프 방정식에 대해서 페루프가 안정도의 경계에 있는 경우는 (2.21)식으로 표현된다.

$$0 = \det(I + q^{-1}(\bar{A}R\Delta + q^{-1}\bar{S}B)^{-1}\bar{A}S\Delta_a) \quad (2.22)$$

그러므로 시스템이 안정하기 위해서는 (2.22)식과 같이 되어야 한다.

$$0 \neq \det(I + q^{-1}(\bar{A}R\Delta + q^{-1}\bar{S}B)^{-1}\bar{A}S\Delta_a) \quad (2.23)$$

이로부터 다음의 정리를 얻는다.

<정리>

(2.24)식이 만족되면 페루프는 안정하다.

$$\delta(\Delta_a) < \alpha(TS_r^{-1}P_c\bar{A}^{-1}) \quad (2.24)$$

▼▼▼

(2.24)식은 (2.23)식을 특이값 부등식 형태로 나타낸 것이다. (2.24)식에서 P_c, A, S_r 는 플랜트에 의해서 결정되는 것이고 T 는 설계 파라메타이다. 그러므로 시스템의 강인성을 향상시키기 위해서는 (2.24)식의 우변이 커지도록 T 를 설계하여야 한다.

2.3 T필터 행렬 설계

이 절에서는 (2.24)식의 우변이 커지도록 하는 T 필터 행렬의 설계 기법을 제시한다.

2.3.1 T_i 차수의 고려

작은 대역폭을 갖거나 고주파에서의 크기 감소 비율이 큰 T 필터를 통해 더 큰 강인 안정도 구간을 얻을 수 있다는 추측들은 모두 사실이 아닐 수 있음이 Yoon[2]에 의해 제시되었다. 즉 강인 안정 구간을 증가시키는

T 필터의 대역폭과 차수에 한계가 있다는 것이다. 그러므로 각 채널에 대해 합리적인 T_i 필터의 차수를 고려해야 한다. (2.4)식의 Diophantine 항등식

$T_i = A_i \Delta E_i^k + q^{-k} F_i^k$ 식에서 T_i 의 차수를 고려해 본다. T_i 는 디자인 파라메타이므로 T_i 의 차수에 따라

E_i^k 와 F_i^k 의 차수가 결정되게 된다. $\delta(T_i)$ 가 $\delta(A_i \Delta E_i^k)$ 보다 작으면 $\delta(F_i^k)$ 는 $\delta(A_i)$ 와 같게 된다.

여기서 δ 는 다항식의 차수를 나타내는 연산자이다. $\delta(T_i)$ 가 $\delta(A_i \Delta E_i^k)$ 보다 크게 되면

$\delta(F_i^k) = \delta(T_i) - k$ 와 같게 된다. k 는 $\delta(q^{-k})$ 에 해당하는 값이다. 이와 같은 사실들을 정리하여 $\delta(F_i^k)$ 을

일반적인 $\delta(T_i)$ 에 대해서 표현하면 다음과 같다.

$$\delta(F_i^k) = \max(\delta(A_i), \delta(T_i) - k) = \max(\delta(A_i), \delta(T_i) - N_i) \quad (2.25)$$

이러한 사실을 바탕으로 $T S_r^{-1}$ 의 형태와 차수를 기술하는 다음과 같은 정리를 제시한다.

<정리>

A_i 가 안정한 다항식이고 T_i 를 다음과 같이 설정한다.

$$T_i = T_i^* A_i, \text{ 즉 } T = T^* A \quad (2.26)$$

그리고 $\delta(T_i^*)$ 가 다음 부등식을 만족한다고 가정한다.

$$\delta(T_i^*) \leq \max(N_1, d) \quad (2.27)$$

그러면 전달 함수 행렬 TS_r^{-1} 는

$$TS_r^{-1} = T^* T^*(1)^{-1} K_s^{-1} \quad (2.28)$$

와 같이 표현되며 강인 안정도 조건 (2.24)는 다음과 같다.

$$\bar{\alpha}(\Delta_a) < \alpha(T^* T^*(1)K_s^{-1}P_c \bar{A}^{-1})$$



위의 정리를 이용하면 강인 안정도 구간을 증가시키기 위해 T 를 설계하는 과정을 $P_c \bar{A}$ 와 독립적으로 진행할 수 있음을 알 수 있다. 이를 바탕으로 다음은 다변수 시스템에서 T 필터 행렬의 설계 예를 보여준다.

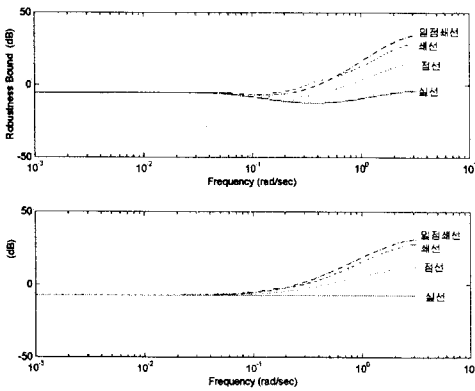
$$A = \begin{bmatrix} 1-1.8629q^{-1}+0.8669q^{-2} & 0 \\ 0 & 1-1.8695q^{-1}+0.8737q^{-2} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.042-0.038q^{-1} & 0.4758-0.4559q^{-1} \\ 0.058-0.054q^{-1} & 0.1445-0.1361q^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

다변수 예측제어의 파라메타는 다음과 같이 설정한다.

$$N_1 = 2, N_u = 5, N_y = 8,$$

$$m = [3 \ 3], \alpha = 0.8, \gamma = 0.1, \rho = 1$$



T 에 대한 (위) $\alpha(TS_r^{-1}P_c \bar{A}^{-1})$ 과 (아래) $\alpha(TS_r^{-1})$ 의 변화

연속선: $T^* = 1$, 점선: $T^* = (1-0.8q^{-1})$

일점 채선: $T^* = (1-0.8q^{-1})^2$, 채선: $T^* = (1-0.8q^{-1})^3$

$$T = AT^*, N_1 = 2$$

그림에서 $T^* = (1-0.8q^{-1})^3$ 일 때 $T^* = (1-0.8q^{-1})^2$ 일 때 보다 작은 강인 안정도 구간을 나타내는 것을 통해서도 $\delta(T^*)$ 의 상한이 N_1 을 넘어서는 것이 큰 강인 안정도 구간을 보장하지 않는다는 사실을 알 수 있다. 그러므로 이 플랜트의 경우 강인 안정도를 극대화 할 수 있는 T 필터 행렬은 다음과 같다.

$$T = \begin{bmatrix} A_1(1-\beta_1q^{-1})^2 & 0 \\ 0 & A_2(1-\beta_2q^{-1})^2 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

예를 보면 T 를 고주파에서 빨리 감소하게 하고 (2.27)식을 만족하게 하기 위해서 좀더 큰 N_1 을 사용하면 된다는 생각을 할 수 있다. 하지만 이렇게 할 경우의 문제점은 N_1 이 P_c 를 변화시킬 수 있다는 것이고 P_c 의 크기가 감소하지 않는다는 것을 보장하지 않는다. (2.24)식의 강인 안정도 구간을 T 를 통해 증가시키는데 있어서 T 가 P_c 와 독립적이어야 한다는 사실에 모순이 되는 것이다. 그러나 P_c 가 N_1 의 변화에 민감하지 않다고 가정하면 큰 강인 안정도 구간을 얻기 위해서 T 와 N_1 을 크게 한다는 것은 합리적이게 된다. 실제로 P_c 가 N_1 의 변화에 민감하지 않다는 사실은 Lambert (1987) [6]에 의해서 제시되었고 페루프에 대한 지수가중치(exponential weighting)의 역할이 N_1 보다 더 중요하다는 사실이 Yoon & Clarke (1993) [7]에 의해 제시되었다. 그러므로 일반적인 시스템에 대해 제시하고자 하는 T 필터 행렬은 다음과 같다.

$$T = \begin{bmatrix} A_1(1-\beta_1q^{-1})^{\nu_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2(1-\beta_2q^{-1})^{\nu_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n(1-\beta_nq^{-1})^{\nu_n} \end{bmatrix}$$

여기서 $\beta_i \in (0,1)$ 는 A_i 다항식의 지배적인 근(dominant root)이고 $0 \leq \nu_i \leq N_1$ 이다.

3. 결 론

본 논문에서는 다변수 예측제어의 페루프 방정식을 유도하여 페루프 시스템의 특성 방정식이 관측기 다항식을 인수로 포함함을 보였다. 그리고 additive uncertainty에 대해서 안정도를 유지하는 강인 안정도 조건을 유도하였다. 또한 이를 근거로, 안정한 플랜트에 대해 강인 안정도를 증가시키는 T 필터의 선정 기법을 제시하였다.

[참 고 문 헌]

- [1] D. W. Clarke and C. Mothadi, 1989, "Properties of Generalized Predictive Control," *Automatica*, Vol. 25, No. 6, pp. 859-875.
- [2] T. W. Yoon and D. W. Clarke, 1995, "Observer design in receding-horizon predictive control," *International Journal of Systems Science*, Vol. 61, No. 1, pp. 171-191.
- [3] Julio E. Normey, Carlos Bordons and Eduardo F. Camacho, 1999, "Simple prefilter design in gpc for a wide class of industrial process", IFAC 99
- [4] T.-W. Yoon, D.R. Kim, K.S. Lee, and Y.M. Kwon, "Adaptive Predictive Control of a Distillation Column," *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 1999, vol. 9, no. 1, pp. 193-206
- [5] T. W. Yoon and D. W. Clarke, 1995, "A Reformulation of Receding-Horizon Predictive Control," *International Journal of Systems Science*, Vol. 26, No. 7, pp. 1383-1400.
- [6] Lambert, M, 1987, Adaptive control of flexible system. D. Phill. thesis, Department of Engineering Science, Oxford University
- [7] T. W. Yoon and D. W. Clarke, 1993, "Receding-horizon predictive control with exponential weighting," *International Journal of Systems Science*, Vol. 24, No. 9, pp. 1745-1757.