1999년도 대한전기학회 정기총회 및 추계학술대회 논문집 1999. 11. 20

LMI 기법을 이용한 시변 불확정성 선형 시스템의 강인 극점 배치 설계

김 재 성*, 마 삼 선, 김 진 훈.
충북대학교 전기전자 공학부

Robust Pole Assignment Design for Linear Time-varying Uncertain Systems using LMI.

Jae-Sung Kim*, Sam-Sun Ma, Jin-Hoon Kim.
School of Electrical Engineering Chung-buk National Univ.

Abstract - In this paper, we consider the design of robust pole assignment for linear system. Considered uncertainty is time-varying uncertainty. Based on Lyapunov stability theorem and linear matrix inequality(LMI), we present the design result for pole assignment. Finally, we give some numerical examples to show the applicability and usefulness of our presented results.

1. 서 론

제어 시스템의 설계에 있어서 폐루프 시스템의 극점들이 시스템의 안정성 뿐만 아니라 성능에 절대적인 영향을 미치므로 중요한 문제중의 하나가 폐루프 시스템의 극점을 원하는 영역으로 배치시키는 것이다. 시스템이 불확정성을 가지지 않는 공칭 시스템(nominal system)인 경우에는 복소평면상의 원하고자 하는 영역으로 극점을 배치시키는 제어기의 설계는 항상 가능하다. 하지만 불확정성이 포함되는 시스템에 대하여는 규정된 영역이 복소 평면상의 좌반부에 위치하고 그 영역에 극점이 위치하더라도 불확정성이 시변이라면 별도의 안정할 조건을 제시하여야 한다.

상태 공간(state space)에서 시스템의 안정도에 불확정성이 없는 공칭 시스템(nominal system)의 극점 배치에 관한 결과를 제시하였으며[1] 불확정성에 대한 관심이 대두되기 시작하면서 matrix measure를 이용하며 시불변 불확정성에 대한 극점 배치 결과를 제시하였고[3], 상태궤환을 통해 폐루프 공칭 시스템의 극점을 규정된 영역 내로 위치시키는 optimal regulator을 설계 하였다[2]. 또한 *"quadratic d stability"*을 이용한 접근법으로 비구조적인 불확정성을 갖는 시스템의 극점 배치를 위한 제어기 설계를 다루었으며[5], 시변 불확정성에 대하여는 LMI 기법을 통하여 비구조적 불확정성과 구조적 불확정성에 대하여 *"d-stability"* 와 안정도를 동시에 만족하는 조건을 제시하였다[9].

하지만 이전의 방법을 통하여 원하는 영역에 극점을 배치시키는 경우에는 여러 변수들의 값을 임의로 설정해 주거나 달리 구해야 하는 번거로움과 단점이 있어서 많은 제약이 있는 것이 사실이다. 그러나 선형 행렬 부등식(Linear Matrix Inequality,LMI)을 사용할 경우에는 여러 제약(constraint)을 반영하므로 간단한 방법을 통하여 한번에 원하고자 하는 파라미터를 쉽게 구할 수 있는 장점이 있다.

본 논문에서는 시변 불확정성을 갖는 선형 시스템에 대하여 극점을 배치시키는 설계 문제를 다루고자 한다. 이전의 극점 배치에 대한 연구 결과를 보면 많은 결과들이 공칭 시스템은 물론 불확정성이 포함된 시스템에 대하여 결과 값들을 제시 하였으나 앞에서 말한 바와 같이 LMI 기법을 이용한 결과는 제시된 것이 거의 없는 실정이며 시변 불확정성이 포함된 시스템의 경우 또한 많이 다루지 않았다. 규정된 영역에 대하여는 이전의 연구에서 복소 평면상의 좌반부에 위치하는 원판(disk), 타원(ellipse), 원뿔(conic), 수직띠(vertical strip), 환상(corona) 등과 같이 여러 영역에 대한 연구가 되어져 왔으나 현재 많이 연구 되고 있는 다음과 같이 선형 시스템의 모든 극점이 그림 1과 같이 중심이 $-\alpha$, $\alpha>0$ 이고 반지름이 $r>0$, $(r\le\alpha)$인 원판 내에 존재하는 것이 보장되는 LMI형태의 조건으로 표현하는 것이다.

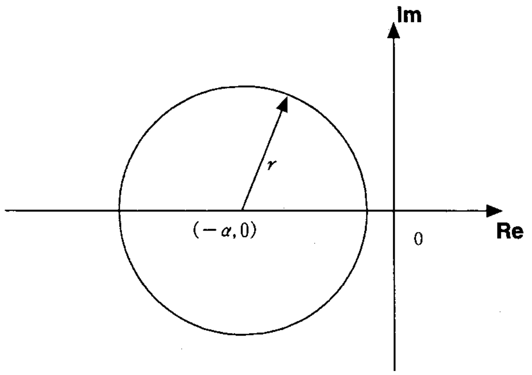

그림 1. 중심 $-\alpha$, 반지름 r인 디스크 $D(-\alpha, r)$

2. 문제 기술

다음과 같은 선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + Bu(t) \tag{1}$$

여기에서 $x(t)\in R^n$은 상태를 나타내고, $A\in R^{n\times n}$, $B\in R^{n\times m}$은 시스템 행렬이며 선형 시스템(1)의 제어기로는 다음과 같은 상태 궤환을 고려하자.

$$u(t) = Kx(t) \tag{2}$$

고려된 불확정성 $\Delta A(t)$는 다음의 조건을 만족한다.

$$\Delta A(t) = DF(t)E, \quad F(t)^T F(t) = I_n \tag{3}$$

다음에 오는 정리들은 주요결과의 증명에 이용하는 정리이다.

<u>보조정리1</u> 다음과 같은 불확정성을 갖는 선형 폐루프 시스템을 고려하자

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

이때 다음을 만족하는 양확정 행렬 P가 존재 한다면

$$(A+\alpha I_n)P(A+\alpha I_n)^T - r^2 P < 0$$

불확정성을 포함하는 폐루프 시스템의 모든 극점은 규정된 원판 $D(-\alpha, r)$ 내에 존재한다.

<u>증명:</u> 행렬 A의 고유치가 원판 $D(0,1)$에 있을 필요충분 조건은 임의의 행렬 $Q=Q^T>0$에 대하여 $A^TPA-P=-Q$를 만족하는 $P=P^T>0$가 존재하는 것이므로, 행렬 A의 고유치가 $D(\alpha,1)$에 위치할 필요충분 조건은 임의의 행렬 $Q=Q^T>0$에 대하여 다음식

$$(A+\alpha I_n)^T P(A+\alpha I_n) - P = -Q$$

를 만족하는 $P=P^T$가 존재하는 것이며 따라서, 행렬 A의 고유치가 $D(\alpha, r)$에 있을 필요충분 조건은 임의의 행렬 $Q=Q^T>0$에 대하여 다음식을 만족하는 것이다.

$$(A+\alpha I_n)^T P(A+\alpha I_n) - r^2 P < 0$$

따라서 위의 식을 만족하는 양확정 행렬 P가 존재한다면 시스템의 극점은 $D(-\alpha, r)$의 내부에 위치한다. ■■

<u>보조정리2</u>[11] 임의의 두 행렬 X, Y와 양확정 행렬 R에 대하여 다음이 성립한다.

$$X^TY + Y^TX \le X^TRX + Y^TR^{-1}Y$$

<u>보조정리3</u>[13] 임의의 행렬 $P>0$와 양의 스칼라 $\varepsilon>0$에 대하여 다음의 부등식은 성립한다.

$$(A+DFE)^T P^{-1}(A+DFE) \le A^T(P-\varepsilon DD^T)^{-1}A + \varepsilon^{-1}E^TE$$

여기에서 $P-\varepsilon DD^T>0$이다.

<u>보조정리4</u>[12] 임의의 대칭 행렬 Q와 대칭 양확정 행렬 R에 대하여 다음의 두 선형 행렬 부등식(LMI)는 동치(equivalent)이다.

$$\text{I)}\quad Q + W^TR^{-1}W < 0, \quad R>0$$

$$\text{II)}\quad \begin{bmatrix} Q & W^T \\ W & -R \end{bmatrix} < 0$$

3. 강인 극점 배치 설계

다음에 오는 정리1은 시변 불확정성 선형 시스템에 대하여 $D(-\alpha, r)$의 내부에 극점이 위치하게 하는 제어기의 설계 문제에 대한 내용을 다룬 정리이다.

<u>정리1</u> 다음의 LMI를 만족하는 양확정 행렬 $Q>0$와 양의 스칼라 ε_1, ε_2가 존재하면

$$\begin{bmatrix} -r^2Q & (A_\alpha Q+BY)^T & QE^T \\ (A_\alpha Q+BY) & -(Q-\varepsilon_1 DD^T) & 0 \\ EQ & 0 & -\varepsilon_1 I_n \end{bmatrix} < 0 \qquad (4)$$

$$\begin{bmatrix} QA^T+AQ+Y^TB^T+BY+\varepsilon_2 DD^T & QE^T \\ EQ & -\varepsilon_2 I_n \end{bmatrix} < 0 \qquad (5)$$

선형 시스템 (1)의 극점은 $D(-\alpha, r)$의 내부에 위치하며 안정하다. 여기에서 $Q-\varepsilon_1 DD^T>0$이다.

<u>증명:</u> 시변 불확정성 선형 시스템(1)에 제어기(2)를 갖는 폐루프 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = (A+BK+\Delta A(t))x(t) \qquad (6)$$

보조정리1을 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$(A+BK+\Delta A(t)+\alpha I_n)^T P(A+BK+\Delta A(t)+\alpha I_n) - r^2 P \qquad (7)$$

여기에서 $A_\alpha = A+\alpha I_n$으로 놓고, 보조정리3을 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\le (A_\alpha+BK)^T(P^{-1}-\varepsilon_1 DD^T)^{-1}(A_\alpha+BK) + \varepsilon_1^{-1}E^TE - r^2P \\ &\le P^{-1}(A_\alpha+BK)^T(P^{-1}-\varepsilon_1 DD^T)^{-1}(A_\alpha+BK)P^{-1} + \varepsilon_1^{-1}P^{-1}E^TEP^{-1} - r^2P^{-1} \end{aligned} \qquad (8)$$

여기서 $Q=P^{-1}$, $Y=KQ$ 로 놓으면

$$(A_\alpha Q+BY)^T(Q-\varepsilon_1 DD^T)^{-1}(A_\alpha Q+BY) + \varepsilon_1 QE^TEQ - r^2Q < 0 \qquad (9)$$

위의 식을 다시 LMI 형태로 표현하면 정리1의 식(4)와 같다. 또 주어진 불확정성이 시변이면 규정된 원판 $D(-\alpha, r)$이 복소 평면상의 좌반부에 위치하더라도 안정성을 보장하지 못하므로 별도의 안정성을 보장하는 조건을 보면 다음과 같다.

궤환 시스템 (6)에 대하여 Lyapunov 후보함수의 시간에 따른 미분값을 보면

$$\dot{V} = x^T\{(A^TP+PA+K^TB^TP + PBK+\Delta A(t)^TP+P\Delta A(t))\} < 0$$

따라서,

$$\begin{aligned} &(A^TP+PA+K^TB^TP+PBK+\Delta A(t)^TP+P\Delta A(t)) \\ &\le (A^TP+PA+K^TB^TP+PBK+2P\Delta A(t)) \\ &\le (A^TP+PA+K^TB^TP+PBK+\varepsilon_2 PDD^T+\varepsilon_2^{-1}E^TE) \\ &< 0 \end{aligned}$$

여기서 $Q=P^{-1}$, $Y=KQ$으로 놓으면

$$QA^T + AQ + BY + Y^TB^T + \varepsilon_2 DD^T + \varepsilon_2^{-1} QE^TEQ < 0 \quad (10)$$

위의 식(10)을 LMI 형식으로 표현하면 정리1의 식(5)으로 나타낼 수 있다. 따라서 식(4), (5)를 동시에 만족하는 $Q>0$과 양의 스칼라인 ε_1, ε_2가 존재하면 시변 불확정성 선형 시스템(1)의 극점은 규정된 원판 $D(-\alpha, r)$에 위치하게 되며 안정하다.

■■

3. 수 치 예 제

위에서 제시된 결과의 유용성을 보이기 위해서 다음과 같은 선형 시스템을 고려하기로 한다.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2.8 & 2.3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \Delta A(t)x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (9)$$

여기서 불확정성 $\Delta A(t)$는 다음과 같다.

$$D = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = [\,0 \;\; 0.5\,]$$

주어진 시스템 행렬 A는 고유값이 $\{-5.0639, 1.2639\}$인 불안정한 행렬이다.

위의 시스템에 대하여 $D(-\alpha, r)$의 내부에 극점이 위치하도록 하게 하는 제어기 K의 값과 구하여진 제어기를 갖는 시스템의 극점 위치를 구하여 보면 다음 표1과 같다.

$D(\alpha, r)$	K	궤환시스템의극점위치
$D(-1.5, 0.5)$	$\{-4.7126, 0.7603\}$	$\{-1.5198 \pm j0.0071\}$
$D(-1.5, 1.0)$	$\{-4.6426, 0.6526\}$	$\{-1.7346, -1.4127\}$
$D(-3.0, 1.5)$	$\{-4.0139, -1.9058\}$	$\{-2.8529 \pm j0.1705\}$
$D(-3.0, 2.5)$	$\{-3.8118, -1.8718\}$	$\{-2.1771, -3.4948\}$

표1. $D(-\alpha, r)$의 내부에 극점이 위치하게 하는 제어기와 궤환된 시스템의 극점

구하여진 제어기에 의하여 불안정한 시스템의 극점이 규정된 원판의 내부에 위치하며 안정함을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 시변 불확정성 선형 시스템에 대하여 규정된 원판 $D(-\alpha, r)$의 내부에 극점이 위치하도록 하는 제어기를 설계 하였다. Lyapunov안정성 이론에 기초하여 LMI 접근법을 사용하여 간단한 방법으로 결과 값을 제시 하였다.

주어진 불확정성에 대하여는 상태에 대하여 시변 불확정성이 존재하는 시스템을 고려하였으나 제어입력에도 불확정성이 있는 시스템에 대하여도 연구가 되어야 할 것이다.

[참 고 문 헌]

[1] K.Furuta, and S.B.Kim, "Pole assignment in a specified disk", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 32, No. 5, 1987.

[2] S.B.Kim, and K.Furuta, "Regulator design with poles in a specified region", *Int, J, control*, Vol.47. No.1.,1988

[3] S.S.Wang, and W.G.Lee, "On the Analysis of eigenvalue Assignment Robustness", *IEEE Trans. Automat.* Contr., Vol. 37,No. 10, 1992.

[4] Y.T.Juang, "Robust Stability and Robust Pole Assignment of Linear Systems with Structured Uncertainty" *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 36, No. 5, 1991.

[5] G.Garcia, and J.Bernussou, "Pole Assignment for Uncertain Systems in a Specified Disk by State Feedback", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 40, No. 1, 1995.

[6] S.Boyd, L.E.Ghaoui, E.Feron, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, studies 15, 1994.

[7] A.Rachid, "Robustness of pole assignment in a specified region for perturbed systems", *INT. J. Systems SCI.*, Vol. 21, No. 3, 1990.

[8] 김진훈, "시변 불확정성을 갖는 선형 시스템의 강인 극점 배치", *Trans, KIEE*, Vol. 48A, No. 1, 1999.

[9] 김재성, 김진훈, "불확정성 선형 시스템의 강인 극점 배치", *대한전기학회 하계학술대회 논문집 B권*, 1999.

[10] K.Zhou, J.C.Doyle, K.Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, 1996.

[11] J.N.Franklin, *Matrix theory*, Prentice Hall, 1968.

[12] S.Boyd, L.E.Ghaoui,E.Feron and V.Balakrishnan. *"Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory"*, SIAM. 1994.

[13] Y. Y. Cao, Y. X. Sun, and C. Cheng. "Delay-Dependent Robust Stabilization of Uncertain Systems with Multiple State Delays",*IEEE Trans Auto Contr.* Vol.43. No.11. pp.1608-1612. 1998.