

리파토프 정리를 이용한 구간 플랜트의 제어기 설계

* 이진규*, 차영호*, 정태진*, 박용식**, 장찬수*
 *송실대학교 전기공학과, **영지대학교 전기정보제어공학부

Robust Controller Design for interval Plant using Lipatov Theorem

* Jin-Kyu Lee*, Young-Ho Cha*, Tae-Jin Chung*, Yong-Sik Park**, Chan-Soo Chung*
 *Dept. Electrical Eng. Soongsil Univ., **Dept. Control&Instrumentation Electrical Eng. Myongji Univ.

Abstract - In this paper, We design low-order controller to achieve maximized controller stability margin and controller performance. FOPA(Fixed Order Pole Assignment) method is one of the approach to design controller in the parametric uncertain system. But the method to define a Target Polynomial is not explicitly Known. In this paper, our goal is to find a controller Coefficient, such that performance and l_2 stability margin are maximized in the parametric uncertain system. Using Lipatove theorem and CDM(Coefficient Diagram Method), we set target polynomial constraints and design a controller which maximizes l_2 stability margin. we show effectiveness of the proposed controller design method by comparing l_2 stability many of the desired controller with that of the conventional robust controller.

1. 서 론

불확실한 시스템에 대해서 강인 안정도를 유지하는 제어기를 설계함에 있어서, 실제 제어기 구현시의 플랜트의 부정확성 때문에 정확히 구현하는데 많은 어려움이 있다. 최근 Keel은 기존의 강인 제어기 설계방법으로 설계된 제어기가 제어기 계수의 섭동에 대하여 상당히 작은 안정도 여유를 갖는다는 것을 발표했다[1,2]. 기존의 강인제어 기법으로 제어기를 설계할 경우 제어기 고차화를 피할수 없으며 일반적으로 알려진 사실이다. 따라서 제어기의 계수적 안정도 여유를 확보하고 설계자의 설계사양을 만족하는 저차의 제어기를 설계하는 것이 바람직하다. 저차의 제어기 설계기법으로는 desired target polynomial을 결정한 후 조건에 맞는 제어기를 찾아내는 방법을 사용하였다. target polynomial을 결정함에 있어 CDM(Coefficient Diagram Method) 과 리파토프 정리를 사용하여 설계 사양을 만족하는 구간다항식을 정하고 이중에서 성능이 우수한 제어기 계수를 찾는 것을 목적으로 한다. Target polynomial을 제한 조건으로 두고 l_2 stability margin을 극대화하는 제어기를 설계한다. 이렇게 함으로써 l_2 stability margin을 최대화하는 강인 제어기를 설계할 수 있다. 구간 불확실 시스템에서 구해진 제어기와 기존의 강인 제어기법으로 구한 제어기의 성능을 비교해 봄으로써, 새로운 방법으로 구한 제어기 설계방법의 우수성을 입증하고자 한다.

2. Target polynomial

구간 불확실 플랜트의 안정도 분석에 관한 연구결과는 많이 발표되었지만 제어기 설계에 관한 연구결과는 많이 없다. 이러한 구간플랜트를 안정화하기 위해서 [6]에서

는 기존의 강인제어 기법으로 제어기를 설계했지만 l_2 안정도 여유가 매우 작게 나타났다. 따라서 저차의 제어기로 구간플랜트를 안정화시키는 설계방법이 필요하다 [6]. 구간플랜트를 안정화하는 저차 제어기를 설계함에 있어 안정화된 전체 폐루프 특성다항식의 계수들의 구간을 식 (1) 과 같이 정해놓고 이렇게 정해놓은 구간에 주어진 구간플랜트 P(s) 와 fixed order 제어기 C(s) 의 closed loop characteristic polynomial의 계수들의 구간을 포함시키는 FOPA(Fixed Order Pole Assignment) 방법이 있다[4].

$$\delta_T(s) = \delta_{n+r}^T s^{n+r} + \delta_{n+r-1}^T s^{n+r-1} + \dots + \delta_0^T \quad (1)$$

$$\delta_i^- \leq \delta_i^T \leq \delta_i^+, \text{ for all } i$$

(n : 구간플랜트의 차수)
 (r : 제어기의 차수)

일반적으로, $r \geq n-1$ 인 경우 임의의 위치에 폐루프를 위치시킬 수 있으나 $r < n-1$ 인 경우에는 임의의 위치에 극점을 위치시키는 제어기가 존재하지 않을 수도 있다. 게다가, 이 문제는 전체 폐루프 시스템의 동특성과 밀접한 관련이 있기 때문에 설계자는 어느 정도의 경협이 있어야 한다. 따라서, 이 문제를 해결하기 위해서 본 논문에서는 CDM과 리파토프 안정도 충분조건을 이용해 target polynomial을 결정하도록 하고, 이렇게 결정된 target polynomial을 가지고 제어기를 설계하는 방향을 제안한다.

3. Target Polynomial의 설계

S.Manabe에 의해 발표된 CDM[3]의 장점은 폐루프 시스템의 안정성, 시간응답 및 강인성을 함께 고려하면서 저차의 제어기를 쉽게 설계할 수 있게 한다는 것이다. 만약 특성 다항식 $\delta(s)$ 가 다음과 같이 주어진다면

$$\delta(s) = \delta_n s^n + \dots + \delta_1 s + \delta_0 \quad (2)$$

그 때 안정도 지수 γ_i , 등가 시정수 τ 와 안정도 한계지수 γ_i^* 는 다음과 같이 정의된다.

$$\gamma_i = \frac{a_i^2}{a_{i+1} \cdot a_{i-1}} \quad i = 1 \sim n-1 \quad (3)$$

$$\tau = \frac{a_1}{a_0} \quad (4)$$

$$\gamma_i^* = \frac{1}{\gamma_{i+1}} + \frac{1}{\gamma_{i-1}} \quad \gamma_n = \gamma_0 = \infty \quad (5)$$

위 계수들을 이용하여 식(2) 를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\delta(s) = a_0 \left[\left\{ \sum_{i=2}^n \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\gamma_{i-j}} \right) (\tau s)^i \right\} + (\tau s) + 1 \right] \quad (6)$$

보조정리 1

식 (3),(4),(5),(6)을 이용해 계수 a에 관한 식으로 변환하면

$$\delta_i = \delta_{i+1} \frac{\sum_{k=1}^{n-(i+1)} \gamma_k}{\tau} \quad (i \leq n-2, \delta_n = 1, \delta_{n-1} = \frac{1}{\tau}) \quad (7)$$

구간 플랜트에서 설계자의 설계사양에 만족하도록 CDM과 리파토프 안정도 충분조건으로 target polynomial을 구하는 단계는 다음과 같다.

1. 안정도 지수 γ_i 를 결정한다.
2. settling time에 만족할만한 τ_{max} 를 구한다. (3) ($t_s = (2.5 \sim 3)\tau$)
3. 설계사양의 제어기 출력을 넘지 않는 τ_{min} 를 구한다.
4. $\delta_i^{min(1)}, \delta_i^{max(1)}$ 를 설정된 γ_i 와 τ_{max}, τ_{min} 로써 계산한다.
5. 리파토프 안정도 충분조건

$$\min \left\{ \frac{(\delta_i^{min})^2}{\delta_{i+1}^{min} \delta_{i-1}^{max}}, \frac{(\delta_i^{max})^2}{\delta_{i+1}^{max} \delta_{i-1}^{min}} \right\} > 1.4656 \quad \text{만족하도록}$$

$\delta_i^{min(2)}, \delta_i^{max(2)}$ 을 구한다. (7)

6. 4번과 5번에서 구한 구간의 교집합을 구한다.

4. 제어기 설계

앞 절에서 제안한 방법으로 target polynomial을 구하면 식(1)의 형태로 표현이 된다. 이렇게 표현된 target polynomial에 페루프 시스템의 특성다항식이 포함되게 하기 위해서는 다음과 같은 선형 제약조건을 만족하면 된다(8).

$$\delta_i^{T-} \leq \delta_i(X, P_v) \leq \delta_i^{T+}, \quad \text{for all } i \quad (8)$$

여기서

$$\begin{pmatrix} X = \text{제어기의 계수} \\ P_v = \text{플랜트 계수 구간의 vertices} \end{pmatrix}$$

즉, 식(8)로 표현된 선형 제약조건을 만족하는 제어기들은 주어진 구간플랜트를 안정화하고 설계자의 설계사양을 만족하는 제어기의 집합이라고 볼 수 있다. 이 집합에서 l_2 stability margin 등을 최적화하는 하나의 제어기를 구할 수 있을 것이다. 하지만, l_2 stability margin의 최적화를 위한 분석의 결과가 아직 이루어지지 않았기 때문에 현재까지는 구한 집합을 일정한 간격으로 분해하고 각 지점에서의 l_2 stability margin을 최대화하는 방법을 사용할 수밖에 없다. 다음 절에서는 구간 플랜트로 표현되는 도립진자 시스템에 대해서 제안한 설계방법을 이용하여 제어기를 설계한다.

5. 모의실험

식(9)과 같은 구간플랜트로 표현되는 도립진자 시스템을 생각한다(5). 도립진자의 모델링 전달함수는

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{ml_s}{s^3 + \frac{b(I+ml^2)}{a}s^2 - \frac{(M+m)mgl}{a}s - \frac{bmgI}{a}} \quad (9)$$

$$a = [(M+m)(I+ml^2) - (ml)^2]$$

위 계수들 중 관성계수 I와 마찰계수 b는 모델링시 정확한 값을 찾아내기란 쉽지 않다. 따라서, 측정값의 $\pm 10\%$ 를 주었다.

$$b = 0.09 \sim 0.11, \quad i = 0.0054 \sim 0.0066$$

이러한 불확실한 플랜트를 계산한 값은 (10)과 같다.

$$P(s) = \frac{\beta_1 s}{s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (10)$$

$$\beta_1 \in [4.4053 \quad 4.6948], \quad \alpha_2 \in [0.16256 \quad 0.20141],$$

$$\alpha_1 \in [-32.207 \quad -30.220], \quad \alpha_0 \in [-5.0610 \quad -3.8855]$$

이와 같은 구간플랜트를 가지게 된다.

5-1 설계사양

1. Settling Time이 1.2초 미만으로 한다.
2. 제어기 출력이 15[volt]가 넘지 않도록 한다.
3. 펜들럼 각도의 변화가 0.20[rad]이 넘지 않도록 한다.

5-2 제어기 설계

1. $\gamma_i = [2.5 \quad 2 \quad 2 \dots]$
2. 설계사양에 따라 $0.2 < \tau < 0.3$ 으로 결정
3. CDM과 리파토프 정리에 의한 표 1

	r로 조정		리파토프		최종구간		a _i
	min	max	min	max	min	max	
δ_3	1	1	-	-	1	1	1
δ_2	16.67	25	-	-	16.67	25	$K_D\beta_1 + \alpha_2$
δ_1	138.9	312.5	0	189.5	138.9	189.5	$K_P\beta_1 + \alpha_1$
δ_0	463.0	947.7	0	526.5	463.0	526.5	$K_I\beta_1 + \alpha_0$

표 1. Target Polynomial의 설정을 위한 표

$$\begin{pmatrix} 16.67 \\ 138.9 \\ 463.0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \delta_2 \\ \delta_1 \\ \delta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_D\beta_1 + \alpha_2 \\ K_P\beta_1 + \alpha_1 \\ K_I\beta_1 + \alpha_0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 25 \\ 189.5 \\ 526.5 \end{pmatrix} \quad (11)$$

τ 값으로 조정하는 방법은 보조정리 1을 이용해 계산할 수 있다. 그림 1은 이렇게 정해진 최종 target polynomial의 pole의 위치이다.

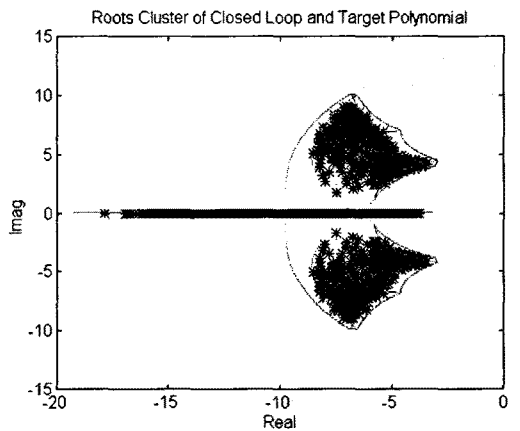


그림 1. CDM과 리파토프 안정도 충분조건을 이용한 Closed Loop & Target Polynomial에서의 Pole 위치

그림 1에서 보는바와 같이 설계사양에 맞는 구간이 생기게 된다. 이런 구간에서의 동특성을 확인해 보기 위해 카리토노프 다항식을 구해서 각각의 계단응답을 보면 식(12)과 그림 2와 같다.

$$K_1 = s^3 + 16.67s^2 + 138.9s + 526.5 \quad (12)$$

$$K_2 = s^3 + 16.67s^2 + 189.5s + 526.5$$

$$K_3 = s^3 + 25s^2 + 189.5s + 463.0$$

$$K_4 = s^3 + 25s^2 + 138.9s + 463.0$$

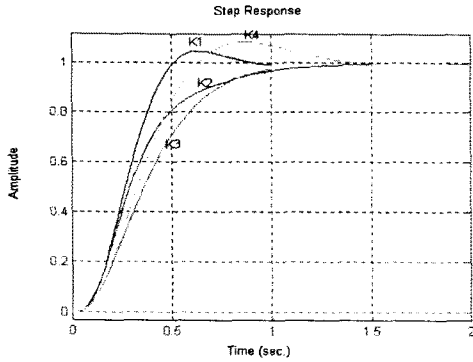


그림 2. 구하여진 target polynomial의 카리토노프 다항식 각각의 계단응답

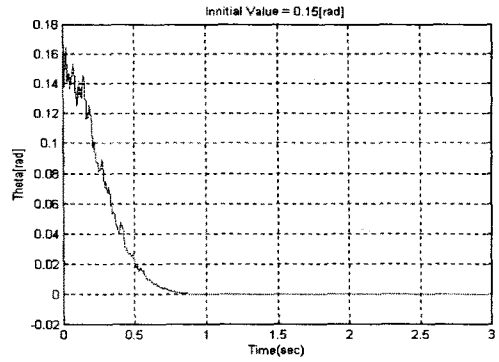


그림 4. 플랜트와 제어기의 계수들의 불확실성에 대한 초기값 0.15(rad)의 각도변화

그림 2에서 보는바와 같이 비록 약간씩의 다른 특성을 보이긴 하지만 수렴시간은 모두 설계조건을 만족시키고 있다. 그림 이러한 특성을 만족하는 제어기의 구간을 구해보면 다음과 같다.

$$38.839 \leq K_p \leq 46.807 \quad (13)$$

$$106.24 \leq K_i \leq 112.97$$

$$3.7464 \leq K_d \leq 5.2821$$

이러한 범위 내에선 구간플랜트를 모두 안정화할 수 있다. 이러한 제어기의 범위에서 l_2 parametric stability margin을 최대화하는 K_p, K_i, K_d 를 구한다. 그림 3은 이러한 제어기 계수의 변화에 따른 l_2 parametric stability margin을 나타낸 그림이다. 그림에서 보는 바와 같이 $K_p=39.0, K_i=106.24, K_d=5.2821$ 에서 가장 큰 안정도 여유를 갖는다는 것을 알 수 있다. 여기서의 l_2 stability margin은 1.1018×10^{-3} 으로 기존의 강인제어 기법보다 약 1.8085×10^2 만큼의 향상이 있음을 알 수 있다[6].

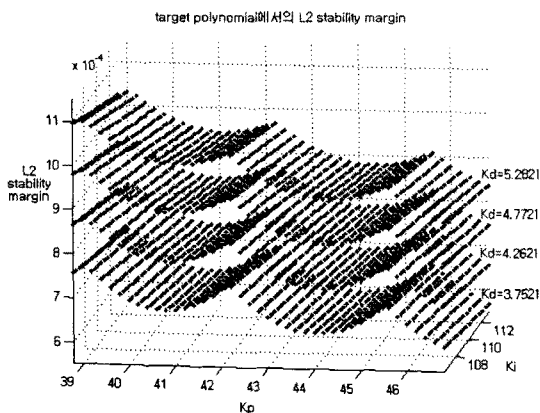


그림 3. 제어기의 변화에 따른 l_2 Stability Margin

다음 그림 4.는 구간플랜트에 대해 설계된 제어기의 성능에 대한 모의실험 결과이다. 구간플랜트와 제어기의 계수들은 구간을 가지므로 그림과 같이 왜곡된 파형을 가지게 되지만 만 설계사양에 만족하는 응답을 볼 수 있다.

6. 결 론

현재까지의 강인제어 기법으로 설계된 제어기들이 자체의 섭동에 대해 작은 안정도 여유를 갖고 있기 때문에, 실제 플랜트에 적용하기에 어려움이 있다. 따라서 본 논문에서는 안정도 여유를 높이기 위해 저차 제어기인 PID 제어기를 사용하여 구간플랜트를 안정화하는 제어기를 parametric robust control 기법으로 설계하였다. 본 논문에서는 설계사양에 맞는 target polynomial의 구간을 설정하는 문제에 있어 CDM기법과 리파토프 안정도 충분조건을 이용하여 새로운 안정화 구간을 정하는 방법을 제시하였다. 이렇게 설계된 target polynomial에서 l_2 stability margin을 최대화하는 제어기의 계수를 찾을 수 있었고, 이러한 방법은 불확실한 시스템에서도 설계조건에 맞는 제어기를 설계하는데 큰 도움이 될 것이다.

(참 고 문 헌)

- [1] L.H Keel, S.P Bhattachayya, "Robust, Fragile, or Optimal", IEEE Trans, Automatic Control, Vol42, p1098~1105 1997
- [2] L.H Keel, S.P Bhattachayya, "Stability Margin and Digital Implementation of Controllers", Proceedings of the ACC June 1998 p2852~2856
- [3] S. Manabe, "Coefficient Diagram Method", 14th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, p199~210, Aug 1998
- [4] S.P Bhattachayya, L.H. Keel, M. Ikeda "New Approach to Feedback Design" International Workshop 충북대학교, July 1999
- [5] CTM Example : PID control of the inverted pendulum model.
<http://rclsgi.eng.ohio-state.edu/matlab/examples/pend/invPID.html>
- [6] 차영호, 정태진, 원용규, 정찬수, "도립진자 시스템에서의 제어기 안정도 향상" Proceedings of the 14th KACC, Oct 14~16 1999
- [7] 주성준, 박영배, "리파토프 정리를 이용한 강인한 제어기 설계", Proceedings of the 13th KACC, Oct 1999
- [8] S.P Bhattachayya, H.Chapellat, L.H. Keel "Robust Control: The Parametric Approach. Upper Saddle River, NJ:Prentice Hall, 1995