

QFT를 이용한 다변수시스템의 제어기 설계

최용희*, 정재윤*, 박용식**, 김영철*
 *충북대학교 전기전자공학부, **명지대학교 전기제어계측공학부

A Multivariable Control design using Quantitative Feedback Theory

Choi Yong Hee*, Jung Jae Yun*, Yong Sik Park**, Young Chol Kim*

*School of Elec. Eng., Chungbuk National Univ. **School of Elec. & info. Cont., MyongJi Univ.

Abstract - In this paper, we propose the robust performance design of multivariable systems within the framework of Quantitative Feedback Theory(QFT) using ICD. The ICD(Individual Channel Design) is a multivariable control method based on the classical frequency response. It is considered to apply feedforward controller for compensating the effect of interconnection between channels. Performance of the proposed method are demonstrated by simulations in applying gas turbine model.

1. 서론

고전적 주파수응답을 이용한 다변수 제어시스템에 대한 제어기 설계법중 하나인 ICD[1],[2],[3]는 다변수 시스템을 같은 수의 단일 입, 출력문제로 분리시키고 주파수 영역상에서 loop shaping에 근거하여 플랜트의 안정도와 상호간섭문제를 고려하여 설계하는 방법이다. 그러나 이러한 설계법은 어느 공칭플랜트에 대해서 제어기를 구할 수는 있으나 플랜트가 불확실성을 갖고 있으면 제어기를 구하는 문제에 적절하지 않다. 따라서 만일 플랜트가 불확실성을 갖고 있다면 Horowitz[4],[5]에 의해 발전된 QFT설계기법을 이용하여 제어기를 설계한다. 그러나 QFT에서 다변수 시스템에 대해 직접적용을 할 수 있는 설계기법은 존재하지 않으며 수개의 단일 입출력 시스템으로 분해 한 후, 각 부시스템에 대해 설계하게 되는데 기존의 방법은 입출력 채널이 제어기 수보다 많아지기 때문에 적합한 제어기를 설계하기 위해서는 반복설계를 피할 수 없다. 본 논문에서는 ICD기법을 이용하여 각각의 채널로 분리한 다음, 같은 주파수 설계법인 QFT를 이용하여 2x2 다변수 시스템에 대해 피드백 제어기를 설계하는 방법을 제시한다. 논문의 구성으로는 2장에서 ICD를 이용한 채널분리법을 설명하고 QFT와 전향보상기의 설계방법을 기술한다. 3장에서는 2x2 다변수시스템의 예로서 가스터빈모델에 적용한 모의실험 결과를 보이고 4장에서 결론을 맺는다.

2. 본론

다변수 시스템에 대해 QFT설계기법을 적용하기 위해 시스템의 상호간섭부분을 포함하는 각 채널로 분리해야 한다. 본 장에서는 분리된 채널에 대해 QFT 제어기를 설계하고 전체시스템에 대해 상호간섭부분을 보상하는 전향보상기를 설계하는 절차를 보인다.

2.1 ICD채널 분해법

그림 1과 같은 2x2시스템을 고려한다. 이때 플랜트의 전달함수는 다음과 같다.

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (1)$$

입력과 출력의 관계에 따라 채널을 그림 2와 같이 분리할 수 있으며 각 채널의 전달함수식은 다음과 같다.

$$C_1(s) = k_1 g_{11}(1 - \gamma h_2) \quad (2)$$

$$C_2(s) = k_2 g_{22}(1 - \gamma h_1) \quad (3)$$

여기서 $\gamma(s)$ 는 입력-출력간의 상호결합정도를 나타내는 전달함수이며 k_1, k_2 는 각 채널에 설계된 제어기이다.

식(4)과 같이 표현되는 $\gamma(s)$ 는 채널 이득교차주파수(gain crossover frequency)이하나 근처에서 1보다 매우 작으면 각 채널의 제어기를 바로 설계할 수 있다. 또한 $\gamma(s)$ 가 채널 이득교차주파수 이하나 근처에서 1보다 매우 큰 경우 각 채널의 제어기는 입력 쌍을 바꾸어주기(swapping)를 함으로써 설계될 수 있다.

$$\gamma(s) = \frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22}} \quad (4)$$

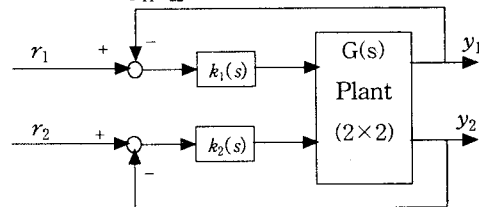
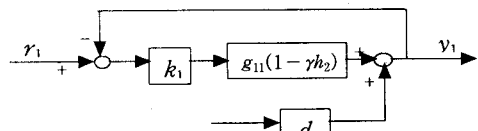
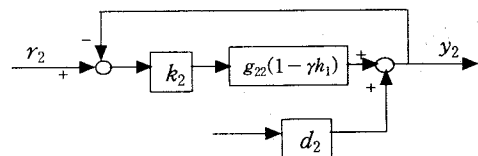


그림 1. 2x2 제어시스템



(a) Channel 1



(b) Channel 2

그림 2. 분해된 각 채널

각 채널 C_1, C_2 은 개루프 전달관계를 갖으며 $h_i(s)$ 는 다음과 같은 서브시스템의 전달함수이다.

$$h_1(s) = \frac{k_1 g_{11}}{1 + k_1 g_{11}}, \quad h_2(s) = \frac{k_2 g_{22}}{1 + k_2 g_{22}} \quad (5)$$

그림 2에서 다른 채널로부터의 영향은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$d_1(s) = \frac{g_{12}}{g_{22}} h_2 \gamma_2(s), \quad d_2(s) = \frac{g_{21}}{g_{11}} h_1 \gamma_1(s) \quad (6)$$

각 채널의 상호간섭부분인 $(1 - \gamma h_i)$ 를 살펴보면 채널 1

의 $h_2(s)$ 에는 채널 2의 제어기 k_2 가 포함되고, 마찬가지로 $h_1(s)$ 에는 채널 1의 $k_1(s)$ 가 포함되어 각 채널의 제어기는 독립적으로 설계될 수 없다. 즉, 한 채널에 대해 제어기를 설계하고자 할 때 그 채널에는 설계되지 않은 미지의 제어기를 포함하고 있다. 따라서 이를 해결하기 위한 방법은 설계대상 채널의 서브시스템을 1로 근사화 하는 것이다.

$$|h_i| = \left| \frac{k_i g_{ii}}{1 + k_i g_{ii}} \right| \approx 1, \quad i=1,2 \quad (7)$$

채널 2가 설계대상으로 결정되었다면 채널2의 서브시스템 $h_1(s) \approx 1$ 으로 $k_1 g_{11}$ 의 대역폭이 $k_2 g_{22}(1-\gamma)$ 의 대역폭에 상응하는 크기이거나 그보다 클 경우 식(7)을 만족한다. 이 조건이 만족되면 각 채널의 대역폭이 각각 크기에 있어서 차이를 보이게 되는데 이를 대역폭 분리라 하면 이 느린 채널에 대해 먼저 제어기를 설계하는 것이 설계사양을 만족시키기 쉽다. 한 채널에 대한 제어기가 설계되면 다른 쪽 채널의 서브시스템이 결정이 되므로 유연하게 제어기를 설계할 수 있으며 이때 식(7)의 조건을 만족하게 제어기를 설계한다.

2.2. 다변수 시스템의 QFT 설계절차

위 절에서와 같은 방법으로 분리된 채널은 단일 입, 출력 피드백 시스템과 같기 때문에 QFT를 적용하여 제어기를 설계할 수 있다. QFT의 설계를 위한 피드백 구조는 그림 3과 같다.

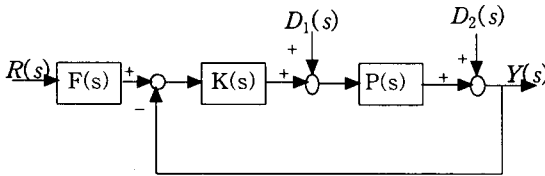


그림 3. 단위 피드백 구조

$$P(s) = \frac{b_r s^\ell + b_{r-1} s^{\ell-1} + \dots + b_0}{a_s s^k + a_{s-1} s^{k-1} + \dots + a_0} = g_{ii}(1 - \gamma h_i)$$

$$i=1,2, \quad j=2,1$$

$$\text{여기서, } a_e \in [a_e^-, a_e^+], \quad e=0,1,\dots,k$$

$$b_f \in [b_f^-, b_f^+], \quad f=0,1,\dots,\ell \quad (8)$$

그림 3의 구조에서 루프전달함수는 다음과 같다.

$$L(s) = K(s)P(s) \quad (9)$$

QFT설계법은 니콜스차트(Nichols Charts)상에서 loop shaping을 하므로 주파수 설계법에서 플랜트의 불확실성에도 불구하고 게인이득(gain margin)과 위상이득(phase margin)을 동시에 만족시킬 수 있는 강인 제어 설계기법이다. QFT의 설계 과정[6]은 다음과 같다.

step 1) $K(s)P(s) \geq 1$ 이라고 가정한 후 시스템 설계 사양에 맞는 stability bound를 구하고 이것을 만족하는 $L(s)$ 를 구한다.

$$\text{lower 이득여유} = 1+1/M$$

$$\text{lower 위상여유} = 180^\circ - \theta, \quad \theta = \cos^{-1}(0.5/M^2 - 1)$$

$$\left| \frac{L(s)}{1+L(s)} \right| \leq M, \quad \text{stability bound} \quad (10)$$

여기서, $M > 1$ 이어야 하며 니콜스차트에서 M레적으로 나타난다.

step 2) 어느 특정 주파수까지의 외란을 고려하여 사양에 적합한 바운드를 구한다.

$$T_D(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1+L(s)}$$

$$L^{-1} = K(s) \quad (11)$$

$$T_D(s) = \frac{1}{1+L} = \frac{l}{1+l}$$

$$|T_D(j\omega)| \leq \delta_D(j\omega), \quad \text{output disturbance bound}$$

여기서, $\delta_D(j\omega)$ 는 외란에 대한 출력비가 특정 주파수까지 고려한 바운드를 말한다.

step 3) loop shaping절차에 의해 선택된 주파수에 대한 바운드를 결정된 뒤 바운드 조건을 만족하도록 영점과 극점을 계속적으로 추가해가며 타협점을 찾는 절충법(Trade-offs)에 의해 제어기가 설계된다.

2.3. 전향 보상기의 설계

분해된 채널에 대해 설계된 피드백 제어기는 상호 강결합된 시스템의 경우에 취약한 성능을 나타내게 된다. 본 절에서는 이를 피하기 위해 전향 보상기의 설계 방법을 제시한다. 그림 2에서와 같은 구조에서 처럼 다른 입력으로 부터의 외란형태의 상호간섭부분을 보상하기 위해 전향 보상기를 고려 하면 다음식과 같이 유도 된다.

$$\text{채널 1: } r_2 P_{21} k_1 + r_2 d_1 = 0$$

$$\text{채널 2: } r_1 P_{12} k_2 + r_1 d_2 = 0 \quad (12)$$

따라서 C_1 과 C_2 가 안정이면 전향보상기는 다음 식으로 구해진다. 전향보상기의 전달함수가 정확히 도출되므로 전달함수의 저차화가 이루어진다면 설계하는데 어려움은 없게 된다.

$$P_{21} = -\frac{d_1}{C_1}, \quad P_{12} = \frac{d_2}{C_2} \quad (13)$$

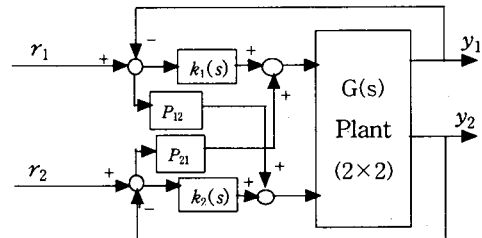


그림 4. 전향보상기를 적용한 예

설계 절차를 요약하면 다음과 같다.

- (i) ICD 방법을 이용하여 채널을 분리한다.
- (ii) 분리된 채널에 대해 각각 불확실성이 있는 플랜트에 대해 QFT를 이용하여 제어기를 설계한다.
- (iii) 전향보상기를 이용하여 외란형태의 상호간섭부분을 보상해 준다.

3. 적용 예

제안된 설계방법에 대한 적용 예로써 Automotive Gas Turbin[1]에 적용한다. 플랜트의 선형화된 전달함수식은 다음과 같다.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{(1.3 \times 10^6 s + 3.36 \times 10^8)}{(s^2 + 392s + 13900)} & \frac{-(5.6s^2 + 246s + 744)}{(s^2 + 28.9s + 24.6)} \\ \frac{(9.04 \times 10^5 s + 2.84 \times 10^8)}{(s^2 + 233s^2 + 8610s + 11900)} & \frac{(83.4s + 6300)}{(s^2 + 115s + 195)} \end{bmatrix} \quad (14)$$

ICD 채널 분리법에 의해 두 채널의 플랜트를 구하게 되면 다음과 같다.

$$G_{ch}(s) = \begin{bmatrix} 159044000s^9 + 1.564e+11s^8 + 5.736e+13s^7 + 9.960e+15s^6 + 8.912e+17s^5 + 4.237e+19s^4 + 1.032e+21s^3 + 1.090e+22s^2 + 2.477e+22s + 1.657422e+022 \\ 1300000s^{10} + 1335570000s^9 + 5.278e+11s^8 + 1.024e+14s^7 + 1.041e+16s^6 + 5.546e+17s^5 + 1.495e+19s^4 + 1.772256e+020s^3 + 5.638e+20s^2 + 6.718e+20s + 2.666e+20 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$G_{ch}(s) = \begin{bmatrix} 108420000s^{14} + 1.887e+011s^{13} + 1.744e+014s^{12} + 9.10e+016s^{11} + 2.77e+019s^{10} + 5.05e+021s^9 + 5.622e+023s^8 + 3.818e+025s^7 + 1.551e+027s^6 + 3.572e+028s^5 + 4.146e+029s^4 + 1.902e+030s^3 + 4.067e+030s^2 + 4.130e+030s + 1.623289e+030 \\ 83.4s^{15} + 156300.939s^{14} + 151878392.8s^{13} + 8.370940e+010 \end{bmatrix}$$

$$s^{12}+2.702e+013s^{11}+5.325e+015s^{10}+6.603e+017s^9+5.229e+019s^8+2.642e+021s^7+8.330e22s^6+1.552e24s^5+1.520e25s^4+6.230e+025s^3+1.1897e+026s^2+1.055e+026s+3.489915e+025$$

(16)

위 식(15)(16)에서 보는것과 같이 ICD 채널 분리법은 플랜트의 차수가 상당히 고차가 된다는 단점이 있다. 따라서 식별(Identification)을 하여 고차의 고유 특성을 잃어버리지 않게 차차의 차수로 식(15)의 플랜트를 모델링하며, ICD로 분리된 플랜트에 2%의 불확실성이 있다고 가정한다. 이를 채널 2에 대해 불확실성을 포함한 플랜트와 저차근사화된 플랜트를 보드선도로 나타내면 그림 5와 같다. 이때, 저차로 모델링된 플랜트는 원래의 플랜트의 주파수 특성을 포함하도록 고려하였다.

원래 플랜트의 불확실성을 포함하여 저차근사화된 플랜트는 식(17),(18)과 같다.

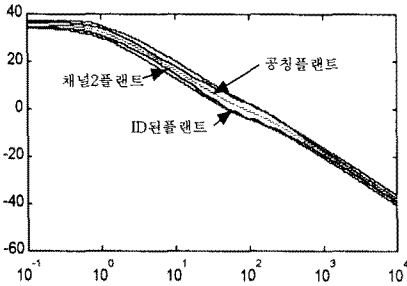


그림 5. Interval을 갖는 보드선도

$$G_{ID2}(s) = \frac{As^2 + Bs + C}{s^3 + Ds^2 + Es + F} \quad (17)$$

$$A=[96.07,156.75], B=[7730.34,10675.23], C=[12601.17,15401.43], D=[103.46,168.80], E=[318.53,439.88], F=[202.65,247.68]$$

$$G_{ID1}(s) = \frac{As^3 + Bs^2 + Cs + D}{Es^4 + Fs^3 + Gs^2 + Hs + I} \quad (18)$$

$$A=[1.1901e6,1.5146e6], B=[1.2003e8,1.4670e8], C=[2.1026e8,2.5698e8], D=[1.2599e8,1.6036e8], E=[0.76,1.24], F=[150.6002,184.0670], G=[4.6305e3,5.6595e3], H=[6.3297e3,7.7362e3], I=[2.0831e3,2.6512e3]$$

위 식(17)(18)과 같이 플랜트를 구했으므로 채널 2에 대한 제어기를 앞에서 설명한 QFT제어 설계 방식으로 제어기를 구한다. 채널분리에 의해 얻어진 각 채널에서 채널 1의 특성이 채널 2보다 빠르다는 가정하에 채널 2의 서브 시스템 h_1 을 1로 가정하고 각 채널에 대해 제어기를 설계한다. 각 채널에서 고려한 공칭플랜트는 아래와 같다.

$$G_{NCD}(s) = \frac{126.411s^2 + 9202.788s + 14001.3}{s^3 + 136.208s^2 + 379.208s + 225.171} \quad (19)$$

$$G_{ND1}(s) = \frac{1352362.8s^3 + 133363388.27s^2 + 233622365.81s + 143176055.10}{s^4 + 167.33s^3 + 5144.98s^2 + 7032.94s + 2367.16} \quad (20)$$

이때 제어기는 강인 안정도 여유가 1.2보다 적도록 고려하며 설계조건은 다음과 같다.

- 이득 여유(GM) = 10 [dB]
- 위상 여유(PM) = 45°
- 출력외란 바운드 $\leq 0.02 \frac{j\omega^3 + 64j\omega^2 + 748j\omega + 2400}{j\omega^2 + 14.4j\omega + 169}$
- r_1, r_2 가 단위스텝 입력일때 출력 y_1 과 y_2 의 응답속도는 모두 0.3초보다 작아야 하며 정상상태 오차는 6% 이내로 한다.

위에서 고려한 조건을 만족하는 loop shaping을 구하면 그

림 6과 같이 이때의 선택된 주파수들은 $\omega=(0.1, 0.5, 1, 2, 3, 5, 10, 27, 50, 100, 200, 400)$ 이다.

그림 6과 같이 루프 셰이핑 결과에 의해 얻어진 채널 2의 제어기는 식(21)과 같다.

$$C(s)_{ch2} = \frac{53963.71(s+1.167)}{s^3 + 629.35s^2 + 143944.36s} \quad (21)$$

설계 조건을 만족하는지를 확인하기 위해 그림 7의 보드선도를 통해 이득여유와 위상여유가 만족하는지를 보였다. 이때, 이득여유와 위상여유는 각각 24.24[dB]와 87.46°를 가지므로 설계 조건을 만족함을 알수 있다.

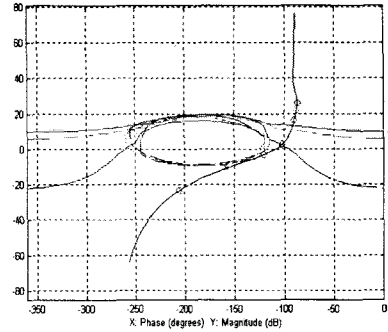


그림 6. 루프 셰이핑 결과

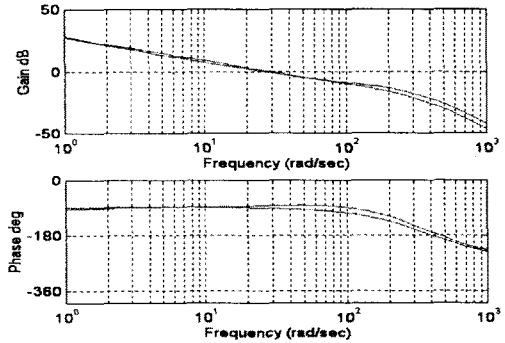
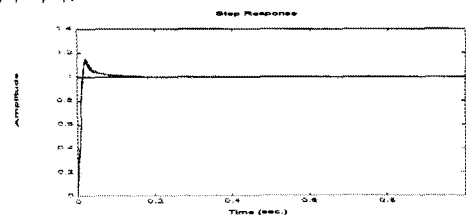


그림 7. 개루프 보드선도

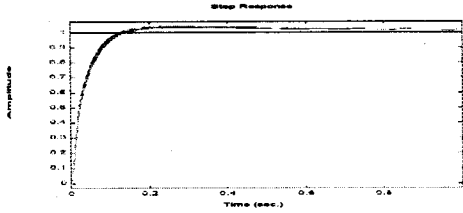
마찬가지 방법으로 채널 1의 제어기도 채널 2에서 구한 것처럼 제어기를 구한다. 이렇게 구한 채널 1의 제어기는 식(22)이다.

$$C(s)_{ch1} = \frac{1095.904541(s+56.52)}{(s^3 + 1893.6536s^2 + 3232804s)} \quad (22)$$

그림 8은 불확실성을 포함한 가스터빈 플랜트에 설계된 제어기를 적용한 시간응답특성으로 케환제어의 성능을 확인하기 위해 r_1 과 r_2 의 단위계단응답을 동시에 가한 경우이다.

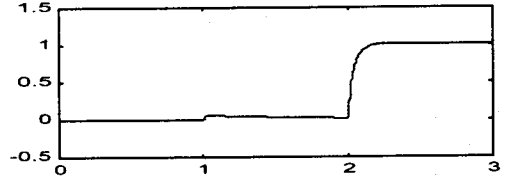


(a) y_1 의 출력



(b) y2의 출력

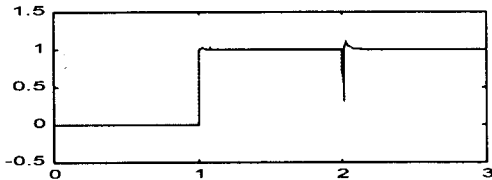
그림 8. 제어기의 스텝응답



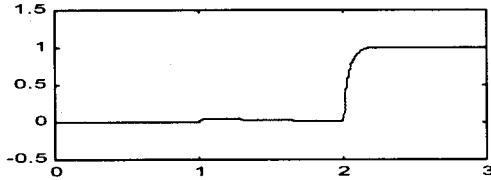
(b) 출력 y2

그림 10. 전향보상기를 적용한 경우

위 그림에서 보듯이 설계 사양인 오버슈트는 1.2를 넘지 않고, 정상상태 오차 6%안에 들어오는 것을 알 수 있다. 그림 9는 상호결합영향을 보이기 위해 r_1 이 1초에 단위계단입력이 그리고 r_2 가 2초에 단위계단입력이 가해질 경우로서 전향보상기를 사용하지 않았을 때 그림 9(a)에서 보는 바와 같이 2초에서 상호간섭영향이 나타난다.



(a) 출력 y1



(b) 출력 y2

그림 9. 전향보상기를 적용하지 않은 경우

위에서 나타나는 상호결합 영향을 상쇄시키기 위해 설계된 전향보상기는 식(23),(24)와 같다. 전향보상기를 포함한 다변수 제어 시스템의 시간응답특성은 그림 10과 같다.

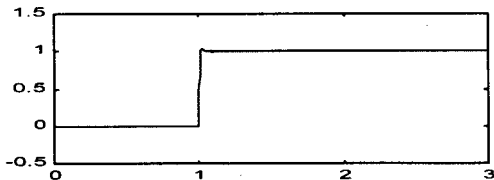
$$0.9712s^{11} + 1006s^{10} + 6.377e5s^9 + 2.252e8s^8 + 3.653e8s^7 + 2.915e12s^6 + 1.216e14s^5 + 2.612e15s^4 + 2.508e16s^3 + 6.258e16s^2 + 5.446e16s + 1.506e16$$

$$P_{12} = \frac{s^{12} + 910.5s^{11} + 3.491e5s^{10} + 8.109e7s^9 + 1.264e10s^8 + 1.27e12s^7 + 7.889e13s^6 + 2.945e15s^5 + 6.23e16s^4 + 6.457e17s^3 + 2.231e18s^2 + 3.107e18s + 1.541e+018}{-0.23246s^8 - 171.84s^7 - 43146s^6 - 4615400s^5 - 214750000s^4 - 4.035000e+9s^3 - 2.029600e+10s^2 - 3.710500e+10s - 2.249500e+10}$$

(23)

$$P_{21} = \frac{s^9 + 1220.1s^8 + 632370s^7 + 173640000s^6 + 2.600500e10s^5 + 1.9539e12s^4 + 6.146800e13s^3 + 7.228900e14s^2 + 1.657600e15s + 1.111200e+015}{-0.23246s^8 - 171.84s^7 - 43146s^6 - 4615400s^5 - 214750000s^4 - 4.035000e+9s^3 - 2.029600e+10s^2 - 3.710500e+10s - 2.249500e+10}$$

(24)



(a) 출력 y1

4. 결론

본 논문에서는 불확실성을 포함한 다변수 시스템에 대해 QFT설계기법을 이용하여 제어기를 설계하는 방법을 제시하였다. 고려한 2x2 다변수 시스템에 대해 ICD를 이용하여 채널분리하는 방법을 소개하였으며 고차로 채널 분리된 모델에 대해 모델 식별을 이용하여 저차 근사화 한 후 제어기를 설계하는 방법을 적용하였다. 또한 외란 형태의 상호간섭 제거를 위한 전향보상기를 이용한 제어기 설계절차를 제시하였다. 그 예를 채널 간 강결합 되어있는 가스터빈 모델에 적용하여 그 유용성을 보였다.

본 연구는 과학기술부 특정연구개발사업과제에 의해 지원되었습니다.(과제제목: 고정밀 산업용 강인제어설계기술개발, 과제번호:97-I-01-03-A-101)

(참 고 문 헌)

- [1] Leithead, W.E. and O'Reilly, J., 1991, Multivariable control by 'Individual Channel Design', International Journal of Control, 54, 1-46.
- [2] Leithead, W.E. and O'Reilly, J., 1992, Performance issues in the individual channel design of 2-input 2-output systems, Part 1:Structural Issues. International Journal of Control, 54, 47-82.
- [3] Leithead, W.E. and O'Reilly, J., 1992, Performance issues in the individual channel design of 2-input 2-output systems, Part 1:Structural Issues. International Journal of Control, 55, 265-312.
- [4] ISSAC M. Horowitz, Quantitative Feedback Design Theory, vol. 1, QFT Publication, 1992.
- [5] ISSAC M. Horowitz, Synthesis of Feedback System, Academic Press, 1964.
- [6] Craig Borghesani, Yossi Chait, Oded Yaniv Quantitative Feedback Theory Toolbox, The MATH WORKS, 1994.