

변유한요소법을 이용한 결합구조를 갖는 도파관 구조의 해석

김 영 태, 권 진 호, 안 달, 박 준 석, 김 형 석  
 순천향대학교 전기전자공학부

Analysis of a coupled waveguide structure using the edge element method

° Young-Tae Kim, Jin-Ho Kwon, Dal Ahn, Jun-Seok Park, Hyeong-Seok Kim  
 School of Electrical & Electirc Eng. Soonchunhyang University

**Abstract** - An edge finite element method is applied to calculate the field distribution of a coupled waveguide structure. We compares a node based finite element method with the edge element one. For 2-d eigenvalue problems of waveguide structures, the former generates spurious eigenmodes, but the latter dose not. Using an simple rectangular waveguide, we implement both methods to obtain some results of field computation in waveguide. The paper shows that the finite element method using edge elements succeeds in suppressing spurious solutions.

1. 서 론

본 논문에서는 초고주파대역(microwave frequency band)의 유용한 전송선로 소자인 구형 도파관(rectangular waveguide) 구조를 해석하기 위하여 변요소법(finite edge element method)을 적용하였다. 기존에는 구형도파관의 해석에서 도파관내의 모드함수를 파동방정식으로부터 유도하여 불연속면이 발생하는 지점에서 이러한 모드들을 정합시켜서 산란행렬이나 등가회로 파라미터를 추출하는 모드정합법[1]이 널리 사용되었다. 그러나 이러한 모드정합법은 불연속면이 x축과 y축에 대하여 일정한 경우, 그 기저함수가 해석적으로 주어지는 경우에만 효과적으로 사용될 수 있고, 불연속면 x축과 y축에 동시에 존재하는 경우 그 응용이 매우 복잡해지는 단점이 있다. 해석하려고 하는 도파관의 구조가 불연속구조로 x축과 y축에 동시에 나타나는 경우 모드정합법이 그 한계를 갖게 된다. 따라서 마이크로파대 및 밀리미터파대의 주파수 대역에서 사용하기 위한 결합선로, 여파기등의 통신소자를 설계하기 위해서 도파관구조의 설계파라미터, 즉 even, odd 임피던스값을 구하기 위한 변요소법을 사용하였다. 기존의 분할된 요소의 절점에 변수를 인가하는 유한요소법은 도파관을 해석할 때 유한요소법을 정식화하는 과정에서 맥스웰방정식 중 발산방정식을 지배방정식에 포함시키지 않기 때문에, 실제의 전기적 특성에서는 존재하지 않는 가상해(spurious solution)가 발생하게 된다. 이러한 가상해를 제거하기 위해서 변요소법을 활용하면 가상해가 존재하지 않고, 또한 경계조건을 쉽게 부과할 수 있는 장점들이 있기 때문에 복잡한 형상을 갖는 도파관 문제의 해석을 용이하게 할 수 있게 된다. 따라서 실제 도파관을 이용한 다양한 통신부품들의 전기적 특성의 해석 및 설계시 많은 장점을 갖는다. 본 논문에서는 구형 도파관을 위에서 언급한 두 알고리즘을 비교하였고, 결합구조(coupled line structure)를 갖는 구형 도파관내에서 가상해가 발생하는 문제점을 해결하였다.

2. 유한요소 정식화

시간적인 변화를 갖는 계에 대한 맥스웰방정식 2개를 표현하면

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2.2)$$

와 같이 표현되며 복소페이저형식으로 다시 표현하면

$$\nabla \times E = -j\omega\mu_0\mu_r H \quad (2.3)$$

가 되며 자유공간내에서의 전자파동을 고찰하므로 전하 밀도  $\rho_v = 0$ , 전류밀도  $J = 0$ 인 경우의 맥스웰 방정식을 생각하므로 식 2.2을 대입하여 정리하면

$$\nabla \times H = j\omega\epsilon_0\epsilon_r E \quad (2.4)$$

라고 표현할 수 있다.

자계 E에 대한 벡터 헬름홀츠 방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times E \right) - k_0^2 \epsilon_r E = 0 \quad (2.5)$$

자계 H에 대한 벡터 헬름홀츠 방정식도 위와 동일한 방법으로 유도할 수 있다.

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times H \right) - k_0^2 \mu_r H = 0 \quad (2.6)$$

3. 절점 유한요소법

구형 도파관을 자계에 대해서 해석하기 위해서는 자계 H에 대한 벡터 헬름홀츠 방정식인 식 2.6을 이용한다.

식 2.6식에서  $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ [2]이며  $k_0^2$ 을 자유공간의 파동넘버라 부른다. 최소치 정리[3]에 의하여 최소화되는 에너지 관련 범함수는 다음과 같다.

$$F = \langle \nabla \times (\epsilon_r^{-1} \nabla \times H), H \rangle - k_0^2 \langle H, H \rangle \quad (2.7)$$

자장의 세기 H는 시간에 따라 정현적으로 변하므로 크기와 상 둘다 가지므로 다음의 내적을 사용하여야 한다.

$$\langle u, v \rangle = \iiint_V (v^* \cdot u) dV \quad (2.8)$$

여기서 \*는 공액 복소수를  $\tau$ 는 체적을 나타낸다.

내적의 정의를 사용하여 범함수 F를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$F = \iiint_V \{ \mathbf{H}^* \cdot \nabla \times (\epsilon_r^{-1} \nabla \times H) \} dV - k_0^2 \iiint_V (\mathbf{H}^* \cdot H) dV \quad (2.9)$$

벡터등식과 발산정리를 이용하고 그린의 등식(Green's first identity)을 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$F = \iiint_V \{ (\nabla \times \mathbf{H})^* \cdot \epsilon_r^{-1} \nabla \times H \} - k_0^2 \mathbf{H}^* \cdot H \} dV - \iint_S \{ \mathbf{H}^* \times (\epsilon_r^{-1} \nabla \times H) \} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.10)$$

여기서  $\Gamma$ 는 경계를 나타낸다.  
완전전기도체에서 범함수는 다음과 같이 표현된다.

$$F = \iint_{\Gamma} [(\nabla \times \mathbf{H})^* \cdot \epsilon_r^{-1} \nabla \times \mathbf{H} - k_0^2 \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}] dV \quad (2.11)$$

2차형상함수를 이용하고 도파관내의 자장벡터를  $z$ 방향으로 진행한다고 가정하면 자장  $\hat{H}$ 를 정의하면 다음과 같다.

$$\hat{H} = [M]^T \{H\} \exp(-j\beta z) \quad (2.12)$$

여기서  $\beta$ 는 위상 정수를 나타낸다.  
전 영역  $\Omega$ 에 대한 범함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{F} = \sum_e \hat{F}_e = \{H\}^T ([S] - k_0^2 [T]) \{H\} \quad (2.13)$$

$\{H\}$ 는 자장벡터를 나타내며  $[S], [T]$ 는 실수대칭 행렬이다. 식 2.13을 최소화하기 위해 즉, 극점을 구하기 위해서  $\delta F=0$ 을 만족하게 되면 다음과 같다.

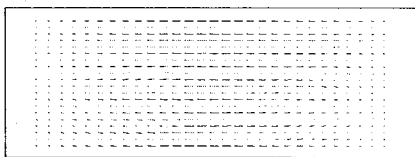
$$[S] \{H\} = k_0^2 [T] \{H\} \quad (2.14)$$

여기서  $\beta$ 값을 정하여 줌으로써 고유치가  $k_0^2$ 이고 고유벡터가  $\{H\}$ 인 고유치문제가 된다. 특히  $\beta=0$ 일 때 구해진 고유치  $k_0^2$ 은 차단파동넘버의 제곱을 나타낸다. 행렬고유치를 푸는 방법으로 자코비 방법(4)을 사용한다. 2차형상함수를 이용하여 요소수를 6개로 하여 구형 도파관의 단면을 해석하였다. 행렬의 고유치문제를 풀어 고유값 즉 파수를 구하였다. 그 값은 표 1에 나타내었다.

표 1. 기본 모드에서의 파수치의 해석값과 계산값

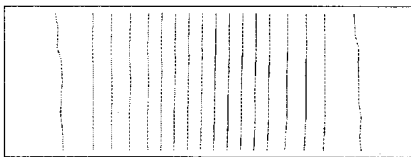
$\beta$	$k_0^2$	
	계산값	해석값(F.E.M)
5	2.7697E+03	2.7666E+03
10	2.8447E+03	2.8416E+03
20	3.1446E+03	3.1416E+03
50	5.2440E+03	5.2415E+03

요소가 6개로 분할하여 위상정수( $\beta$ )가 5일 때 실제 모드들을 구하였다. 자장(H-field)의  $x$ 방향 성분과  $y$ 방향 성분의 벡터합을 화살표(arrow)로 크기와 방향을 나타내었으며  $z$ 방향 성분은 크기가 같은 점을 이어서 선으로 표현하였다.



eigenvalue = 2769.7 (rad/m)<sup>2</sup>

그림 1. TE<sub>10</sub> 모드 H<sub>x</sub>H<sub>y</sub>성분



eigenvalue = 2769.7 (rad/m)<sup>2</sup>

그림 2. TE<sub>10</sub> 모드 H<sub>z</sub>성분

식 2.11에  $\mathbf{H}^*$ 을 곱하여 벡터등식과 완전 전기도체의 경계조건을 사용하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\iint_{\Omega} [(\nabla \times \mathbf{H})^* \cdot (\epsilon_r^{-1} \nabla \times \mathbf{H}) - k_0^2 \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}] d\Omega = 0$$

위의 식에서 가상해(5)는 다음과 같이 나타난다.

$$\textcircled{1} k_0^2 = 0 \text{ 일 때 } \nabla \times \mathbf{H} = 0, \nabla \cdot \mathbf{H} \neq 0$$

$$\textcircled{2} k_0^2 > 0 \text{ 일 때 } \nabla \times \mathbf{H} \neq 0, \nabla \cdot \mathbf{H} \neq 0$$

가상해의 두 범주는  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ 와 같으며  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$

즉,  $\nabla \cdot (\mu_0 \cdot \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 인 조건을 만족하지 않아 가상해가 발생하게 된다.

#### 4. 변유한요소법

기존의 분할된 요소의 질점에 변수를 인가하는 유한요소법은 이러한 RF대역의 이동통신 시스템 및 초고주파대역의 다양한 소자의 특성을 해석할 때 유한요소법을 정식화하는 과정에서 맥스웰방정식중 발산방정식을 지배방정식에 포함시키지 않기 때문에, 도파관을 해석시 전기적 특성에서는 존재하지 않는 가상해(spurious solution)가 발생하게 된다.

변요소법을 이용해서 전장벡터를 해석하기 위해서 식 2.6을 횡(transverse) 성분과 종(longitudinal) 성분으로 나누어서 표현하면

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \mathbf{E}_t \right) - \frac{1}{\mu_r} (j\beta \nabla_t \cdot \mathbf{E}_t - \beta^2 \mathbf{E}_t) \\ = k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E}_t \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$- \frac{1}{\mu_r} [ \nabla_t \cdot ( \nabla_t \cdot \mathbf{E}_t + j\beta \mathbf{E}_t ) ]$$

$$= k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E}_t \quad (2.16)$$

여기서  $\mathbf{E}_t$ 는  $\mathbf{E}$  field의 횡파 즉  $x, y$ 성분을 나타내며  $\beta$ 와  $k_0^2$ 을 분리하고 복소수값(complex value)가 아닌 실수값을 얻기 위해서  $\vec{e}_1 = \beta \mathbf{E}_t, e_z = -j \mathbf{E}_z$ (6)로 놓고 갤러킨 방법(Galerkin method)을 적용하기 위해서 벡터형상함수(vector weighting function)  $N_i$ 을 곱하고 스칼라형상함수(scalar weighting function)  $L_j$ 을 곱하여 도파관의 cross section( $\Gamma$ )에 대해서 적분을 취하면

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma} [ N_i \cdot \nabla_t \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \vec{e}_1 \right) \\ + \frac{\beta^2}{\mu_r} ( N_i \cdot \nabla_t \cdot e_z + N_i \cdot \vec{e}_1 ) ] ds \\ = k_0^2 \epsilon_r \iint_{\Gamma} N_i \cdot \vec{e}_1 ds \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} - \frac{1}{\mu_r} \iint_{\Gamma} L_j [ \nabla_t \cdot ( \nabla_t \cdot e_z + \vec{e}_1 ) ] \\ = k_0^2 \epsilon_r \iint_{\Gamma} L_j e_z ds \end{aligned} \quad (2.18)$$

과 같이 된다.

벡터등식과 발산정리를 이용하여 weak form 형태로 표현하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_r} \iint_{\Gamma} [ ( \nabla_t \times N_i ) \cdot ( \nabla_t \times \vec{e}_1 ) ] ds \\ = k_0^2 \epsilon_r \iint_{\Gamma} N_i \cdot \vec{e}_1 ds \end{aligned} \quad (2.19)$$

최종적으로 Matrix 형태로 조합하면

$$[S_e(tt)] [e_t] = k_0^2 [T_e(tt)] [e_t] \quad (2.20)$$

$Ax = \lambda Bx$  형태의 eigen problem 형태 (7) Matrix 형태가 된다. 식 2.20의 행렬을 구체적으로 살펴보면

$$S_e(tt) = \frac{1}{\mu_r} \iint_{\Delta} (\nabla_t \times N_m) \cdot (\nabla_t \times N_n) e_{tm} ds \quad (2.21)$$

$$T_e(tt) = \epsilon_r \iint_{\Delta} (N_m \cdot N_n) ds \quad (2.22)$$

도파관 WR-28 ( 7.11 mm × 3.56 mm )을 크기를  $a = 7.11 \text{ mm}$  와  $b = 3.56 \text{ mm}$ 로 하고 요소수를 416개 노드(node)을 238개 그리고 변(edge)을 653개 로하여 해석하였다.

표 2 도파관(WR-28)의 모드 해석

모드(Mode)	계산값	해석값(F.E.M)
TE10	1.9523628E+05	1.9472109E+05
TE01	7.7875303E+05	7.7478913E+05
TE20	7.8094515E+05	7.8018888E+05
TE11	9.7398931E+05	9.7214500E+05

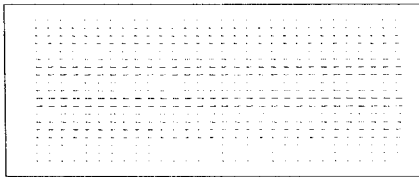


그림 3 TE<sub>10</sub> 모드의 E<sub>t</sub>(E<sub>x</sub>, E<sub>y</sub>) 성분

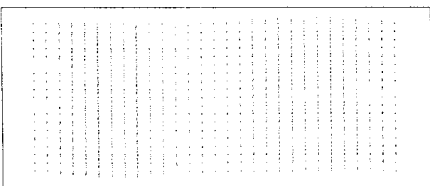


그림 4 TE<sub>01</sub> 모드의 E<sub>t</sub>(E<sub>x</sub>, E<sub>y</sub>) 성분

본 해석에서는 가상해가 존재하지 않기 때문에 실제 정형화된 도파관이 아닌 불연속면을 가지는 도파관에서도 필요한 모드에서의 파수를 구할 수 있음을 확인할 수 있었다. 그림 5는 불연속면을 가지는 도파관 형상이다.

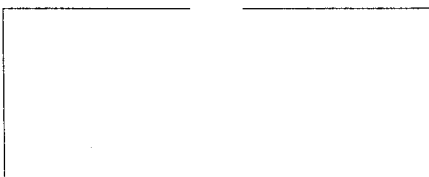


그림 5 불연속인면을 포함한 도파관

불연속면을 가지는 도파관 형상에서도 가상해가 존재하지 않기 때문에 파수가 가장 낮은 TE<sub>10</sub> 모드를 추출할 수 있다.

그림 6에서는 TE<sub>10</sub> 모드의 E필드의 필드패턴을 표현한 것이다.

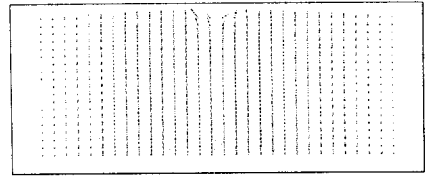


그림 6 불연속 도파관 해석

## 5. 결 론

본 논문에서는 구형도파관의 고유치와 고유벡터를 구하기 위해 절점유한요소법과 변 유한요소법을 비교해 보았다. 본 연구에서 구현된 두가지 방법을 해석해가 존재하는 구형도파관에 적용하여 유한요소 계산 결과를 구하였다. 전자의 경우에는 실제 존재하지 않는 가상모드가 발생하였으나, 후자의 경우는 상대적으로 "0"에 가까운 수치오차에 의해 생긴 가상모드외에는 가상해가 발생하지 않았다. 최종적으로, 전자장분야에서의 가상해를 발생시키지 않는 변요소법을 이용하여 결합선로 구조를 갖는 도파관 구조의 전자계 분포를 계산했다.

RF대역의 이동통신 시스템 및 초고주파대역의 다양한 소자를 해석하는데 있어서는 모드정합법이 가장 널리 사용되었지만 해석소자에서 불연속면이 이차원 종속적으로 주어지는 경우에는 효과적으로 해석하기가 힘들었던 점을 본 연구에서 구현된 프로그램을 사용하여 보완해 줄 것으로 기대된다.

본 논문에서 개발된 프로그램은 마이크로파 및 밀리미터파대역에 유용한 전송선로인 다양한 도파관 구조의 해석 및 이를 이용한 통신소자, 즉 대역통과여파기(Bandpass filter), 방향성 결합(directional coupler), Magic Tee 와 같은 소자의 설계에 필요한 설계 변수 혹은 파라미터들을 추출하는데 직접적으로 응용이 가능할 것으로 판단된다.

## [참 고 문 헌]

- [1] 박기수, 박한규, "초고주파공학", 청문각 1985
- [2] David M. Pozar, "Microwave Engineering", Addison Wesley, 1993
- [3] I. Stakgold, "Green's Functions and Boundary Value Problem", Wiley-Interscience, 1979
- [4] Jianming Jin, "The Finite Element Method in Electromagnetics", John Wiley & Sons, 1993
- [5] Koshiba, Hayata, Suzuki, "Finite-Element Formulation in Terms of the Electric-Field Vector for Electromagnetic Waveguide Problems", IEEE Trans. on Magnetics, vol. 33, pp 900-905, Oct, 1985
- [6] Z.J.Cendes, "Vector finite elements for electromagnetic field computation", IEEE Trans on Magnetics., vol. 27, No.5, pp.3958-3966, Septemb 1991
- [7] A.Bossavit and I. Mayergoz, "Edge-Elements For Scattering Problem", IEEE Trans. on Magnetics, vol.25, pp. 2816-2821, Jul. 1989.