

2개의 원형개구부가 있는 복합재료 적층판의 응력해석

(Stress Analysis of Composite Laminated Plates with 2 Collinear Circular Cutouts)

이윤복(충남대 대학원), 이영신(충남대 공대)

Youn-Bok Lee(Graduate School, Chungnam National Univ.) and Young-Shin
Lee(Chungnam National Univ.)

ABSTRACT

This paper presents the theoretical analysis method to determine the stress concentrations around the circular cutouts with various geometrical parameters. The purposes of this study are to investigate on the stress distribution around the circular cutouts due to interaction between two circular cutouts and to develop the design method in composite plates. The composite laminated plate with 2 equal collinear circular cutouts under inplane loads is treated as an quasi-isotropic, symmetric, finite, square, multiply connected and thin plate. The effects of cutout sizes, distances between two circular cutouts and inplane load conditions on stress distribution are studied in detail.

1. 서 론

복합재료 적층판은 항공 및 수송산업에서 폭넓게 사용되어 왔다. 개구부는 대형 복합구조물에 기본적으로 설계되며 이는 기하학적 불연속으로부터 나타나는 응력집중의 중대한 문제를 야기한다. 따라서 개구부를 포함하는 복합재료 적층판의 응력분포 및 응력집중계수는 개구부에 대한 해석적 방법, 유한판의 내외부 경계조건에 대한 수치적 접근방법 및 두 방법의 선형결합으로 체계적 연구가 필요하다.

1988년 Lin과 Ko[1]는 1개의 원형개구부가 있는 유한 이방성판에 대한 강도예측 및 응력집중계수를 Laurent급수가 전개된 Airy의 응력함수와 최소제곱경계 collocation방법으로 해석하였다. 1988년

Fan[2]등은 여러개의 원형구멍이 있는 무한 이방성판의 응력집중을 Faber급수 및 복소Potential방법으로 해석하였다. 1993년 Madenci[3] 등은 여러 개의 원형 개구부가 있고 기하학적 대칭조건하에서 유한 복합재료 적층판의 응력장을 결정하기 위하여 수정매핑 collocation방법을 적용하였다. 1995년 Xu[4] 등은 1개의 타원형 개구부가 있는 유한 준동방성판의 응력해석을 Faber급수 및 등각사상이 포함된 복소Potential방법 그리고 경계조건에 대한 최소제곱 경계 collocation방법으로 수행하였다.

1999년 Hafiani[5]등은 이방성재료에서 응력집중계수를 연구하기 위하여 새로운 수치적 접근방법인 단함수방법(Edge Function Method)을 적용하였다. 경계조건은 경계 Galerkin 에너지법을 사용

하였으며 이것은 가상일의 원리 및 변형률에너지 오차의 최소화개념이다.

본 논문은 동축상에 있는 같은 크기의 2개 원형 개구부가 있는 유한 정사각형의 얇은 준동방성판에 내평면하중이 작용할 때 개구부의 직경에 대한 개구부 주위의 응력변화, 개구부 중심간 거리에 따른 개구부 주위의 응력변화를 제시한다.

2. 이론해석

2개의 원형 개구부에 대한 이론해석을 위하여 먼저 일반성있는 타원형 개구부의 무한 판을 고려 한다. 타원형 경계에 대한 식은 다음과 같다.

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$$

$z = x + iy = a\cos\theta + ib\sin\theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \quad (1)$

판재료의 복소매개변수는 고전적충판 이론의 구성 방정식으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S_j = \alpha_j + i\beta_j, \quad (j=1, 2)$$

여기서 $\beta_j > 0$ 이고 α_j 는 실수이다.

affine 변환으로부터

$$z_j = x + S_j y \quad (j=1, 2) \quad (2)$$

복소 z 평면의 타원형 경계 위의 점은 z_j 평면의 타원형 경계로 변환된다. 2개의 복소Potential 함수 $\varphi(z_1)$ 과 $\psi(z_2)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varphi(z_1) &= (B_1 + iC_1)z_1 + \varphi_0(z_1) \\ \psi(z_2) &= (B_2 + iC_2)z_2 + \psi_0(z_2) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 B_1, C_1, B_2 및 C_2 는 실수의 상수이고 $\varphi_0(z_1)$ 과 $\psi_0(z_2)$ 는 복소 z_1, z_2 평면의 오른쪽 및 왼쪽 타원형 바깥쪽 무한영역에서 정칙함수이다.

그러므로 $\varphi_0(z_1)$ 및 $\psi_0(z_2)$ 는 복소 w_1, w_2 평면의 무한점을 포함하는 개구부 바깥쪽의 무한 영역에서 정칙함수이다.

두 개의 같은 타원형 구멍에 대하여 복소 Potential 함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varphi(z_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n} [w_1(z_1 - l)]^{-n} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1,n} [w_2(z_1 + l)]^{-n} + (B_1 + iC_1)z_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(z_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1,n} [w_2(z_2 - l)]^{-n} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n} [w_2(z_2 + l)]^{-n} + (B_2 + iC_2)z_2 \end{aligned} \quad (4)$$

이 두 식의 첫 번째 항은 복소 z_1 평면의 오른쪽 및 왼쪽의 단일구멍이 있는 무한점을 포함하는 무한영역에서 정칙함수이다. 첫 번째 및 두 번째항의 합은 두 영역이 교차하는 영역에서 정칙함수이다.

직충판은 좌표축에 대하여 기하학적 및 탄성텐서에서 대칭성이 있으면 무한급수의 계수사이에 다음 관계가 존재한다.

$$\begin{aligned} \varphi'_{1,n} &= (-1)^{n+1} \varphi_{1,n}, \quad \varphi'_{2,n} = (-1)^{n+1} \varphi_{2,n} \\ \psi'_{1,n} &= (-1)^{n+1} \psi_{1,n}, \quad \psi'_{2,n} = (-1)^{n+1} \psi_{2,n} \end{aligned} \quad (5)$$

개구부 주위에서의 경계조건은 다음과 같다[6].

$$\begin{aligned} \varphi(z_1) + \overline{\varphi(z_1)} + \psi(z_2) + \overline{\psi(z_2)} &= f_1 \\ S_1\varphi(z_1) + \overline{S_1\varphi(z_1)} + S_2\psi(z_2) + \overline{S_2\psi(z_2)} &= f_2 \end{aligned} \quad (6)$$

응력집중 문제에서 모든 개구부 경계는 traction이 0이고, f_1 과 f_2 는 임의의 실수이다.

2개의 같은 타원형 구멍이 있는 경우

$$[w_1(z_1 + l)]^{-n} = [w_1(z_1^* + 2l)]^{-n}$$

는 복소 z_1 평면의 왼쪽 개구부에 의해 약해진 무한영역에서 정칙함수이다.

그러므로 그들은 오른쪽 타원형의 내부에서 정칙이고 경계에서 연속이고 Faber급수전개가 가능하다. 여기서 타원형에 대한 n차 Faber 다항식은 $P_n(z) = w^n + t^n w^{-n}$ 이다.

$$\begin{aligned} [w_1(z_1 + l)]^{-n} &= [w_1(z_1^* + 2l)]^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{n,k} P_k(z_1^*) \\ &= A_{n,0} + \sum_{k=0}^{\infty} A_{n,k} \{ [w_1(z_1^*)]^k + t_1^k [w_1(z_1^*)]^{-k} \} \\ [w_2(z_2 + l)]^{-n} &= \\ B_{n,0} + \sum_{k=0}^{\infty} B_{n,k} \{ [w_2(z_2^*)]^k + t_2^k [w_2(z_2^*)]^{-k} \} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서

$$t_j = (a - b\beta_j)/(a + b\beta_j)$$

오른쪽 타원형 개구부 경계에서

$$w_1(z_1^*) = w_2(z_2^*) = \sigma = e^{i\theta} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

이고 $\phi(z_1)$ 과 $\phi(z_2)$ 의 경계치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\phi(z_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1,n} [\sigma^{-n} + (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} A_{n,k} (\sigma^k + t_1^k \sigma^{-k})] \\ &\quad + \frac{1}{2} (B_1 + iC_1)(a + \beta_1 b)(\sigma + t_1 \sigma^{-1}) \\ \phi(z_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1,n} [\sigma^{-n} + (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} B_{n,k} (\sigma^k + t_2^k \sigma^{-k})] \\ &\quad + \frac{1}{2} (B_2 + iC_2)(a + \beta_2 b)(\sigma + t_2 \sigma^{-1})\end{aligned}\quad (8)$$

Faber급수의 계수인 $A_{n,k}$ 및 $B_{n,k}$ 는 Fourier전개 방법[7]에 의해 결정된다.

식 (8)을 경계조건 식(6)에 대입하고 동차항의 σ^k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm N$)의 계수에 대한 $(2N+1)$ 개의 선형방정식을 얻는다. 내부 경계로부터 얻어진 방정식의 개수가 모든 계수를 결정하기에 부족함으로 외부 경계조건의 사용이 필요하다. 따라서 최소제곱경계 collocation 방법의 적용으로 외부경계에 따라 collocation점 Z_{ok} ($k = 1, 2, \dots, M$)를 취하고 경계조건(6)에 대입하면 외부경계조건을 만족하는 $\varphi_{1,n}$ 및 $\psi_{1,n}$ 에 대한 선형방정식을 얻는다. 이는 내부경계조건을 만족하는 $(2N+1)$ 개의 방정식과 함께 복수 Potential 함수를 결정한다.

3. 유한요소해석

유한요소해석은 Swanson Analysis System사의 ANSYS 소프트웨어를 사용하였다. 해석모델의 형상 및 크기는 Fig. 1과 같고 원형개구부 직경변화에 따른 x축, y축에 대하여 하중 30N을 작용했을 때 일축응력 및 2축응력 상태에서 원형개구부 주위의 응력변화를 해석하였다.

해석에 사용된 유한요소는 적층구조해석에 적용 가능한 shell 99이고 하중 및 기하학적 대칭성을 고려하여 1/4모델로 하였다. 해석모델에 적용된 재료는 S2유리섬유강화 복합재료이며, Table 1에 재료특성이 나타나 있다. 적층순서는 $[0/\pm 45/90]_s$ 의 8적층으로 준동방성이다.

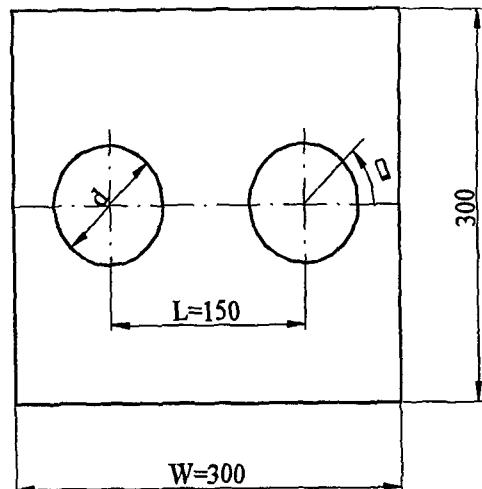


Fig. 1 Configuration for the composite plate with 2 cutouts(unit : mm)

Table 1 Material properties of S2 glass/epoxy

Property	Value
Longitudinal modulus(E_1)	43.5 GPa
Transverse modulus(E_2)	11.5 GPa
Shear modulus(G_{12})	3.45 GPa
Poisson's ratio(ν_{12})	0.27

4. 유한요소해석 결과

유한판에서의 원형개구부 크기변화에 따라서 내평면 인장하중하의 개구부 주위에서 응력변화를 구하였다. 작용하중은 x방향의 1축인장, y방향의 1축인장 및 x,y방향의 2축인장형태로 하였으며 그 결과는 Fig. 2, 3, 4에 제시된다. 여기서 $L/d=W/2d=6, 3, 1.5$ 의 3가지 경우를 고려하였으며 2개의 인접한 개구부중심간거리에 대한 영향을 보기 위함이다. 또한 W/d 는 응력집중에 큰 영향을 지니고 있으며, 이 값이 작을수록 하중형태별 응력분포는 더 크다.

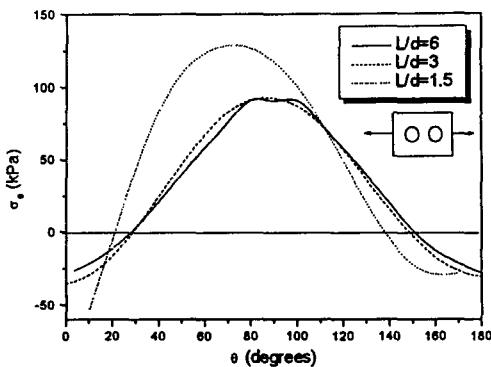


Fig. 2 Stress distribution around circular cutout under x-directional tension loading (30N)

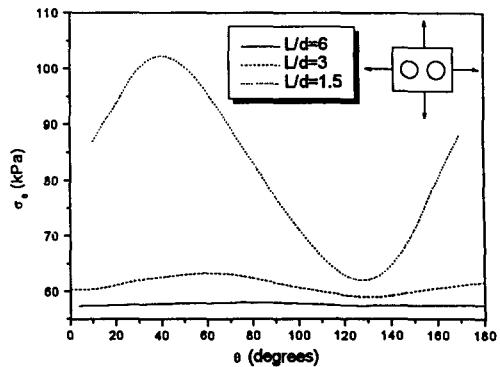


Fig. 4 Stress distribution around circular cutout under biaxial tension loading (30N)

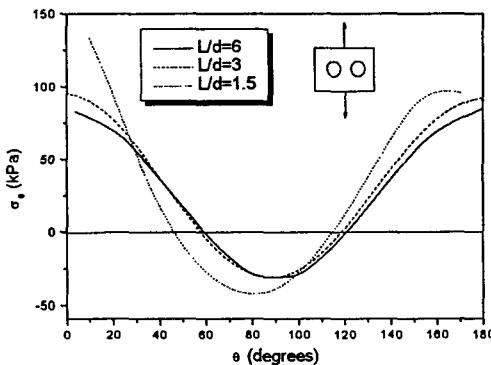


Fig. 3 Stress distribution around circular cutout under y-directional tension loading (30N)

5. 결론

동축상에 있는 같은 크기의 2개 원형개구부가 있는 유한 정사각형 준등방성판에 내평면하중을 받을 때 원형개구부 주위의 응력변화를 해석하였다. 본 논문의 결론은 다음과 같다.

- (1) 적층판 크기에 대한 원형개구부 직경의 비가 작으면 응력분포가 크다.
- (2) 개구부 중심간 거리에 대한 원형개구부 직경의 비가 작으면 응력분포가 크다.
- (3) 원형개구부 중심간거리가 상대적으로 커지면 유한판해석이 무한판해석으로 다루어 질 수 있다.

참 고 문 헌

1. C. C. Lin and C. C. Ko, 1988, "Stress and Strength Analysis of Finite Composite Laminates with Elliptical Holes," Journal of Composite Materials, Vol. 22, No. 4, pp. 373-385.
2. W. X. Fan and J. G. Wu, 1988, "Stress Concentration of a Laminate Weakened by Multiple Holes," Composite Structures, Vol. 10, No. 4, pp. 303-319.
3. E. Madenci, L. Ileri and J. N. Kudva, 1993, "Analysis of Finite Composite Laminates with Holes," International Journal of Solids and Structures, Vol. 30, No. 6, pp. 825-834.
4. X. W. Xu, L. X. Sun and X. Q. Fan, 1995, "Stress Concentration of Finite Composite Laminates with Elliptical Hole," Computers and Structures, Vol. 57, No. 1, pp. 29-34.
5. F. Hafiani and J. F. Dwyer, 1999, "Edge Function Analysis of Anisotropic Materials with Holes and Cracks," Computers and Structures, Vol. 72, No. 6, pp. 779-791.
6. G.N. Savin, 1968, "Stress Distribution Around Holes," National Aeronautics and Space Administration, NASA TT F-607.
7. A.S. Kosmodaminskii and V.I. Chernik, 1981, "Stress State of a Plate Weakened by Two Elliptical Holes with Parallel Axes," Soviet Applied Mechanics, Vol. 17, pp. 576-581.