

# 굽힘 하중 하에서 굴곡진 보강섬유를 가진 두꺼운 복합재료 보의 응력 분포 해석

이승우\*, 전홍재\*\*

## Stress and Strain Analyses of Thick Composites with Fiber Waviness under Flexural Loading

S. W. Lee, H. -J. Chun

**Key Words:** fiber waviness, nonlinear flexural behavior, thick composites, stress and strain distributions

### Abstract

A FEA(finite element analysis model) was proposed to study stress and strain distributions in thick composites with fiber waviness and initial curvature under flexural loading. Three types of model with initial curvature were considered in this study: flat, convex and concave models. In the analysis, both material and geometrical nonlinearities were incorporated. Four point flexural tests were conducted on the flat specimens to obtain the flexural behavior of thick composites experimentally. It was concluded that the predictions from the models were in good agreement with the experimental results. It was shown that the stress and strain distributions as well as nonlinear flexural behaviors of thick composites were significantly affected by the fiber waviness and initial curvature.

### 1. 서 론

항공기나 고속철도차량과 같은 원통형 구조물에 사용되는 두꺼운 복합재료는 제조 과정에서 적층판 내의 보강섬유가 굴곡을 이루는 초기 결함이 생성된다. 이처럼 굴곡진 보강섬유가 내재된 두꺼운 복합재료는 복합재료 자체의 비선형 특성 뿐만 아니라 부하시 발생하는 변형에서 기인하는 보강섬유의 방향 변화와, 원통형 구조물의 곡률반경이 변화하는 기하학적인 비선형 특성 때문에 굽힘시 비선형 거동을 보인다. 굴곡진 보강섬유를 가진 두꺼운 복합재료의 굽힘 특성이나 거동에 대한 연구는 여러 연구가들에 의해 이루어졌지만, 실제로 곡선보 형태 내에 보강섬유의 굴곡이 존재하는 경우에 대한 것은 전무한 실

정이다.

본 연구에서는 보강섬유의 굴곡이 있는 두꺼운 복합재료의 곡선보의 응력 분포를 예측하기 위하여 복합재료의 재료적, 기하학적 특성을 모두 고려할 수 있는 모델을 제시하고 굽힘 하중의 방향에 따라 굴곡진 보강섬유로 이루어진 두꺼운 복합재료 곡선보의 형상에서 응력분포와 직선보의 유효응력분포를 예측하였다. 또한 굴곡이 일정한 두꺼운 복합재료 직선보 시편을 제작하여 4 점 굽힘 시험을 실시하여 직선보의 굽힘 거동을 해석 결과와 비교하였다.

### 2. 해석모델

#### 2.1 보강섬유의 굴곡이 일정한 두꺼운 복합재료 직선보

Fig. 1은 일정한 굴곡을 가진 보강섬유로 이루

\* 연세대학교 대학원 기계공학과

\*\* 연세대학교 기계·전자공학부

어진 두꺼운 복합재료 직선보의 보강섬유 한 주기 부분을 나타낸다. 보강섬유 주기의 방향( $x$ -axis)과 두께 방향( $z$ -axis)으로 미소요소를 설정 해서 각 미소요소의 해석을 통하여 전체의 거동을 예측하게 된다.

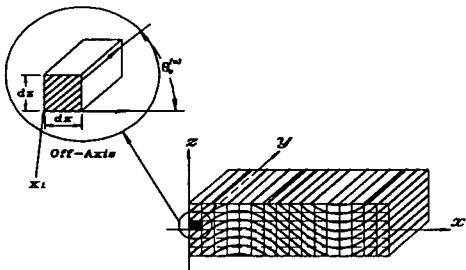


Fig. 1 Schematic drawing of a representative volume for unidirectional composite material with uniform fiber waviness.

초기 보강섬유의 굴곡은 식 (1)과 같은 사인함수로 가정한다.

$$z = a \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (1)$$

그리면 주기방향으로  $n$ 번째 미소요소의 초기 보강섬유 기울기( $\theta_0^{(n)}$ )는 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\theta_0^{(n)} = \frac{1}{2} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \cos \frac{2\pi x_1}{\lambda} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \cos \frac{2\pi(x_1 + dx)}{\lambda} \right) \right] \quad (2)$$

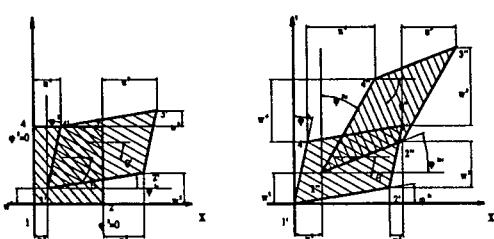


Fig. 2 Schematic drawing showing the deformation of subelement.

변형이 진행되면서 보강섬유의 방향이 재배치되어 강성이 달라지는 기하학적 비선형 특성을 고려하기 위해서 다음과 같이 변형이 진행됨에 따른 보강섬유의 방향을 고려해야 한다. 특정한 미소요소 내의 보강섬유의 재배치는 미소요소의 절점좌표를 이용하여 구한다. Fig. 2와 식 (2)로부터  $n$ 번째 미소요소의 변형 후 보강섬유의 비김축 방향( $\theta^{(n)}$ )은 다음과 같이 유도된다.

$$\theta^{(n)} = \tan^{-1} \left[ \Delta\phi_1 - \Delta\phi_2 + \frac{1 + \varepsilon_z^{(n)}}{1 + \varepsilon_x^{(n)}} \tan \theta_0^{(n)} \right] \quad (3)$$

여기서,  $\phi_i$ ,  $\varepsilon_i$ ,  $\gamma_i$ 는 각각  $i$ 번째 절점좌표로 계산이 가능한 미소요소 변의 각도변화와 수직, 전단변형률을 의미한다.

이렇게 해서 하중이 증가하는 동안 변형에 따라 변화하는 보강섬유의 방향이 구해지면, 비김축 강성도( $[Q^*]$ )를 순차적으로 계산하여 보강섬유의 재배치에 따른 기하학적 비선형 특성을 고려할 수 있다.

에너지 밀도( $W$ )<sup>(3)</sup>는 재료적 비선형성을 해석 모델에 고려하기 위하여 사용된다. 본 연구에서는 변형률의 4차항까지 사용하였다.

$$W = W(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}^2, \gamma_{23}^2, \gamma_{13}^2, \gamma_{12}\gamma_{23}\gamma_{13}) \quad (4)$$

여기서  $\varepsilon_{ij}$ 와  $\gamma_{ij}$ 는 각각 정축 수직변형률과 정축 전단변형률을 의미한다. 에너지 밀도로부터 응력-변형률 관계는 식 (5)와 같이 유도된다.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (5)$$

수직변형률과 전단변형률 사이의 비선형 연성 항이 매우 작은 수치이므로 무시할 수 있고<sup>(2)</sup>, 이렇게 되면 정축 응력-변형률 관계는 식 (6)과 같이 행렬로 표현할 수 있다.

$$[\sigma]_{1,2,3} = [C^*][\varepsilon]_{1,2,3} \quad (6)$$

$x-z$  평면에 대해 평면응력상태로 가정한다면, 정축변형률과 비김축변형률간의 관계는 변환행렬을 이용하여 나타낼 수 있고, 비김축 강성행렬 또한 변환행렬과 에너지 밀도의 계수(강성행렬  $[C^*]$ ) 및 앞서 기하학적 비선형을 고려하기 위하여 식 (2)에서 구한 보강섬유의 방향을 이용하여 나타낼 수 있다.

이렇게 해서 재료적 비선형성과 기하학적 비선형성을 동시에 고려한 강성행렬을 얻게 되면 유한요소해석기법을 이용하여 하중이 가해지는 각 단계에서의 미소요소의 절점 변위를 구한다. 평형방정식은 식 (7)과 같다.

$$[K][d] = [F] \quad (7)$$

여기서  $[F]$ 는 외력 벡터,  $[d]$ 는 변위 벡터,  $[K]$ 는 전체강성행렬을 의미하고, 미소요소의 강성행렬( $[K_{ij}]^e$ )은 식 (8)과 같다.

$$\begin{aligned} [K_{ij}]^e &= \int_Q [B_i]^T [D] [B_j] dQ^e \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_i]^T [D] [B_j] |J| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $[K_{ij}]$ ,  $[B]$ ,  $[D]$ ,  $|J|$ 는 각각 요소강성행렬, 변형률-변위 관계 행렬, 자코비안의 디터미넌트를 의미한다.

하중이 증가함에 따라 변화하는 미소요소의 모양은 사상을 반복함으로써 보완이 가능하고, 강성행렬 내의 변형률 항을 이루는 절점 변위와 변위 벡터내의 절점 변위를 동시에 구하기 위해서 Newton-Raphson 법을 사용한다. 이런 식으로 반복 사상과 순차적 해석방법을 반복하여 굴곡진 보강섬유로 이루어진 두꺼운 복합재료 직선보의 굽힘 거동 및 응력 분포를 해석할 수 있다.

## 2.2 일정한 굴곡을 가진 보강섬유로 이루어진 두꺼운 복합재료 곡선보

Fig. 3은 굴곡진 보강섬유로 이루어진 두꺼운 복합재료 곡선보를 도시한다.  $r-\phi$ 좌표계의 보강섬유의 굴곡식을  $x-z$ 좌표계로 변환하기 위하여  $x'-z'$ 좌표계가 매개좌표계로 사용되었다.

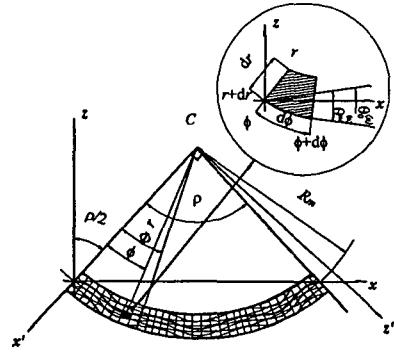


Fig. 3 Schematic drawing of a representative volume for unidirectional composite material with both uniform fiber waviness and initial curvature.

Fig. 3으로부터 굴곡진 보강섬유는 식 (9)와 같이 표현할 수 있고,  $x-z$ 좌표계에서 초기 보강섬유의 방향( $\theta_0^{(n)}$ )은 식 (10)으로써 표현이 가능하다.

$$r = -a \sin \frac{2\pi\phi}{\Phi} + R_m \quad (9)$$

여기서  $r$ ,  $\phi$ 는 Fig. 3에 도시된 바와 같이 원통형 좌표계를 의미하고  $a$ ,  $\Phi$ ,  $R_m$ 은 각각 보강섬유 굴곡의 진폭, 굴곡의 주기, 곡선보 중심부까지의 곡률반경을 뜻한다.

$$\begin{aligned} \theta_0^{(n)} &= \theta_{ini}^{(n)} \\ &- \sin^{-1} \left[ \frac{1}{d\theta} \left( 1 - \cos \left( \frac{\rho}{2} - \phi \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

여기서,  $\theta_{ini}^{(n)}$ 은 식 (11)과 같고  $\rho$ 는 해석구간의 전체 각도를 나타낸다.

$$\begin{aligned} \theta_{ini}^{(n)} &= \frac{1}{2} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{1}{r} \frac{dr}{d\phi} \right)_{\phi} \right. \\ &\left. + \tan^{-1} \left( \frac{1}{r} \frac{dr}{d\phi} \right)_{\phi+d\phi} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

식 (10)과 앞서 직선보에서 사용된 방법을 이용해서 일정한 굴곡을 가진 보강섬유로 이루어진

두꺼운 복합재료 곡선보의 거동과 응력 분포를 예측할 수 있다.

### 3. 실험

본 연구에 사용된 재료는 Hexcel사의 DMS 2224 graphite/epoxy 복합재료였으며 일정한 보강섬유 굴곡이 있는 두꺼운 복합재료 시편을 제작하여 4점 굽힘 시험 장치에 물리고 MTS 만능시험기로 하중을 가하며 Fig. 4와 같이 4점 굽힘시험을 실시하였다. 제작된 복합재료 시편의 굴곡비는 0.011, 0.034, 0.059의 세 종류로 일정하였으며, 보의 처짐( $w$ )은 수제 처짐 측정기를 이용하여 측정하였다.

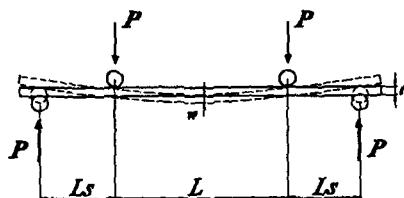


Fig. 4 Schematic drawing of four-point flexural test ( $L=70\text{mm}$ ,  $L_s=35\text{mm}$ ,  $t=5.2\text{mm}$ ).

### 4. 결과 및 고찰

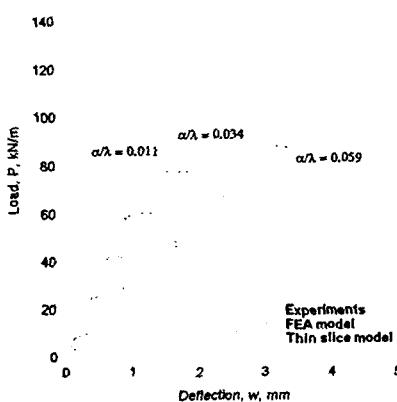


Fig. 5 Predicted and experimentally obtained load-deflection curves for flat uniform fiber waviness model with various fiber waviness ratio.

Fig. 5는 유한요소해석모델을 이용한 굽힘거동의 예측 결과와 기존의 전홍재<sup>(7)</sup>에 의해 개발된 층 요소 모델(thin slice model)의 예측 결과를 실험 결과와 비교한 것이다. 유한요소해석모델을 이용하여 예측한 결과는 대체로 보강섬유의 굴곡비에 따라 실험한 결과와 유사하였다.

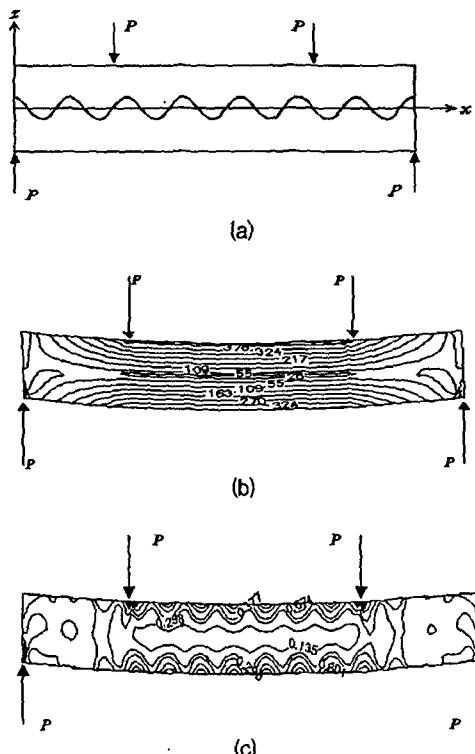
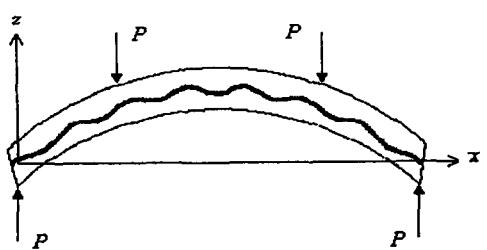
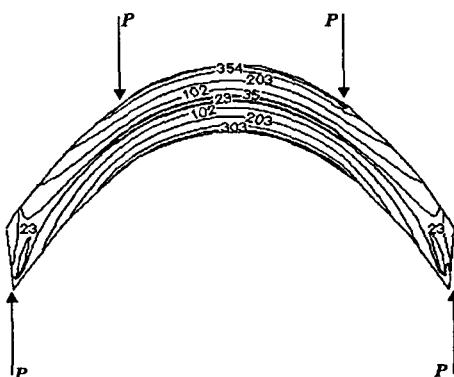


Fig. 6 Stress and strain analyses of flat beam with uniform fiber waviness (applied load,  $P=50\text{kN}/\text{m}$ ): (a) schematic drawing of initial fiber waviness ratio ( $\alpha/\lambda$ ) of 0.034, (b) contour plot of effective stress ( $\sigma_{eff}$ , MPa), (c) contour plot of effective strain ( $\epsilon_{eff}$ ,  $\mu$ ).

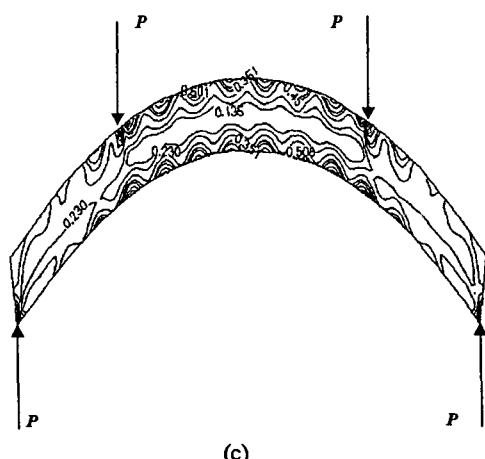
Fig. 6은 4점 굽힘하중 부하시 굴곡진 보강섬유를 가진 두꺼운 복합재료 직선보의 유효응력 분포 및 유효변형률 분포를 도시하고 있다. 일반적인 보의 굽힘 거동에서 축방향 응력이 다른 방향의 응력보다 상대적으로 훨씬 크게 나타남을 고려할 때 (b)로부터 중립면이 직선보의 중앙부의 아랫쪽으로 변화되었음을 알 수 있다. 또한 (c)로부터 보강섬유의 방향에 따라 강성이 변화하는 모습을 변형률의 차이를 통해 발견할 수 있다.



(a)

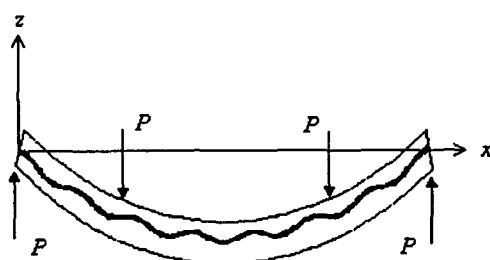


(b)

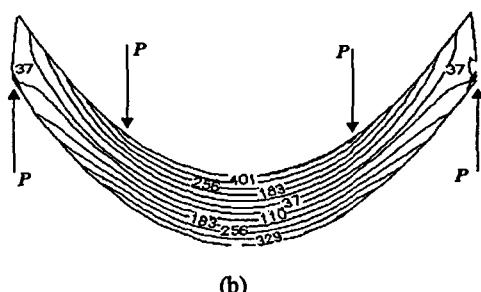


(c)

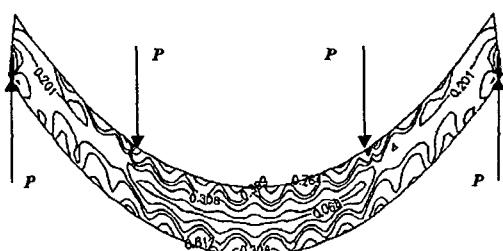
Fig. 7 Stress and strain analyses of convex beam with uniform fiber waviness model (applied load,  $P=50\text{kN/m}$ ) : (a) schematic drawing of initial fiber waviness ratio ( $a/\lambda$ ) of 0.034 and radius of curvature ( $R_m$ ) of 200mm, (b) effective stress ( $\sigma_{eff}$ , MPa), (c) effective strain ( $\varepsilon_{eff}$ ,  $\mu$ ).



(a)



(b)



(c)

Fig. 8 Stress and strain analyses of concave beam with uniform fiber waviness model (applied load,  $P=50\text{kN/m}$ ) : (a) schematic drawing of initial fiber waviness ratio ( $a/\lambda$ ) of 0.034 and radius of curvature ( $R_m$ ) of 200mm, (b) effective stress ( $\sigma_{eff}$ , MPa), (c) effective strain ( $\varepsilon_{eff}$ ,  $\mu$ ).

Fig. 7과 8은 곡선보에서의 유효응력 분포 및 유효변형률 분포를 도시하고 있다. 부하가 걸리는 방향에 따라 convex beam과 concave beam으로 분류한다. 위로 불록한 상태에서 굽힘 하중이 가해지는 convex beam의 경우에서 동일한 하중이 가해지는 concave beam보다 최대유효응력은 더

작은 값을 나타내고 있다. 이는 초기 곡선보의 곡률이 굽힘 하중에 저항하는 영향을 끼치기 때문으로 추정된다. 직선보와 마찬가지로 후프응력의 크기가 반지름방향응력의 크기나 전단응력의 크기에 비하여 상대적으로 매우 크다는 사실을 고려할 때 곡선보의 중립면 도 보의 중앙부의 아랫쪽으로 이동하였음을 알 수 있다. 보강섬유의 굴곡에 의한 강성의 변화는 변형률분포를 통하여 확인할 수 있다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 보강섬유가 굴곡진 두꺼운 복합재료의 직선보 및 곡선보의 굽힘 거동 해석을 위한 유한요소해석모델을 제시하고, 에너지 밀도와 반복 사상, 순차적 해석 방법을 이용하여 복합재료의 재료적 비선형 특성 및 보강섬유의 굴곡 및 곡선보의 곡률반경의 변화로 인한 기하학적 비선형 특성을 동시에 고려하여 직선보 및 곡선보의 굽힘 하중 하에서의 응력 분포를 예측하였다. 굽힘 거동의 해석은 실험 결과와 유사한 경향을 나타내었다.

보강섬유의 굴곡은 굽힘 하중이 가해지는 경우 변형률 분포에 직접적인 영향을 미쳤으며 직선보와 곡선보 모두 중립면이 보의 중앙부 아랫쪽으로 이동함을 알 수 있었다. 직선보는 concave beam과 convex beam의 중간 정도의 응력 분포를 보였으며, 이는 곡선보에서 초기 곡률이 굽힘 거동에 영향을 미치기 때문으로 풀이된다.

## 참고문헌

- (1) Petit, P. H. and Waddoups, M. E., "A Method of Predicting the Nonlinear Behavior of Laminated Composites", *Journal of Composite Materials*, Vol. 7, 1973, pp. 102-118.
- (2) Hahn, H. T. and Tsai, S. W., "Nonlinear Elastic Behavior of Unidirectional Composite Laminate", *Journal of Composite Materials*, Vol. 7, 1973, pp. 102-118.
- (3) Green, A. E., Adkins, J. E., "Large Elastic Deformations", Oxford University Press, 1970.
- (4) Chou, T. -W., "Microstructural Design of Fiber Composites", Cambridge University Press, 1992.
- (5) Daniel, I. M. and Ishai, O., "Engineering Mechanics of Composite Materials", Oxford University Press, 1992.
- (6) 최창집, "유한요소법", 집문당, 1989.
- (7) 전홍재, 신재윤, 최홍섭, "굴곡진 보강섬유가 복합재료의 기계적 특성에 미치는 영향과 일정한 보강섬유의 굴곡비를 가지는 복합재료의 성형방법에 관한 연구", 한국정밀공학회지, 16권, 9호, 1999, pp. 135-142.
- (8) Chun, H. -J., Daniel, I. M. and Shin, J. -Y, "Nonlinear Behaviors of Thick Composite Materials with Fiber Waviness", A Collection of Technical Papers, AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, St. Louis, MO, 12-15 April, Vol. 1, 1999, pp. 467-474.