

# 퍼지 이론을 이용한 복합재 적층판의 최적설계 (Optimization of Composite Laminated Plate Using Fuzzy Set Theory)

홍영기\*, 이종호(충남대 대학원), 구만희(국방과학 연구소), 우호길 (충남대)  
Young Kee Hong, Jong Ho Lee (Graduate School, Chungnam National Univ.),  
Man Hoe Koo(A.D.D), Ho Gil Woo (Chungnam National Univ.)

Key Words : Fuzzy(퍼지), Composite(복합재료), Laminated Plate(적층판), Optimization(최적설계)  
Degree of satisfaction(만족도), Member function(소속함수)

ABSTRACT : This paper presents the optimization of CFRP laminated rectangular plates using fuzzy theory. In optimization, thickness of CFRP lamina and fiber angle are taken as design variables, and total thickness of the plates is minimized under Tsai-Hill failure criterion. The uncertainties are entered by introducing fuzzy material strengths and then the objective and constraints are represented by a membership function of their own according to the intersection method. Various design results are presented for the CFRP laminated composites plates.

## 1. 서론

섬유강화 복합재료(Fiber-reinforced composites)는 1940년대부터 본격적으로 사용되기 시작한 것으로 기존의 금속재료보다 높은 비강도 및 비강성을 가짐으로써 구조물을 경량화 시킬 수 있으며 피로특성, 고온에 잘 견디는 특성, 내마모성 및 내부식성 등 우수한 기계적 성질을 가짐으로써 이런 특성들을 필요로 하는 항공, 우주, 기계분야에 널리 쓰이고 있다. 이방성을 갖는 섬유강화 복합재료에 있어서 각각의 적층판의 두께와 섬유각, 적층순서 등을 설계변수로 택하여 설계요구조건에 맞게 강성, 강도 및 좌굴 등에 관한 해석과 최적화 연구가 활발히 진행되고 있다.

최적설계에 있어서 과거에는 경험, 공식, 자료 등을 이용하여 시행착오적인 반복과정을 통해 설계하는 방법을 주로 사용하여 왔다. 그러나, 이러한 설계 방법은 체계적이지 못하고 설계 대상에 따라 많은 시간이 걸리기도 하였다. 1960년대에 들어서 대형 컴퓨터의 출현으로 이러한 문제점들을 해결하고 보다 효율적인 설계 최적화를 위해 수학적 계획법(mathematical programming)에 의한 최적설계 연구가 가능하게 되었다. 그러나, 실제 공학시스템의 설계자는 제한조건과 목적을 수학적으로 명확하게 기술해야 하는데 설계 목적이 모호하게 서술되거나 표현방식의 한계성으로 인해 부정확성(inaccuracy)의 문제가 발생할 수 있었으며 또한 확실성을 가지고 제약조건을 기술하는 것도 어려웠다. 이와 같은 문제를 해결하기 위해 통계적 기법이 사용되기도 하지만, 이는 시

스템 외부로부터 설정되는 것이기 때문에 시스템 내적인 불확실성을 표현해주지는 못한다. 또한, 보통의 최적화 기법의 과정을 살펴보면 다량의 계산 정보들이 얻어짐과 동시에 불명확한 정보들이 계산과정에 포함된다는 것을 알 수 있다. 따라서, 이 불확실성을 체계적으로 문제의 내부에 반영하여 해석모델에 포함시키고 불확실성을 동시에 추론하는 방법이 연구되어져 왔는데 1965년 버클리 대학의 자데(Lofti A. Zadeh)<sup>(1,2)</sup> 교수는 퍼지 집합 이론을 제창하였다. 퍼지집합 이론은 모호성(vagueness) 즉, 퍼지정도(fuzziness)에 기인한 불확실성의 문제를 포함하도록 기존의 이론을 확장한 것으로 볼 수 있는데 목적함수나 제약조건이 모호한 경우, 집합 경계가 명확하게 정의되어 있지 않은 경우 또한 애매한 정보를 포함한 경우 등에 대하여 효과적으로 해결할 수 있다고 알려져 있으며 최근에는 공학분야의 최적화 문제에 광범위하게 적용되어지고 있다.<sup>(3,4)</sup>

본 연구는 선형 소속함수를 이용한 퍼지 최적화 알고리즘을 이용하여 고전 평판 이론에 근거한 복합재 적층판의 최적설계를 수행하고자 한다.

## 2. 복합재 적층판의 해석

복합재 적층판의 구성방정식(constitutive equation)은 식 (2-1)과 같다.

$$\{\sigma\}^k = [\bar{Q}]^k \{\epsilon\}^k \quad (2-1)$$

여기서  $\bar{Q}_{ij}$ 는  $Q_{ij}$ 를 변환 공식에 의하여 변환시키면 식(2-2)와 같다.

$$[\bar{Q}_{ij}] = [T]^{-1}[Q_{ij}][T] \quad (2-2)$$

다음은 1차 전단 변형에 의한 변위이다.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (2-3)$$

변형이 작을 경우 변위-변형률 관계는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \{\epsilon^0\} - z\{\chi\} \quad (2-4)$$

식(2-4)를 식(2-1)에 대입하면 각 적층판의 응력을 계산할 수 있다. 또한 식(2-1)을 두께 방향으로 적분하면 합응력(stress resultant)을 구할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon^0 \\ \chi \end{pmatrix} \quad (2-5)$$

여기에서

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (2-6)$$

$i, j = 1, 2, 6$

위 식들의 관계를 이용한 각 적층판의 응력-변형률의 관계를 나타내면 다음과 같다.

$$\{\sigma\}^k = [\bar{Q}]^k \{\epsilon^0\} + z[\bar{Q}]^k \{\chi\} \quad (2-7)$$

### 3. 퍼지 최적화

일반적인 최적설계 문제는 다음과 같은 가정 하에서 이루어진다.

- 각각의 설계 정보는 명확한 값으로 알려져 있다.
- 제약조건은 유용 결정에 있어 명확한 집합(crisp set)으로서 한정된다.
- 목적함수는 잘 정의되어지고 또한 정식화하기가 쉽다.

그러나 실제 최적화 문제에서는 정보들이 정확하지 않고 불확실하거나 모호한 경우가 많아 변수를 엄밀하게 추정할 수 없기 때문에 의사결정자가 최적대안을 선택하여 계획을 수립하는데 어려움에

직면하게 된다. 따라서, 이런 문제들을 다루기 위하여 퍼지집합 이론을 이용한다.

퍼지 최적화에 있어서 퍼지 목적함수와 제약조건들은 소속함수에 의해 표현되며 퍼지 환경에서의 최적화는 퍼지 목적함수와 퍼지 제약조건을 교집합으로 나타낼 수 있다.

퍼지이론을 적용하지 않은 일반적인 최적화 문제는 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } f(X) \\ & \text{subject to } g_j(X) \leq b_j; \quad j = 1, 2, \dots, m \\ & \quad \quad \quad x_i^{(l)} \leq x_i \leq x_i^{(u)}; \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3-1)$$

여기서  $X$ 는 설계변수(Design Variable),  $f(X)$ 는 목적함수(Object function),  $g_i(X)$ 는 제약함수이다. 그리고,  $b_j$ 는 제약함수의 상한치를 표기하고  $X_l$ 과  $X_u$ 는 각각 설계변수들의 하한계값 및 상한계값 들이다.

앞의 최적화 문제를 퍼지 환경에서의 최적설계 문제로 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \tilde{f}(X) \\ & \text{subject to } g_j(X) \cong \tilde{G}_j; \quad j = 1, 2, \dots, m \\ & \quad \quad \quad x_i \cong \tilde{X}_i; \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3-2)$$

여기서 일반적인 부분집합  $G_j$ 는 제약함수  $g_j$ 의 유용 간격,  $G_j = [-\infty, b_j]$ 을 나타내는 것이고,  $\sim$  기호는 변수 또는 인자가 퍼지 정보를 포함하고 있음을 의미하는 것이다. 만약  $d_j$ 가  $g_j(X)$ 의  $b_j$ 에 대한 허용 가능한 변화량이라면 퍼지 유용 공간은  $\tilde{G}_j = [-\infty, b_j + d_j]$ 로 할 수 있다. 제약함수  $g_j \cong \tilde{G}_j$ 은  $g_j$ 가  $\mu_{G_j}(g_j) > 0$ 라는 의미에서 퍼지 부분집합  $\tilde{G}_j$ 의 일부임을 의미하는 것이다. 퍼지 유용영역은 모든 제약조건을 고려함에 있어 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\tilde{S} = \bigcap_{j=1}^m \tilde{G}_j \quad (3-3)$$

그리고 퍼지 유용영역  $\tilde{S}$ 에 대한 임의설계벡터  $X$ 의 소속도(membership degree)는 다음과 같이 줄 수 있다.

$$\mu_{\tilde{S}}(X) = \min_{j=1, 2, \dots, m} \{\mu_{G_j}[g_j(X)]\} \quad (3-4)$$

즉, 모든 제약조건에 대한 설계벡터  $X$ 의 최소 만족도를 의미한다.

설계벡터  $X$ 는  $\mu_S(X) > 0$ 인 유용공간에서 고려되어지며 두 설계벡터  $X_1, X_2$ 의 소속도 차이는 단지 제약조건에 대한  $X_1, X_2$ 의 최소 만족도의 차를 의미한다. 그러므로 최적해는  $\hat{S}$ 과  $\hat{f}(X)$ 에 관련된 퍼지 공간  $D$ 에 존재할 것이다. 퍼지 공간  $D$ 와 퍼지 공간에서의 소속함수를 정의하면 다음과 같다.

$$D = \left\{ \bigcap_{j=1}^m G_j \right\} \quad (3-5)$$

$$\begin{aligned} \mu_D(X) &= \left\{ \bigcap_{j=1}^m \mu_{G_j}[g_j(X)] \right\} \\ &= \min \{ \mu_f(X), \mu_{G_j}[g_j(X)] \} \end{aligned} \quad (3-6)$$

여기서 퍼지 최적해  $X^*$ 는 소속함수를 최대화하는 것으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mu_D(X^*) = \max_{X \in D} \mu_D(X) \quad (3-7)$$

퍼지 최적화 문제는 다음과 같이 구성될 수 있다. 식(3-1)과 같은 문제에 대한  $f$ 의 최적값을  $f^*$ 라 하고 식(3-1)에서  $b_j$ 를  $d_j > 0, j = 1, 2, \dots, m$ 인  $b_j + d_j$ 로 바꾸어서 얻어진 문제의  $f$ 에 대한 최적값을  $f^* - \Delta f$ 라 하자. 이것은  $f^*$ 은 제약조건의 보다 엄격한 집합에서의 해이고 반면에  $f^* - \Delta f$ 는 제약조건의 보다 이완된 집합에서의 해를 의미한다.

이 값을 이용하여 목적함수의 소속함수를 Fig 1에서 표시하듯이  $f^*$ 와  $f^* - \Delta f$ 사이에서 선형적으로 변화하는 것으로 설정한다.

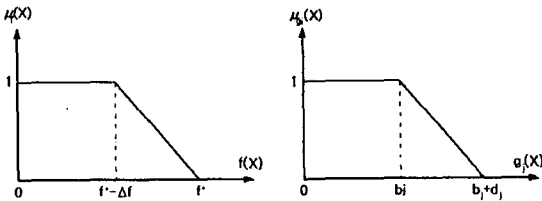


Fig 1. Membership function of  $f$  and  $g_j$

$$\mu_f = \begin{cases} 1 & \text{if } f < f^* - \Delta f \\ 1 - \frac{f - \Delta f - f^*}{\Delta f} & \text{if } f^* - \Delta f \leq f \leq f^* \\ 0 & \text{if } f > f^* \end{cases} \quad (3-8)$$

제약함수의 소속함수도 유사한 방법으로 구성할 수 있다.

$$\mu_{g_j} = \begin{cases} 1 & \text{if } g_j < b_j \\ 1 - \frac{g_j - b_j}{d_j} & \text{if } b_j \leq g_j \leq b_j + d_j \\ 0 & \text{if } g_j > b_j + d_j \end{cases} \quad (j = 1, \dots, m) \quad (3-9)$$

위 식들을 이용하여 퍼지 최적화 문제를 다음과 같이 구성하고 일반적인 비선형 최적화 기법을 통하여 문제를 해결한다.

$$\begin{aligned} \text{Find } & X^* = [X, \lambda]^T \\ \text{Maximize } & f^*(X^*) = \lambda \\ \text{subject to } & \lambda \leq \mu_f(X), \\ & \lambda \leq \mu_{g_j}(X), \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3-10)$$

#### 4. 수치해석 및 고찰

##### 4.1 해석 모델

수치 모델은 인장 및 전단하중을 받는 복합재 적층판 모델을 설정하였다. 적층판의 좌표계 및 합응력은 Fig 1, 2와 같다.

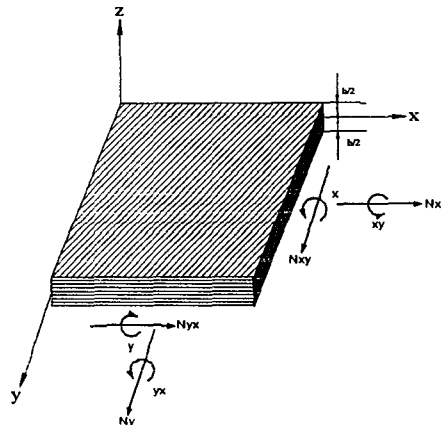


Fig 2. Coordinate system and stress resultants for laminate plate

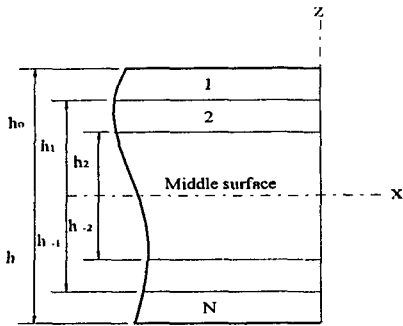


Fig 3. Laminated plate geometry and ply number system

해석에 사용된 모델은  $\{\theta/-\theta\}$ s의 적층 배열을 갖는 Symmetric Angle ply 적층판을 설정하였다. 해석모델의 섬유와 매트릭스의 재질은 일반적으로 널리 이용되고 있는 탄소섬유 강화복합재료인 graphite/epoxy를 설정하였으며 이에 대한 물성치는 Table1과 같으며 하중방향에 대한 적층각의 변화를 보기 위해서 해석모델에 대한 하중조건은 Table2와 같이 설정하였다.

Table 1. Material properties of T300/N5208

(단위 : GPa)

Properties		Strength	
$E_1$	181.00	Xt	1.500
$E_2$	10.30	Xc	1.005
$G_{12}$	7.17	Yt	0.040
$\nu_{12}$	0.28	Yc	0.246
		S	0.068

Table 2. Loading condition of laminate plates

(단위 : GN/mm)

Case No.	$N_x$	$N_y$	$N_{xy}$
Case1	1	-	-
Case2	-	-	1
Case3	0.5	1	-
Case4	0.5	2	-
Case5	1	1	-
Case6	0.5	1	0.5

#### 4.2 퍼지 최적화 문제 구성

복합재 평판문제에 대한 최적화는 먼저 복합재 평판의 전 두께(H)를 목적함수로 구성하고 구속조건은 각각의 적층판이 Tsai-Hill 파손기준을 만족하도록 문제를 구성하였으며 설계 변수로는

각각의 적층 두께 및 적층 각도를 설정하였다. 이때 해석모델의 적층 순서가 대칭임을 고려하여 설계 변수는 총 레이어 수의 반만을 선택하였다. 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\text{Find } X' = [h, \theta]^T$$

$$\text{Minimize } f'(X') = H$$

$$\text{subject to } \begin{aligned} (Tsai-Hill)_i &\leq 1, \quad i = 1, \dots, l \\ \pi/2 \leq \theta_j &\leq \pi/2, \quad j = 1, \dots, m \\ h_l \leq h_k &\leq h_u, \quad k = 1, \dots, n \end{aligned}$$

(4-1)

윗 식에서 H는 적층판의 총두께이고, F.I.T-H는 Tasi-Hill failure criteria를 나타내며  $h, \theta$ 는 한 플라이의 두께 및 적층각을 나타낸다.

이상과 같이 정의된 최적설계문제를 퍼지 최적화 문제로 변환하면 다음과 같다.

$$\text{Find } X' = [X, \lambda]^T$$

$$\text{Maximize } f'(X') = \lambda$$

(4-2)

$$\text{subject to } \begin{aligned} \lambda &\leq \mu_f(X), \\ \lambda &\leq \mu_g(X), \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

윗 식에서  $\mu_f$ 와  $\mu_g$ 는 목적함수와 구속조건에 대한 소속함수이고  $\lambda$ 는 시스템의 만족도(Degree of satisfaction)을 나타낸다.

#### 4.3 해석 결과 및 고찰

퍼지 이론을 적용하지 않은 해석모델에 대한 최적설계 결과는 Table3과 같고 퍼지 최적설계 결과는 Table 4와 같다.

Table 3. Non-fuzzy optimization results

Case No.	Layer No.	Ply thickness (h, mm)	Ply angle ( $\theta^\circ$ )	Object function (H, mm)
Case1	1	0.167	0.0	0.667
	2	0.167	0.0	
Case2	1	0.672	45.0	2.103
	2	0.380	-45.0	
Case3	1	0.575	53.4	2.300
	2	0.575	-53.4	
Case4	1	0.715	61.8	2.858
	2	0.715	-61.8	
Case5	1	0.888	45.0	3.550
	2	0.888	-45.0	
Case6	1	0.949	53.4	2.240
	2	0.171	-53.4	

Table 4. Fuzzy optimization results

Case No.	Layer No.	Ply thickness (h, mm)	Ply angle ( $\theta^\circ$ )	Object function ( $\lambda$ )
Case1	1	0.159	0.0	0.517
	2	0.159	0.0	
Case2	1	0.648	45.0	0.508
	2	0.358	-45.0	
Case3	1	0.550	53.4	0.512
	2	0.550	-53.4	
Case4	1	0.683	61.8	0.512
	2	0.683	-61.8	
Case5	1	0.848	45.0	0.518
	2	0.848	-45.0	
Case6	1	0.900	53.5	0.512
	2	0.170	-53.5	

해석의 타당성을 입증하기 위하여 먼저 Case1 과 같은 단축인장에 대한 해석을 수행하였다. 그 결과 섬유 방향의 적층 방향이 하중의 방향과 일치하는 것으로 나타났다. 이는 섬유방향으로의 강도가 가장 크게 나타나는 복합재료의 특성과, 본 문제가 강도를 제한함수로 구성한 점을 감안한다면 해석 결과가 물리적으로 타당함을 알 수 있다. 마찬가지로 Case3, 4, 5는 2축하중이 작용하는 상태에서 작용하중의 변화에 따른 적층각의 변화를 표현하고자 작용하중의 비율을 1:1에서부터 1:4까지 변화시킨 경우이다. 하중의 비율이 같은 경우는 ( $\pm 45^\circ$ )로 나타났으며 각 방향으로 작용하는 하중의 비율이 증가함에 따라 섬유의 방향도 하중의 작용방향과 거의 유사하게 나타나 해석 결과가 비교적 타당한 것으로 나타났다. Case6의 경우는 인장 및 전단이 동시에 작용하는 경우로서 하중의 비율이 비교적 크게 나타나는 방향으로 적층각이 나타남을 알 수 있다.

## 5. 결론

탄소섬유 강화 복합재로 구성된 적층판에 대하여 퍼지 이론을 적용한 최적설계를 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 확정적으로 가정한 복합재 평판의 최적설계 문제에 대하여 퍼지 이론을 도입함으로써 모호한 정보를 다룰 수 있는 퍼지 최적화 문제로 구성할 수 있었다.
- 목적함수나 구속조건에 대한 모호한 정보를 퍼지 영역으로 설정하고 수식화 함으로서 실제 설계문제에 대한 적절한 해를 얻을 수 있었다.
- 각각의 하중조건에 대하여 해석을 수행한 결과 강도를 만족시키는 최적 두께 및 적층각을 도출하였으며 시스템이 가지고 있는 모호한 정도를

명확한 값으로 표현할 수 있었다.

## 참고문헌

- (1) Zadeh, L. A., 1965, "Fuzzy Sets", Information and Control, Vol.8, pp. 338-353.
- (2) Zadeh, L. A., 1973, "Outline of a New Approach to the Analyses of Complex Systems and Decision Process", IEEE Trans. on Sys. Man and Cybernetics, SMC-3, pp.2 8~44.
- (3) S. S. Rao, 1987, "Optimum Design of structures in a fuzzy environment", AIAA Journal, Vol.25, No.12, pp.1633~1636.
- (4) Yi-Cherng Yeh and Deh-Shiu Hsu, 1990, "Structural Optimization with Fuzzy Parameters", Computers & Structures, Vol.37, No.5, pp.917~924.
- (5) James M. Whitney, 1987, "Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates", Technomic Publishing, Company, Inc.
- (6) Ronald F. Gibson, 1994, "Principles of Composite Material Mechanics", McGraw-Hill, Inc.
- (7) S. S. Rao, 1996, "Engineering Optimization. Theory and Practice", John Wiley & Sons.