

# 다중 크랙이 있는 복합재료 보의 자유진동 특성

## Free Vibration Characteristics of a Composite Beam with Multiple Transverse Open Cracks

하 태 완\* · 송 오 섭\*\*  
Tae-Wan Ha, Ohseop Song

**Key Words:** Multiple Cracks(다중 크랙), Transverse Open Crack(횡방향 개구형 크랙), Composite Beam(복합재료 보), Timoshenko Beam Theory(티모센코 보 이론), Hamilton's Principle(해밀톤 원리), Laplace Transform(라플라스 변환법), Natural Frequency(고유진동수), Mode Shape(모드형상)

### ABSTRACT

Free vibration characteristics of a cantilevered laminated composite beam with multiple non-propagating transverse open cracks are investigated. In the present analysis a special ply-angle distribution referred to as asymmetric stiffness configuration inducing the elastic coupling between chord-wise bending and extension is considered. The multiple open cracks are modelled as equivalent rotational springs whose spring constants are calculated based on the fracture mechanics of composite material structures. Governing equations of a composite beam with open cracks are derived via Hamilton's Principle and Timoshenko beam theory encompassing transverse shear and rotary inertia effect is adopted. The effects of various parameters such as the ply angle, fiber volume fraction, crack numbers, crack positions and crack depths on the free vibration characteristics of the beam with multiple cracks are highlighted. The numerical results show that the existence of the multiple cracks in an anisotropic composite beam affects the free vibration characteristics in a more complex fashion compared with the beam with a single crack.

### 1. 서 론

주로 로터나 터빈 블레이드와 같은 회전체 구조물에서 크랙의 존재를 비파괴적인 방법으로 진단하기 위하여 크랙이 있는 보의 동적 거동 해석에 관한 많은 연구가 진행되어 왔다. 그러나 이 분야의 연구는 주로 금속과 같은 등방성 재료에 대하여 단일 크랙(single crack)을 대상으로 한 경우가 대부분이며 2개의 크랙(double cracks)이 있는 보를 대상으로 한 연구도 있지만 소수에 불과하다. W. M. Ostashowicz 등<sup>(1)</sup>은 보에 작용하는 하중형태에 따라 금속재료 외팔보의 단면 및 양

면에 2개의 개구형 크랙이 있는 경우를 가정하여 해석적인 방법으로 두 크랙사이의 위치 및 깊이를 변수로 1차 고유진동수의 변화를 고찰하였다. A. S. Sekhar<sup>(2)</sup>는 양단 단순지지상태의 금속재료 로터에 대하여 유한요소해석으로 2개의 횡방향 개구형 크랙의 상호 위치 및 깊이를 변수로 하여 고유진동수, 모드형상 및 위험속도한계 등을 분석하였다. 그러나 실제로 구조물에서 크랙은 2개 이상 존재할 가능성이 있으며 이로 인하여 더욱 복잡한 진동현상을 수반하게 된다. 또한 최근에는 복합재료의 사용이 증가되고 있는 추세에 비추어 크랙이 있는 복합재료 보를 대상으로 한 연구의 필요성이 제기되고 있다. 따라서 본 논문에서는 최근 단일 크랙이 있는 복합재료 보를 대상으로 동적 특성을 연구한 결과<sup>(3)</sup>를 확장하여 다

\*국방과학연구소

\*\*충남대학교 기계공학과

중 크랙(multiple cracks)이 있는 보의 자유진동특성에 대하여 연구하였다.

본 논문에서는 모든 층(lamina)을 한 방향으로만 적층하여 횡방향(chord-wise) 굽힘과 축방향 인장운동이 연성되어 나타나는 복합재료 보에 다중 횡방향 개구형 크랙(multiple transverse open cracks)이 있는 경우에 대하여 고찰하였다. 단일 크랙에서와 마찬가지로 모든 크랙 위치에서의 파괴역학적 특성을 스프링 상수로 변환하여 산출하고 크랙사이 구간의 보를 전단변형 및 회전관성 효과를 포함하여 해밀톤 원리로부터 일반적인 운동방정식 및 경계조건을 유도하였다. 그리고 이를 횡방향 굽힘운동과 축방향 인장운동이 연성되는 적층구조를 가진 외팔보에 대하여 운동방정식 및 경계조건을 유도하고 엄밀해를 얻을 수 있는 해법인 라플라스 변환법을 사용하여 자유진동특성에 관한 해를 구하였다. 복합재료의 설계 변수로서 섬유 체적비와 적층각을 설정하였으며, 크랙의 외형적 변수로서 크랙의 수량, 분포위치 및 깊이를 설정하여 이들 변수에 대한 고유진동수 및 모드 형상의 변화 경향을 도출함으로써 임의의 다수 크랙이 분포되어 있는 보다 실제적인 상황에서의 진동변화에 근거를 둔 비파괴검사(VBI; Vibration Based Inspection)가 이루어질 수 있는 방안에 대하여 연구하였다.

## 2. 크랙의 수학적 모델링

### 2.1 크랙선단에서의 탄성변형에너지

Fig. 1과 같이  $n$ 개의 다중 횡방향 개구형 크랙이 있는 복합재료 보의  $x$ - $z$  평면상에서  $i$  번째 크랙선단에서의 에너지분산율(energy release rate)은 다음과 같다<sup>(4)</sup>. ( $i=1, n$ )

$$G_{i-} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} [\sigma_x^{+0} u_x^{-0} + \tau_{xz}^{+0} u_x^{-0}] dx$$

$$= -\frac{b_{22}}{2} \operatorname{Im} \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \right) K_I^2 + \frac{b_{11}}{2} \quad (1)$$

$$\times \operatorname{Im}(\mu_1 + \mu_2) K_{II}^2 + b_{11} \operatorname{Im}(\mu_1 \mu_2) K_I K_{II}$$

여기에서  $b_{ij}$ 는 평면변형상태에서 이방성재료의 컴플라이언스,  $\mu_1, \mu_2$ 는 특성방정식의 근을 나타내며,  $K_I, K_{II}$ 는  $i$  번째 크랙의 제 I, II 파괴모드의 응력확대계수(stress intensity factor)를 나타낸다.

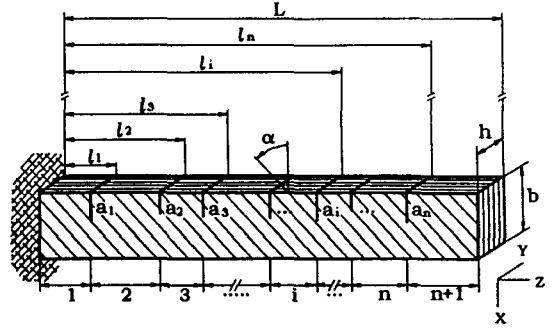


Fig. 1 Configuration of a cantilevered composite beam with multiple transverse open cracks

이 식을 이용하면  $i$  번째 크랙의 탄성변형에너지는 다음과 같다.<sup>(5)</sup>

$$U_{ci} = h \int G_i da$$

$$= \int_A [D_1 \left( \sum_{n=1}^N K_{I_n} \right)^2 + D_2 \left( \sum_{n=1}^N K_{II_n} \right)^2 + D_{12} \sum_{n=1}^N K_{I_n} \sum_{n=1}^N K_{II_n}] dA \quad (2)$$

여기에서  $a$ 는 크랙 길이,  $h$ 는 보의 단면 폭,  $N$ 은 보에 작용하는 독립적인 작용력의 수이다. 그리고

$$D_1 = -\frac{b_{22}}{2} \operatorname{Im} \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \right) \quad (3.1)$$

$$D_2 = \frac{b_{11}}{2} \operatorname{Im}(\mu_1 + \mu_2) \quad (3.2)$$

$$D_{12} = b_{11} \operatorname{Im}(\mu_1 \mu_2) \quad (3.3)$$

Castigliano 정리에 의하여 변위와 compliance matrix는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_i = \partial U_{ci} / \partial P_i, \quad C_{ij} = \partial u_i / \partial P_j \quad (4.1-2)$$

### 2.2 복합재료 시편의 직교이방성 보정<sup>(6)</sup>

복합재료 시편의 보정기법은 이방성과 유한 형상 사이의 상호관계를 도출하고 응력집중과 연계된 크랙, 직교이방성 시편의 효과적인 축소, 복합형태의 층상분리와 크랙변형 등을 연구하는데 사용된다. 먼저 단일 크랙이 있는 평면응력상태의 직교이방성 물체에 대하여 좌표축  $x$ 와  $z$ 를 직교이방성 재료의 주응력축 1과 2에 일치하도록 하면 앞의 특성방정식에서  $b_{16} = b_{26} = 0$ 이므로 다음과 같은 식을 얻는다.

$$b_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + (2b_{12} + b_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial z^2} + b_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} = 0 \quad (5)$$

여기에서  $U$ 는 Airy stress function을 나타내며 직교이방성 재료의 compliance matrix 성분으로부터  $b_{ij}$  값을 대입하고 다음의 변수를 정의한다.

$$\lambda = \frac{E_2}{E_1}, \quad \xi = \frac{(E_1 E_2)^{1/2}}{2G_{12}} - (\nu_{12} \nu_{21})^{1/2} \quad (6)$$

이들 변수들은 평면상에서 직교이방성의 정도를 나타낸다. 등방성 재료에서는  $\lambda = 1$ ,  $\xi = 1$  이다. 평면응력상태에서 나타난  $\lambda$  와  $\xi$  의 값은 평면변형상태에서 상응하는 값과 별 차이가 없는 것으로 알려졌다. 대부분의 복합재료는  $1/\lambda = 0 \sim 50$ ,  $\xi = 0 \sim 5$  의 범위에 있다. (5), (6)식으로부터 다음 식을 유도한다.

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\xi\lambda^{1/2} \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial z^2} + \lambda \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} = 0 \quad (7)$$

$x$ 축을  $\xi = \lambda^{1/4} x$  로 rescale 하면

$$\frac{\partial^4 U}{\partial \xi^4} + 2\xi \frac{\partial^4 U}{\partial \xi^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} = 0 \quad (8)$$

이 된다. 따라서  $\lambda$  는 하중과 기하학적 변수로 흡수되고,  $\xi$ - $z$  평면상의 경계치 문제는 재료상수  $\xi$  만을 갖게 된다.  $\xi = 1$  이면 이 지배방정식은 등방성 재료의 문제와 동일하게 된다. 보정된  $U$  값을 재정의 하면 다음과 같다.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad \lambda^{-1/2} \sigma_z = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}, \quad (9.1-3)$$

$$\lambda^{-1/4} \tau_{xz} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial z}$$

$x$ - $z$  평면에서  $i$  번째 크랙의 응력확대계수는 다음과 같다.

$$K_I \sim (2\pi x)^{1/2} \sigma_z, \quad K_{II} \sim (2\pi x)^{1/2} \tau_{xz} \quad (10.1-2)$$

따라서  $\xi$ - $z$  평면상에서  $i$  번째 크랙의 응력확대계수는

$$\lambda^{-3/8} K_I \sim (2\pi \xi)^{1/2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \quad (11.1)$$

$$\lambda^{-1/8} K_{II} \sim (2\pi \xi)^{1/2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial z} \quad (11.2)$$

이며, 다음과 같이 재정의 될 수 있다.

$$K_j = \sigma_j \sqrt{\pi a} F(a/b, \lambda^{1/4} L/b, \xi) \quad (12)$$

여기에서 만일  $\lambda^{1/4} L/b \geq 2.0$  이면  $\lambda^{1/4} L/b$  의 효과는 무시할 수 있다. 근사적인 인수분해를 통하여  $i$  번째 크랙에서 각 파괴모드에서의

응력확대계수를 구하면 다음과 같다.

$$K_j = \sigma_j \sqrt{\pi a} F_j(a/b) Y_j(\xi) \quad (j=I, II) \quad (13)$$

여기에서  $\sigma_j$ 는 각 모드에 해당하는 응력을 나타내며,  $F_j(a/b)$ 는 보의 유한크기에 따른 보정계수이고  $Y_j(\xi)$ 는 이방성 재료의 보정계수이다.

### 2.3 크랙선단에서의 연성 및 스프링 상수

Fig. 1과 같이 보의 높이( $b$ ) 방향으로  $n$ 개의 비전파성 개구형 크랙이 있는 경우를 대상으로 하여 굽힘진동시 제 I, II 파괴모드가 모두 나타나고 이들의 연성된 효과도 동시에 고려하여 모델링하였다. 연속 보에서 크랙에 의한 국부적 연성(flexibility)의 증가는 불연속 구간을 발생하게 되어 크랙을 중심으로 별도의 운동방정식과 경계조건을 설정할 필요가 있다.

운동방정식을 유도하기 위하여 크랙을 운동의 형태에 적합한 스프링 요소로 변환한다<sup>(1),(5)</sup>. 본 논문에서는 복합재료 보의 굽힘 자유진동 형태에 적합하도록  $n$ 개의 크랙을 각 각 회전스프링으로 변환하였다. 각 각의 크랙선단에서의 연성을 구하기 위해 (2)와 (4)식으로부터 등가 하중개념을 도입하여 다음과 같이 각 크랙의 길이 및 위치를 무차원화 하여 연성을 구하였다.

$$\bar{a}_i = a_i/b, \quad c_i = l_i/L \quad (14.1-2)$$

$$C_{mmi} = \frac{\partial^2 U_{ci}}{\partial M^2} = \frac{72\pi D_1}{hb^2} T_1 + \frac{2\pi D_2}{hL^2(1-c_i)^2} T_2 + \frac{12\pi D_{12}}{hbL(1-c_i)} T_3 \quad (14.3)$$

여기에서  $M$ 은 보의 자유단에 작용하는 굽힘 모멘트이다. 그리고

$$T_1 = \int_0^{\bar{a}_i} [\bar{a}_i Y_I(\xi)^2 F_I(\bar{a}_i)^2] d\bar{a}_i \quad (15.1)$$

$$T_2 = \int_0^{\bar{a}_i} [\bar{a}_i Y_{II}(\xi)^2 F_{II}(\bar{a}_i)^2] d\bar{a}_i \quad (15.2)$$

$$T_3 = \int_0^{\bar{a}_i} [\bar{a}_i Y_I(\xi) Y_{II}(\xi) F_I(\bar{a}_i) F_{II}(\bar{a}_i)] d\bar{a}_i \quad (15.3)$$

따라서  $i$  번째 크랙선단에서 부가되는 연성을 등가의 회전스프링 상수로 나타내면 다음과 같다.

$$K_{Ri} = \frac{1}{C_{mmi}} \quad (16)$$

### 3. 운동방정식 및 경계조건

#### 3.1 기본가정

복합재료 보의 각 층은 동일한 두께를 가진 직교이방성 재료로서 선형 탄성적이며 서로 완벽하게 접착되어 있는 것으로 가정한다. 그리고 단면의 축방향 변위는 선형적으로 변화하는 것으로 가정하며, 횡 전단변형은 축방향 좌표만의 함수로 가정한다. 일반적으로 적층 복합재료 구조물은 적층방법에 따라 모든 방향의 운동이 연성되어 나타날 수 있으나 본 논문에서는 모든 층을 한 방향으로 적층하여 횡방향 굽힘과 축방향 인장운동이 연성되어 나타나는 복합재료 보를 대상으로 하였다.

#### 3.2 변위장

Fig. 1의 좌표계를 기준으로 FSDT (First Order Shear Deformable Theory)에 의한 변위장은 다음과 같다<sup>(7)</sup>.

$$u(x, y, z, t) = u_0(z, t) - y\phi(z, t) \quad (17.1)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(z, t) + x\phi(z, t) \quad (17.2)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(z, t) + y\theta_x(z, t) + x\theta_y(z, t) \quad (17.3)$$

여기에서  $u_0, v_0, w_0$  는 x, y, z방향의 병진변위 (translation)를 나타내고,  $\theta_x, \theta_y, \phi$ 는 x, y, z축 중심의 보 단면의 회전각(rotation)을 나타낸다.

#### 3.3 구성방정식

Fig. 1에서 일반적인 직교이방성 복합재료의 응력-변형률 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad (18)$$

Stress resultants와 stress couples는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{zz} \\ L_{zz} \\ L_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \\ K_{41} & K_{42} \\ K_{51} & K_{52} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad (19)$$

여기에서  $K_{ij}$ 는 A, B, D 행렬의 요소들로 표현되는 수정강성계수들이다.

#### 3.4 운동방정식 및 경계조건

각 각의 크랙은 회전스프링으로 연결되는 불연속면으로 고려하여  $i$  번째 크랙을 기준으로 보의 고정단 방향을  $i$  구간, 자유단 방향을  $i+1$  구간으로 설정하고 해밀톤 원리를 이용하여 운동방정식과 경계조건을 유도한다.

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} (\delta U - \delta K - \delta W_{nc}) dt = 0, \quad (20)$$

$$\delta v_0 = \delta \theta_x = \delta \phi = 0 \quad \text{at } t = t_0, t_1$$

여기에서 탄성변형에너지의 변분은 다음과 같다.

$$\delta U_i = \delta \left[ \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dx \right] = \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dx \quad (21)$$

운동에너지의 변분은 다음과 같다.

$$\delta K_i = - \int_0^L \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) \rho dy dx dz \quad (22)$$

자유진동문제에서 비보존력에 의한 가상일  $\delta W_{nc} = 0$  이다.  $i$  번째 크랙을 등가의 회전스프링 상수인  $K_{Ri}$  로 전환하면 크랙에 의한 추가적인 변형에너지 및 그 변분은 다음과 같다.

$$U_{si} = - \frac{1}{2} K_{Ri} [\theta_{y, i+1}(l_i) - \theta_{y, i}(l_i)]^2 \quad (23.1)$$

$$\delta U_{si} = -K_{Ri} [\theta_{y, i+1}(l_i) - \theta_{y, i}(l_i)] \delta \theta_{y, i+1}(l_i) + K_{Ri} [\theta_{y, i+1}(l_i) - \theta_{y, i}(l_i)] \delta \theta_{y, i}(l_i) \quad (23.2)$$

보의 전 구간에서의 변형에너지와 운동에너지의 변분은 다음과 같다.

$$\delta U = \sum_{i=1}^{n+1} \delta U_i + \sum_{i=1}^n \delta U_{si}, \quad \delta K = \sum_{i=1}^{n+1} \delta K_i \quad (24)$$

(20)식으로부터 x-z 평면상에서 각 구간별 운동방정식을 구하면 다음과 같다. ( $i=1, n+1$ )

$$\delta u_{oi}; a_{44}(\theta_{yi}' + u_{oi}'') - b_1 \ddot{u}_{oi} = 0 \quad (25)$$

$$\delta \theta_{yi}; a_{22}\theta_{yi}'' - a_{44}(\theta_{yi} + u_{oi}') - b_5 \ddot{\theta}_{yi} = 0 \quad (26)$$

여기에서

$$a_{22} = \int_{-b/2}^{b/2} K_{11} x^2 dx, \quad a_{44} = \int_{-b/2}^{b/2} K_{22} dx \quad (27.1-2)$$

$$b_1 = \int_{-b/2}^{b/2} \rho h dx, \quad b_5 = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 \rho h dx \quad (27.3-4)$$

그리고 보의 고정단, 자유단, 크랙위치에서의 경계조건 및 적합조건은 다음과 같다. ( $i=1, n$ )

$$\text{at } z=0, \quad u_{0i} = \theta_{y1} = 0 \quad (28)$$

at  $i$ -th crack  $z = l_i$ ,

$$\text{i) } u_{0i} = u_{0i+1}$$

$$\text{ii) } \theta_{y i+1} - \theta_{y i} = \frac{a_{22}}{K_{Ri}} \theta_{y i+1}' \quad (29.1-4)$$

$$\text{iii) } \theta_{y i+1} + u_{0i+1}' = \theta_{y i} + u_{0i}'$$

$$\text{iv) } \theta_{y i}' = \theta_{y i+1}'$$

$$\text{at } z=L, \quad \theta_{y n+1} + u_{0n+1}' = \theta_{y n+1}' = 0 \quad (30)$$

#### 4. 수치해석(엄밀해)

본 논문에서는 라플라스 변환법에 의한 엄밀해를 구하였다. 크랙이 있는 보의 각 구간에서 다음과 같은 동기운동(synchronous motion)의 해를 가정한다. ( $i=1, n+1$ )

$$[u_{0i}(z, t), \theta_{y i}(z, t)] = [U_{0i}(z), Y_i(z)] e^{j\omega t} \quad (31)$$

그리고 다음과 같이 무차원양을 정의한다.

$$\eta \equiv \frac{z}{L}, \quad c \equiv \frac{l_i}{L} \quad (32)$$

$$[u_{0i}(\eta, t), \theta_{y i}(\eta, t)] = [U_i(\eta), Y_i(\eta)] e^{j\omega t} \quad (33)$$

(25-30)식을 무차원화하면 다음과 같다.

$$Y_i' + U_i'' + \omega^2 f_1 U_i = 0 \quad (34)$$

$$Y_i'' - f_2(Y_i + U_i') + \omega^2 f_3 Y_i = 0 \quad (35)$$

무차원 경계조건 및 적합조건은 다음과 같다.

$$\text{at } \eta=0, \quad U_1 = Y_1 = 0 \quad (36)$$

$$\text{at } \eta = c_i, \quad U_i = U_{i+1}$$

$$Y_{i+1} - Y_i = \frac{a_{22}}{K_{Ri}L} Y_{i+1}' \quad (37.1-4)$$

$$Y_i + U_i' = Y_{i+1} + U_{i+1}'$$

$$Y_i' = Y_{i+1}'$$

$$\text{at } \eta=1, \quad Y_{n+1} + U_{n+1}' = Y_{n+1}' = 0 \quad (38)$$

여기에서

$$f_1 = \frac{b_1}{a_{44}} L^2, \quad f_2 = \frac{a_{44}}{a_{22}} L^2, \quad f_3 = \frac{b_5}{a_{22}} L^2 \quad (39.1-3)$$

식(34),(35)를 라플라스 변환하고 이에 식(36)을 대입하여  $\overline{U}_i(s), \overline{Y}_i(s)$ 를 구하고 이를 라플라스 역변환을 취하여 각각  $U_i, Y_i$ 를 구한 후 앞의 경계조건 식(37) 및 적합조건 식(38)을 적용하여 행렬식 형태로 정리하면 다음과 같다. ( $i=1, n$ )

$$[K]\{q\} = \{0\} \quad (40)$$

여기에서

$$[K]_{(4n+2) \times (4n+2)} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & \dots & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{i-2,1} & k_{i-2,2} & k_{i-2,3} & k_{i-2,4} & k_{i-2,5} & \dots & k_{i-2,4n+2} \\ k_{i-2,1} & k_{i-2,2} & k_{i-2,3} & k_{i-2,4} & k_{i-2,5} & \dots & k_{i-2,4n+2} \\ k_{i-1,1} & k_{i-1,2} & k_{i-1,3} & k_{i-1,4} & k_{i-1,5} & \dots & k_{i-1,4n+2} \\ k_{i,1} & k_{i,2} & k_{i,3} & k_{i,4} & k_{i,5} & \dots & k_{i,4n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & k_{4n+1,4n-1} & k_{4n+1,4n} & k_{4n+1,4n+1} & k_{4n+1,4n+2} & \dots & 0 \\ 0 & k_{4n+2,4n-1} & k_{4n+2,4n} & k_{4n+2,4n+1} & k_{4n+2,4n+2} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\{q\}_{(4n+2) \times 1} =$$

$$[U_1' \ Y_1' \ U_2 \ Y_2 \ U_2' \ Y_2' \ \dots \ U_i \ Y_i \ U_i' \ Y_i' \ \dots \ U_{n+1} \ Y_{n+1} \ U_{n+1}' \ Y_{n+1}']^T$$

여기에서  $i$ 를 포함하는 행렬의 첨자가 모두 양의 값일 경우에만 허용하며 중복항은 생략한다. 식(40)에서  $\det [K] = 0$ 을 만족하는  $\omega$ 의 값들이 고유진동수이며 각 고유진동수에 대응되는 벡터  $\{q\}$ 를 구하여  $U_i(\eta), Y_i(\eta)$  식에 대입하면 모드형상을 구할 수 있다.

#### 5. 해석 및 고찰

본 논문에서 수치해석결과를 비교 고찰하기 위해 사용한 복합재료는 Graphite-fiber reinforced polyimide로 물성치는 다음과 같다<sup>(8)</sup>.

$$E_m = 2.756 \text{ Gpa}, \quad E_f = 275.6 \text{ Gpa}, \quad \nu_m = 0.33$$

$$\nu_f = 0.2, \quad G_m = 1.036 \text{ Gpa}, \quad G_f = 114.8 \text{ Gpa}$$

$$\rho_m = 1600 \text{ kg/m}^3, \quad \rho_f = 1900 \text{ kg/m}^3$$

그리고 보의 길이  $L=1$  m, 단면의 폭  $h=0.05$  m, 높이  $b=0.025$  m 이다.

### 5.1 크랙의 수량 및 위치가 다양한 경우

Fig. 2는 동일 깊이의 단일 크랙이 다양한 위치에 있는 경우와 2-5개의 다중 크랙이 분포되어 있을 때 적층각에 따른 1, 2차 및 3차 고유진동수의 변화를 구한 결과이다. 크랙 깊이가 동일한 경우 적층각  $0^\circ \sim 40^\circ$  사이에서는 크랙의 위치나 수량에 관계없이 거의 동일한 고유진동수를 보이며, 적층각이  $40^\circ$  이상에서는 크랙에 의한 고유진동수의 변화경향의 차이가 발생하고, 그 경향은 고유진동수 차수에 따라 다르게 나타난다.

Fig. 2a의 1차 고유진동수에서는 크랙의 수량이 많아질수록 고유진동수 감소가 더욱 크게 나타나고 있으며, 단일 크랙이 있는 경우와 비교할 경우 크랙의 수량보다는 위치가 중요한 요소임을 알 수 있다. 그러나 Figs. 2b, c의 2, 3차 고유진동수에서는 단일 크랙이 있는 경우보다 다중 크랙이 있는 경우의 고유진동수 감소가 적은 경우도 발생하지만, 다중 크랙이 있는 보에서는 보다 많은 크랙을 가진 경우가 보다 적은 크랙을 가진 보의 위치를 모두 포함할 경우에는 진동 차수에 관계없이 항상 고유진동수 감소가 더 크게 나타남을 알 수 있다. 이는 단일 크랙에 대한 연구<sup>3)</sup>에서도 고찰하였듯이 진동 차수에 따른 모드형상과 크랙 위치의 상관관계에 의해서 결정되기 때문으로 판단된다. 이와 같은 관계를 살펴보기 위해 Fig. 3에 적층각이  $90^\circ$  인 경우 다중 크랙 보의 횡방향 변위  $u$ 에 관한 1, 2 및 3차의 모드형상을 단일 크랙인 경우와 비교하여 나타내었다. 크랙의 숫자가 증가할수록 진폭이 증가하고 고차의 모드로 갈수록 크랙 위치에서 찌그러짐 현상이 발생하며, node와 antinode의 위치도 변화하는 현상을 관찰할 수 있다. 또 크랙이 antinode에 근접하여 있을수록 모드형상에서 보다 심한 변화가 나타나지만 node에 인접한 크랙은 모드형상의 변화에 거의 영향을 주지 않는다.

Fig. 4는 5개의 크랙이 앞에서와 마찬가지로 동일 위치에 존재하는 경우 크랙 깊이와 적층각 사이의 관계변화를 나타낸다. 1, 2, 3차의 고유진동수 변화 형태가 거의 유사하기 때문에 2차의 경우에 대해서만 나타내었다. 크랙과 섬유방향 사이의 각이 커질수록 크랙 깊이가 깊어짐에 따라 고유진동수가 급격하게 감소함으로써 크랙 깊이 변화에 대해 섬유 방향은 고유진동수에 대단히 민감하게 작용함을 알 수 있다.

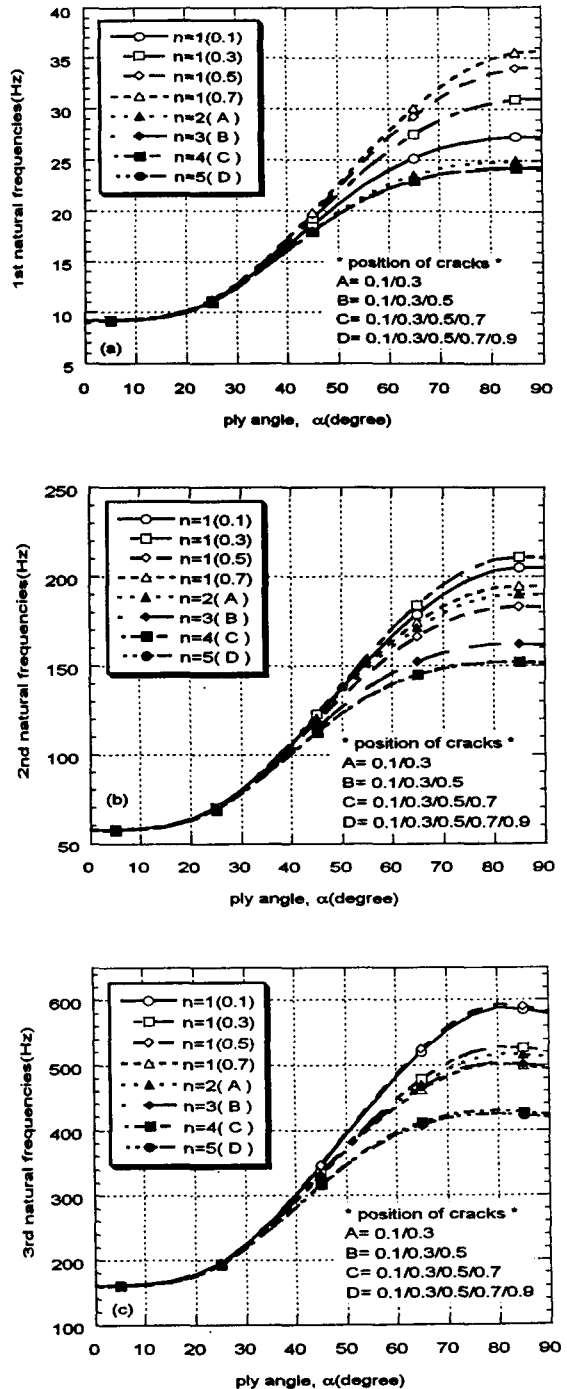


Fig. 2 Variation of the natural frequencies with ply angle for different crack numbers and positions ( $\bar{a}_f=0.2$ ,  $c_f=0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ ,  $\nu_f=0.5$ )

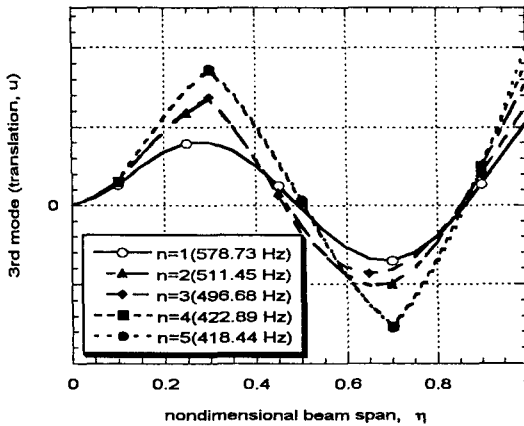
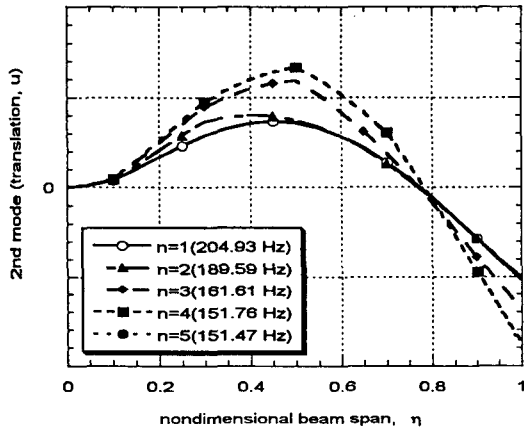
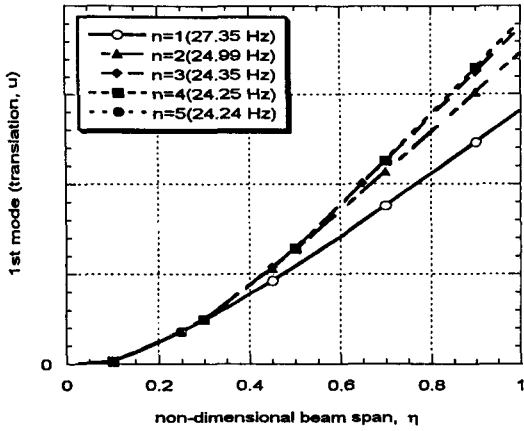


Fig. 3 First three mode shapes for different crack numbers and positions ( $\bar{a}_i=0.2$ ,  $c_i=0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ ,  $\nu_f=0.5$ )

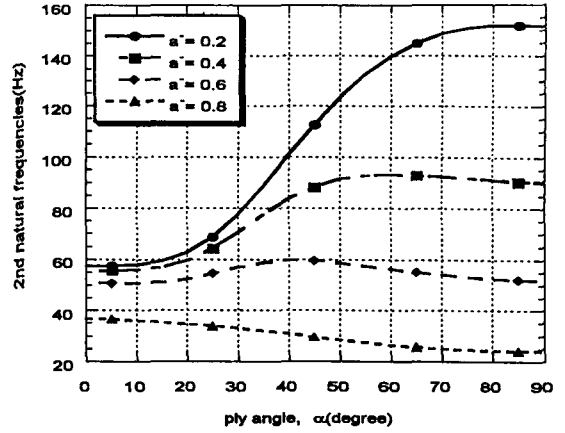


Fig. 4 Variation of the 2nd natural frequencies with ply angle for different crack depths ( $n=5(D)$ ,  $c_i=0.1/0.3/0.5/0.7/0.9$ ,  $\nu_f=0.5$ )

5.2 집중된 다중 크랙의 위치가 변화하는 경우 Fig. 5는 여러 개의 크랙이 일정범위 안에 집중된 형태로 존재하며 위치가 변화하는 경우, 섬유각 변화에 따른 고유진동수의 변화를 나타낸다. 1, 2, 3차의 고유진동수의 변화 경향이 모두 다르게 나타나므로 앞에서도 설명한 바와 같이 모드 형상을 함께 관찰하는 것이 바람직하며 섬유각이 90° 인 경우에 대해서 Fig. 6에 모드형상을 나타내었다. Fig. 5에서 고유진동수 감소가 크게 나타나는 것은 Fig. 6의 모드형상에서 크랙으로 인해 진폭이 커지고 크랙부위에서 형상의 찌그러짐이 두드러지기 때문이다. 여기에서도 2, 3차 모드에서 다중 크랙이 antinode에 인접해 있을수록 모드형상의 찌그러짐이 심하고 반대로 node에 인접할수록 그 영향이 작아짐을 알 수 있다.

### 5.3 섬유 체적비에 따른 고유진동수의 변화

Fig. 7은 크랙이 없는 경우와 다양한 숫자의 일정한 깊이의 크랙이 분포되어 있는 복합재료 보에서 섬유 체적비가 변화할 때 나타나는 고유진동수의 변화이다. 섬유 체적비의 증가에 따라 고유진동수도 함께 증가하나 크랙의 개수와 위치에 따라 차이가 난다. 또 5.1절에서 고찰한 바와 유사한 형태로 고유진동수의 차수에 따라서도 차이를 보이는데 이 또한 모드형상과 연계된 크랙의 위치가 가장 중요한 역할을 함을 알 수 있다.

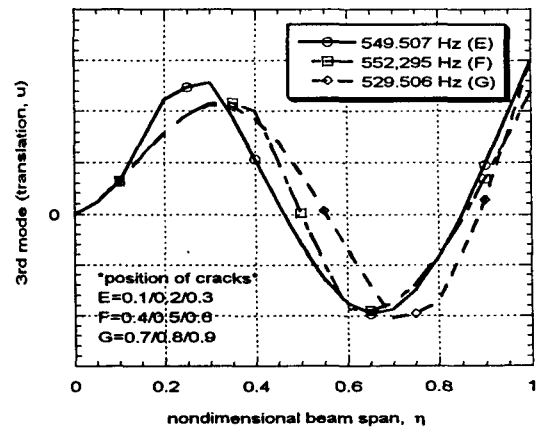
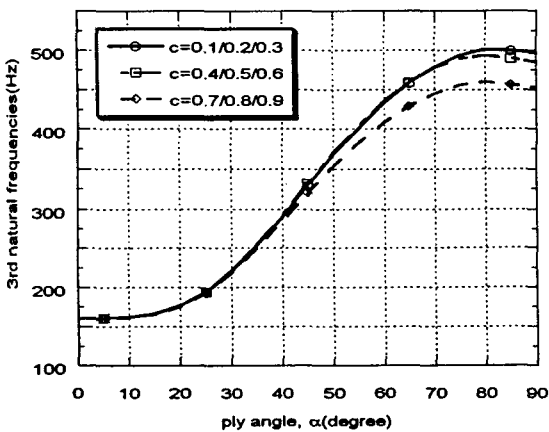
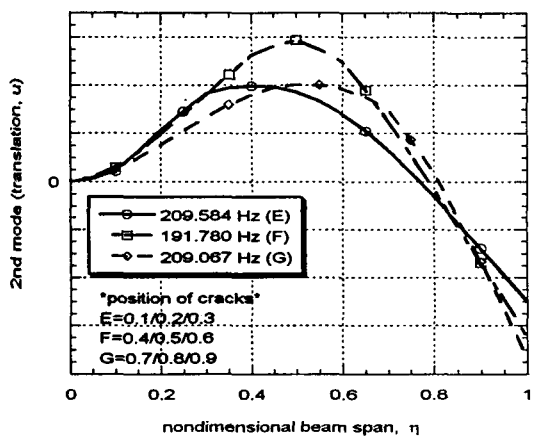
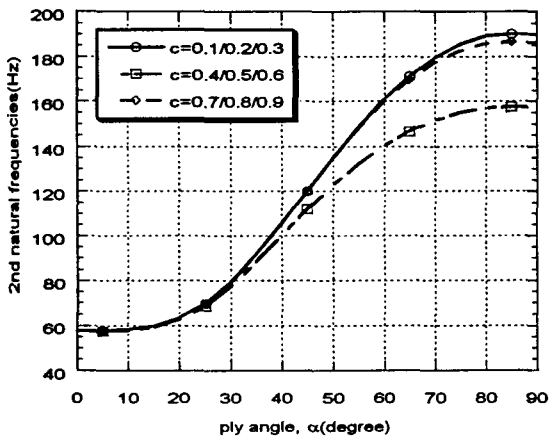
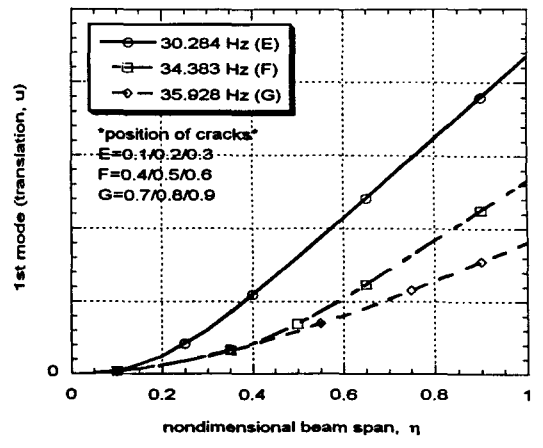
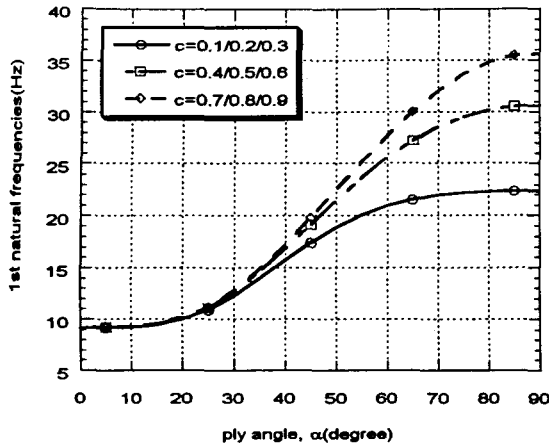


Fig. 5 Variation of the natural frequencies with ply angle for congregated cracks at different positions ( $\bar{a}_i=0.2$ ,  $\nu_f=0.5$ )

Fig. 6 First three mode shapes for congregated cracks at different positions ( $\bar{a}_i=0.2$ ,  $\nu_f=0.5$ ,  $\alpha=90^\circ$ )



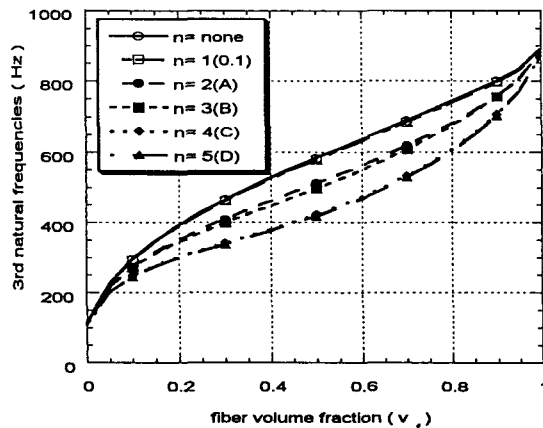
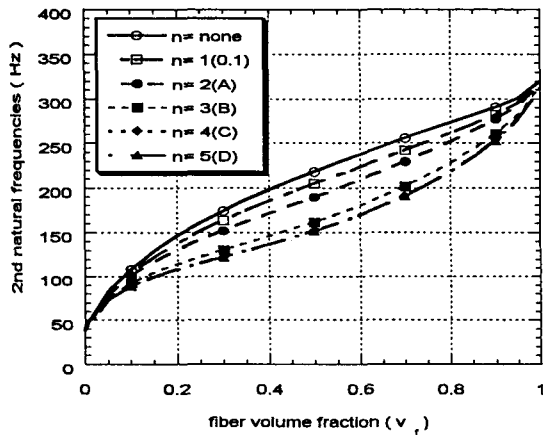
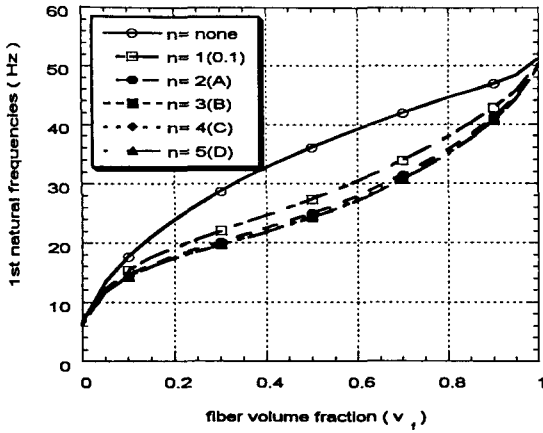


Fig. 7 Variation of the natural frequencies with fiber volume fraction for different crack numbers and positions ( $\bar{a}_i=0.2$ ,  $\alpha=90^\circ$ )

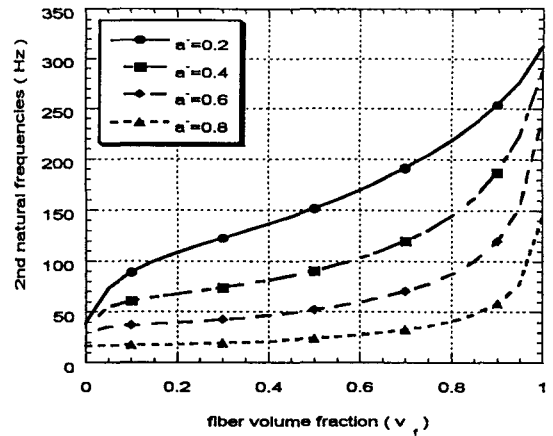


Fig. 8 Variation of the 2nd natural frequencies with fiber volume fraction for different crack depths ( $n=5(D)$ ,  $\alpha=90^\circ$ )

Fig. 8은 5개의 크랙이 분포된 보에서 크랙의 깊이가 일정하게 증가할 때 나타나는 2차 고유진동수 변화를 보여주며, 여기에 나타내지는 않았지만 1, 3차 고유진동수에서도 이와 대단히 유사한 경향을 보여준다. 복합재료 보에서는 크랙 깊이가 증가할 때 섬유 체적비가 고유진동수 감소에 많은 영향을 미치는 것을 알 수 있다.

#### 5.4 회전각의 모드형상

Fig. 9는 앞에서 설명한 Fig. 3의 병진변위  $u$ 의 모드형상에 대응하는 회전각  $\theta$ 의 모드형상을 나타낸다. 크랙부위에서 회전각의 불연속 구간이 명확하고 위치에 따른 크기의 차이로 고유진동수 변화에 미치는 영향을 알 수 있다.

## 6. 결 론

다중 횡방향 개구형 크랙이 다양하게 분포되어 있는 복합재료 외팔보에 파괴역학적 접근을 통하여 크랙을 등가 회전스프링로 모델링하여 지배방정식을 유도하고 수치해석을 수행하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 다중 크랙이 있는 복합재료 보에 대해서도 파괴역학 이론에 의한 크랙의 모델링과 Timoshenko 보 이론에 의한 운동방정식 및 경계 조건의 유도가 가능하였다.

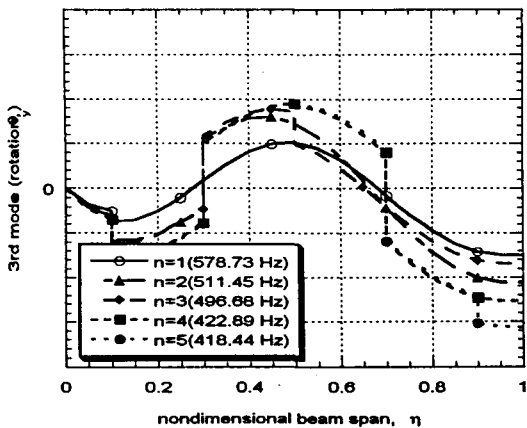
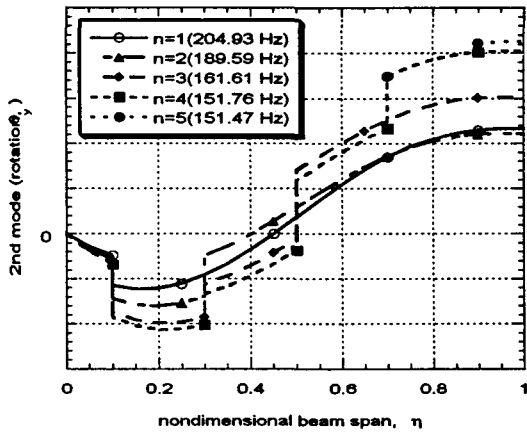
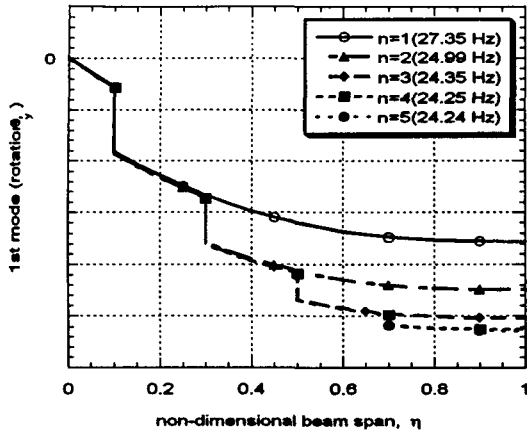


Fig. 9 Rotational mode shapes for the different crack numbers and positions

( $\bar{a}_i=0.2$ ,  $c_i=0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ ,  $\nu_f=0.5$ )

2) 다중 크랙이 보의 길이 방향으로 수량, 위치 및 깊이가 다양하게 분포되어 있는 경우에 진동 차수에 따라 고유진동수 변화 경향이 달라지며 크랙의 위치와 깊이에 따른 모드형상의 변화를 통하여 그 원인을 분석할 수 있음을 보였다.

3) 적층각, 섬유 체적비, 다중 크랙의 개수, 위치 및 깊이에 따른 고유진동수 및 모드형상의 변화를 폭넓게 해석적으로 예측함으로써 자유진동 특성을 이용하여 보다 현실적으로 복합재료 구조물의 건전성을 판단하고 손상을 예측할 수 있는 비파괴검사(VBI)가 가능함을 보였다.

### 참고문헌

- (1) W. M. Ostachowicz and M. Krawczuk, 1991, "Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam", *Journal of Sound and Vibration* 150(2), pp.191-201.
- (2) A. S. Sekhar, 1999, "Vibration characteristics of a cracked rotor with two open cracks", *Journal of Sound and Vibration* 223(4), pp.497-512.
- (3) 하태완, 송오섭, 1999, "크랙이 존재하는 복합재료 보의 동적 특성 연구", *한국소음진동공학회지*, 제9권 5호, pp.101-110.
- (4) Melvin F. Kanninen and Carl H. Popelar, 1985, "Advanced Fracture Mechanics", *Oxford Univ. Press*, pp.397-399.
- (5) K. Nikpour and A.D. Dimarogonas, 1988, "Local compliance of composite cracked bodies", *Journal of Composite Science and Technology* 32, pp.209-223.
- (6) Z. Suo, G. Bao, B. Fan and T. C. Wang, 1991, "Orthotropy rescaling and implications for fracture in composites", *Int. J. Solids Structures* Vol. 28, No. 2, pp.235-248.
- (7) O. Song, 1991, "Modelling and response analysis of thin-walled beam structures constructed of advanced composite materials", Ph.D. Dissertation, *Virginia Polytec Institute and State University*.
- (8) M. Krawczuk and W. M. Ostachowicz, 1995, "Modelling and vibration analysis of a cantilever composite beam with a transverse open crack", *Journal of Sound and Vibration* 183(1), pp.69-89.