적응적 EWMA 피드백 공정 조정
-Adaptive EWMA Feedback Process Adjustment-

고용해*
이성철**
전상표***

Abstract

An important problem in process adjustment using feedback is how often to sample the process and when to apply an adjustment. Schemes designed to minimize the overall cost. The cost taken the frequency with which they require observations to be made, and the resulting overall length of time between adjustment. In this article, the process adjustment which is based on the adaptive EWMA forecasts are derived. An example is presented to improve confirm standard varation through the analysis of a data series.

1. 서론

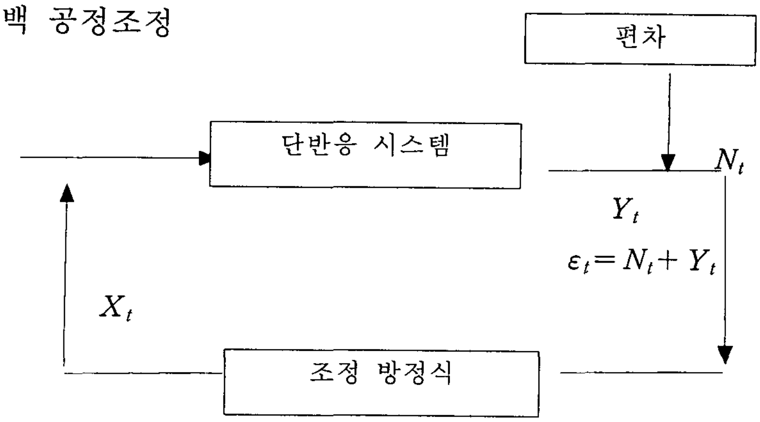
공정관리(Process control)를 통하여 공정향상을 하기위해 널리 사용되는 방법은 공학적 공정관리(EPC : Engineering process control) 과 통계적 공정관리(SPC: statistical process control)이다. 통계적 공정관리는 관리도(control chart)를 이용하여 공정에서 이상의 발생여부를 탐지하는 것이 주 목적이며, 반면에 공학적 공정관리는 공정특성치가 목표치에 가능한 한 가깝게 유지되도록 공정특성치에 영향을 미치는 조정 가능한 보정(compensatory) 변수를 공정조정(process control)하여 그 목적을 달성하려는 방법이다. 실제로, 이 두 방법은 같은 목적을 성취하기 위한 경쟁적 관계라기 보다는 품질향상을 위한 보완적 관계에 있다고 할 수 있고[Box와 Luceno(1997)], 또한 이 두 방법을 결합적으로 사용하여 품질을 개선하려는 방법이 소개되고 있다 [Baxley Jr.(1994), Tucker et al.(1992), Box 와 Kramer(1992)]. 공정조정 방법으로는 피드백(feedback), 피드포워드(feedforeward), 그리고 피드백-피드포워드 조정 등이 있는데, 본 논문에서는 피드백 조정 시스템 중에서 품질특성치에 미치는 보정변수 조정의 영향이 여러 시간에 걸쳐 나타나지 않고 공정의 단위시간에 그치는 단반응시스템을 연구의 대상으로 국한하였다. 피드백 공정조정(feedback process control) 에서 특성치를 목표치에 유지시키기 위해 흔히 EWMA 예측방법이 사용되고 있는데, 특히 무조정 편차(disturbance)가 IMA 과정을 따를 때 EWMA 예측에 의한 공정조정은 최적의 공정조

*명지전문대 공업경영과 교수 · **남서울대학교 교양학부 교수 · ***인하대학교 박사과정

정이 된다[Crowder et al.(1997), Box et al.(1997)]. 무조정편차에 대한 보정변수에 조절시 조절에 필요한 비용에 대한 문제가 발생하는데, 결과에 대한 편차(standard deviation)은 증가 해도, 총비용을 줄이기 위해, 조절하는 평균간격을 조절하는 제한된 피드백 조절 시스템(bounded feedback adjustment system) 제시 했다. [Box 와 Kramer(1992), Box와 Luceno(1997)] 이들의 제한에 의하면 평균조절간격(AAI: average adjustment interval), 조절간격은 감소 하고, 표준편차는 약간의 증가가 있다.
이들의 제한에 의하면 평균조절간격(AAI: average adjustment interval), 조절간격은 감소 하고, 표준편차는 약간의 증가가 있다.

본 논문 에서는 일반적 피드백 조절 시스템에서 최적으로 사용되는 평활상수를 매시점마다 평활 상수를 변화시키는 적응적평활상수 (adaptive smoothing constant)를 사용하여 EWMA 피트백 조절시 문제점을 개선하고, 적응성 있는 조절방법을 연구했다.

2. 단반응 피드백 공정조정



$$X_t = f(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots)$$

< 단반응 피드백 조정 >

2.1 용어 설명

N_t: 무조정시 목표치(T_0)로부터 벗어나는 품질특성치의 편차(disturbance)

X_t: 단위변화가 품질특성치의 g단위를 변화시키는 알려진 조정 가능한 입력/보정 변수

g : 변화의 크기를 나타내는 공정증가분(process gain)

Y_t: 조정 적용시 품질특성치의 값

ε_{t+1} : 시점 t 에서 보정이 있은 후 목표치로부터 편차

2.2 피드백 시스템

시점 t에서 보정변수(adjustment variable)가 X_t로 설정되었을 때, 시점 $t+1$에서 목표치로부터 벗어나는 품질특성치의 조정편차 ε_{t+1}는 다음과 같이 표현된다.

$$\varepsilon_{t+1} = Y_{t+1} - T_0 \tag{2.1}$$

시점 t 에서의 조정이 시점 $t+1$ 에서 반응이 일어나는 경우(단반응 시스템) 조정된 값은

$$Y_{t+1} = gX_t$$

가 된다 (g : process gain)

조절시 조정이 되지 않은 무조정편차를 N_{t+1} (disturbance) 라고 하면 식(2..1) 은

$$\varepsilon_{t+1} = gX_t + N_{t+1} \tag{2.2}$$

로 표현된다

시점 t에서 $t+1$시점의 무조정편차(N_{t+1})의 예측값과 예측오차를 각각 $\widehat{N}_t(1)$, $e_t(1)$ 라 할 때, 무조정편차는 $N_{t+1} = \widehat{N}_t(1) + e_t(1)$가 되고, 식(2.2)의 조정편차는

$$\varepsilon_{t+1} = gX_t + \widehat{N}_t(1) + e_t(1) \tag{2.3}$$

로 표현될 수 있다. 따라서, 시점 t에서의 보정변수 X_t 가

$$X_t = -\frac{1}{g}\widehat{N}_t(1) \tag{2.4}$$

로 설정될 때, 식(2.4) X_t 에의해 조절되여 식(2.3) 의 조정편차는 $\varepsilon_{t+1} = e_t(1)$가 된다. 즉 품질특성치의 목표값에서 벗어난정도가 무보정편차 N_{t+1}를 예측할 때 생기는 오차 $e_t(1)$ 와 같게 된다

식 (2.4)의 무보정편차의 예측치 $\widehat{N}_t(1)$가 현재와 과거의 무조정 편차들($\{N_j,\ j \le t\}$)들의 식으로 표현될 때, 식 (2.4)에 의해 피드백(feedback) 시스템으로 정의된다.

2.3 EWMA 피드백 조정

피드백 시스템의 시점 t에 조절변수에 대한 조절식 $X_t = -\frac{1}{g}\widehat{N}_t(1)$ 에서 시점 t에서 시점 $t+1$의 무조정 편차 N_{t+1}의 예측치 로 EWMA

$$\widehat{N}_t = \widehat{N}_t(1) = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j N_{t-j}$$

$$= \lambda(N_t + \theta N_{t-1} + \theta^2 N_{t-2} + \cdots),\quad \lambda = 1-\theta \tag{2.5}$$

를 사용되어 보정될 때, 시점 t 조정 방정식 $x_t = X_t - X_{t-1}$ 은 다음과 같이 된다

식(2.4) 의해

$$x_t = X_t - X_{t-1} = -\frac{1}{g}\widehat{N}_t(1) + \frac{1}{g}\widehat{N_{t-1}}(1)$$
$$= -\frac{1}{g}[\widehat{N}_t(1) - \widehat{N_{t-1}}(1)]$$

가 되고 식(2.5) 에 의해

$$= -\frac{1}{g}\lambda[N_t - \widehat{N_{t-1}}(1)]$$
$$= -\frac{\lambda}{g}e_{t-1}(1)$$

따라서 조절방정식(adjustment equation)은

$$x_t = X_t - X_{t-1} = -\frac{\lambda}{g}e_{t-1}(1)$$

가된다 여기서 $e_{t-1}(1) = \varepsilon_t$ 이면

$$x_t = X_t - X_{t-1} = -\frac{\lambda}{g}\varepsilon_t \tag{2.6}$$

가 된다 [Box et al. (1994)].

시점 t에서의 보정변수값 X_t의 조정 방정식은 식(2.6)

$$X_t - X_{t-1} = -\frac{\lambda}{g}\varepsilon_t$$

$$X_t = X_{t-1} - \frac{\lambda}{g}\varepsilon_t$$
$$= X_{t-2} - \frac{\lambda}{g}\varepsilon_{t-1} - \frac{\lambda}{g}\varepsilon_t$$
$$= X_0 - \frac{\lambda}{g}\varepsilon_1 - \frac{\lambda}{g}\varepsilon_2 - \cdots - \frac{\lambda}{g}\varepsilon_t$$
$$= X_0 - \frac{\lambda}{g}[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_t]$$
$$X_t = X_0 - \frac{\lambda}{g}\sum_{j=1}^{t}\varepsilon_j \tag{2.7}$$

과 같이 t시점까지의 ε_j들의 총합, 즉 총조절(total adjustment)이 된다

식(2.7)은

$$X_t = k_0 + k_I\sum_{j=1}^{t}\varepsilon_j \tag{2.8}$$

단 $k_0 = X_0$, $k_I = -\frac{\lambda}{g}$ 로 표현되는 공학적 공정관리 (EPC : engineering process control) 의 누적관리(integral control)에 해당되게 된다.

무조정 편차 계열(underlying disturbance process) N_t가 IMA(1,1) 과정,

즉

$$N_t - N_{t-1} = a_t - \theta a_{t-1}, \quad \text{단, } a_t \text{는 백색잡음과정}$$

을 따른다면, 식 (2.5)로 표현되된 평활상수 (smoothing constant)가 λ인 EWMA는 예측오차가 $e_{t-1}(1) = a_t$ 인 최소평균제곱오차예측치(MMSEF)가 되고, 또한 이에 따르는 누적관리식 (2.8) 은 $\varepsilon_t = a_t$를 만족하는 최적의 최소평균제곱오차(MMSE) 피드백 관리가 된다[Box et al.(1994), Box와 Lucceno(1997)].

3 제한적 피드백 시스템

시점 t에서 보정변수가 X_t가

$$X_t = -\frac{1}{g}\widehat{N}_t(1) \tag{3.1}$$

로 설정되었을 때,

시점 t에서 $t+1$시점 무조정 편차 N_{t+1}의 예측치로 EWMA

$$\widehat{N}_t = \widehat{N}_t(1) = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j N_{t-j}, \qquad \lambda = 1-\theta \tag{3.2}$$

가 사용되어 보정될 때, t시점 조정값 X_t 는 식 (1)에 의해

$$x_t = X_t - X_{t-1} = -\frac{\lambda}{g} e_{t-1}(1) = -\frac{\lambda}{g}\varepsilon_t \tag{3.3}$$

가 된다 [Box et al. (1994)]. 이 경우에, 식 (3)으로부터 시점 t에서의 보정변수값 X_t는 t시점까지의 ε_j들의 총합, 즉 총조정(total adjustment)이 되고, 따라서

$$X_t = X_0 - \frac{\lambda}{g}\sum_{j=1}^{t}\varepsilon_j \tag{3.4}$$

로 표현되는 조절시 매 시점에 따라 조절이 행하여 지므로 비용이 증가 하게 된다. 이때 매조절시 증가 하는 비용 문제를 고려하자

미리정한 한계 k값과 비교하여 . 이전에 조절한 값 X_r 과의 크기가 크거나 작으면 조절을 한다. 즉,

$$|X_t - X_r| \geq k$$

X_r : 시점 r 에서 조절된 값 , X_t : 현시점의 값

시 조정을 한다.

단반응 시스템의 경우 식(3.1) 에서

$$X_t - X_r = -\frac{1}{g}\widehat{N}_t(1) + \frac{1}{g}\widehat{N}_r(1)$$

$$X_t - X_r = -\frac{1}{g}[\ \widehat{N}_t(1) - \widehat{N}_r(1)\ ]$$

$$|X_t - X_r| = |\ \widehat{N}_t(1) - \widehat{N}_r(1)\ | \ge kg = L \qquad (3.5)$$

무조정편차 N_t는 조절된 품질특성치에서 목표값이 벗어난정도 로 해석 할수 있다

즉 $N_t = Y_t - T_0$ 따라서 $\widehat{N}_t(1) = \widehat{Y}_t(1) - T_0$ 이므로 식(3.5)는

$$|\ \widehat{Y}_t(1) - T - \widehat{Y}_r(1) + T\ | \ge kg = L$$

$$|\ \widehat{Y}_t(1) - \widehat{Y}_r(1)\ | \ge kg = L$$

여기서 예측치 $\widehat{Y}_t(1)$ 는 과거 자료들의 EWMA 추정치를 사용하면 즉

$$\widehat{Y}_t(1) = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j Y_{t-j}, \qquad \lambda = 1-\theta$$

$$= \lambda Y_t + \theta \widehat{Y_{t-1}}(1) \qquad (3.6)$$

가된다. 식 (3.6)의 평활상수가 λ 인 EWMA는 예측오차가 $e_{t-1}(1) = a_t$인 최소평균제곱오차예측치(MMSEF)가 되고, 또한 대응되는 누적관리는 최적의 최소평균제곱오차(MMSE) 피드백 관리보다는 오차가 증가 하지만 평균조절간격은 줄어서 총비용에 있어서는 감소하는 효과가 있다.

4 적응적 피드백 시스템

피드백 시스템에서의 최소평균제곱오차(MMSE) 피드백 관리는 평활 상수 $\lambda = 1-\theta$ 값에 영향을 받는다. 천체 제곱오차를 최소로 하는 적절한 평활상수에 대한 선택이 문제이고, 이선택이 전과정의 모든 시스템에 최적으로 작용한다고 가정할수도 없다.
평활상수 값을 매시점 마다 적응성(adaptive) 있게 조절하여, 어떤 시점에서 발생하는 이상원인에 대한 계속적인 영향을 최소화하고, 시스템을 안정되게 하여 전체적인 오차를 줄이기위한 시스템이다.

식 (3.6) 의 $\widehat{Y}_t(1) = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j Y_{t-j}, \ = \lambda Y_t + (1-\lambda)\widehat{Y_{t-1}}(1) \qquad \lambda = 1-\theta$

적응적 EWMA 식은

$$\widehat{Y}_t(1) = \lambda_t Y_t + (1-\lambda_t)\widehat{Y_{t-1}}(1)$$

시간에 따른 평활상수 λ_t 는

$$\lambda_t = \left| \frac{E_t}{M_t} \right|$$

이고, 여기서 E_t , M_t , e_t 는

$$E_t = \beta e_t + (1-\beta)E_{t-1}$$

$$M_t = \beta |e_t| + (1-\beta)M_{t-1}$$

$$e_t = Y_t - \widehat{Y}_t(1)$$

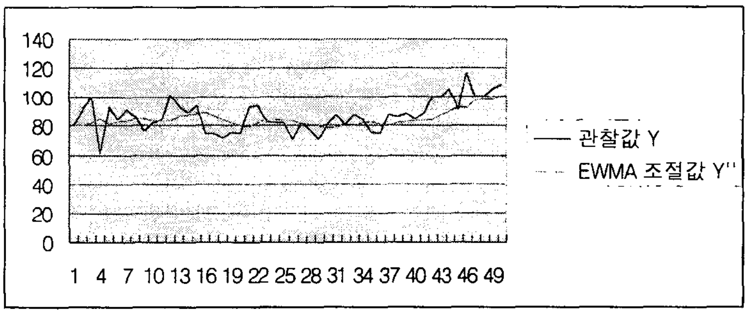
가 된다. 여기에 초기 조건으로

$\widehat{Y}_1(1) = Y_1$, $E_O = M_0 = 0$, $\beta = 0.2$, $\lambda_1 = 0.2$

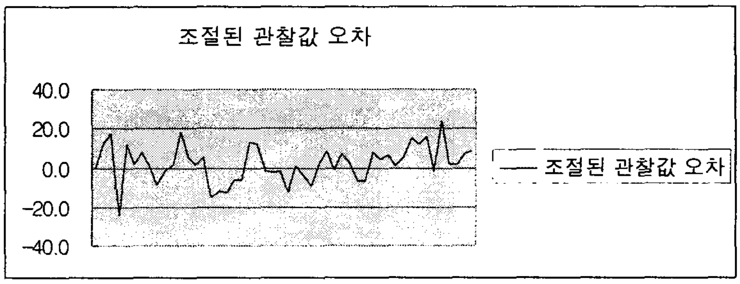
을 사용했다

5 적용사례

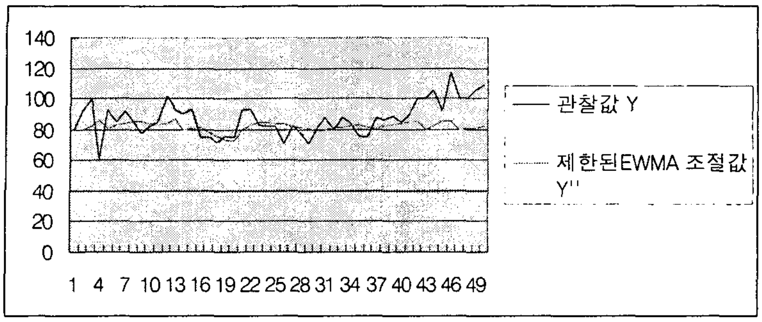
Box와 Luceno(1997)의 금속 필림 50개 자료을 이용하여 관찰값에 대한 EWMA 예측값을 이용한 조절 (그림1), 조절후 에러(그림2) 와 L=8 로 제한적 EWMA 적용시(그림3), 그 오차(그림4) , $\widehat{Y}_1(1) = Y_1$, $E_O = M_0 = 0$, $\beta = 0.2$, $\lambda_1 = 0.2$ 의 초기값을 가지는 적응적 EWMA 조절시(그림5), 그에 대한 오차(그림6). 그림7 과 그림 8에서 보는 것 처럼 적응적 방법은 연속적인 자료에 있어 초기값들에 있어 오차는 있지만 EWMA 와 제한적 EWMA 방법 보다 좋은 결과를 있다.



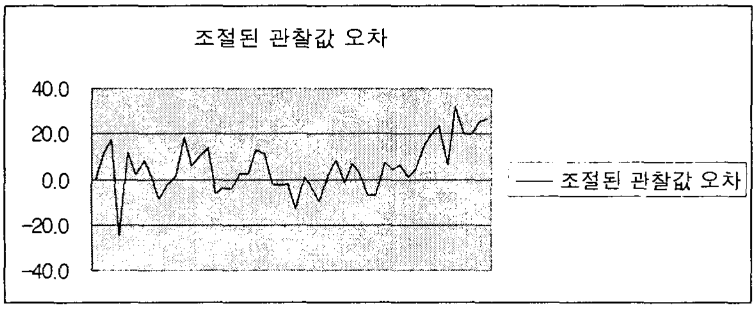
<그림1. EWMA 조절>



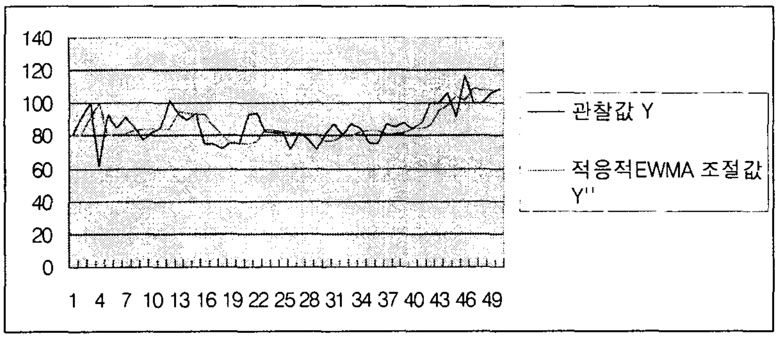
<그림2. EWMA 조절시 에러>



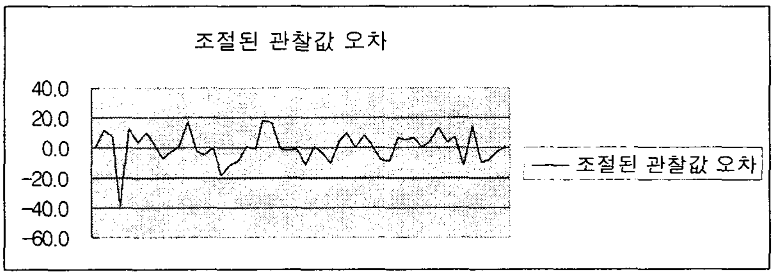
<그림3. 제한EWMA 조절 >



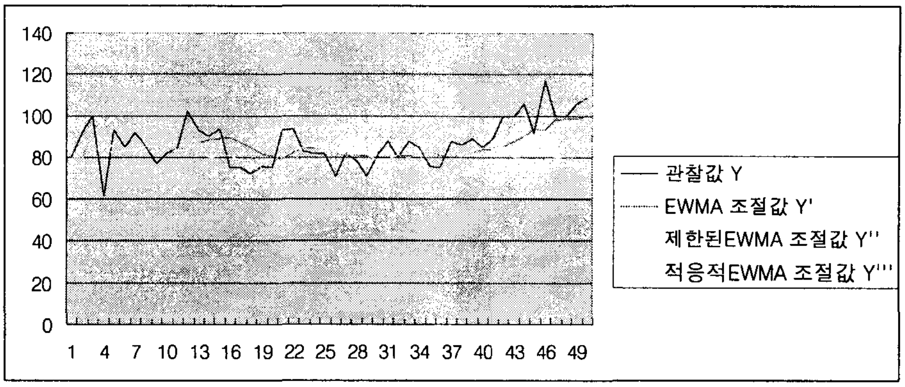
<그림4. 제한적 EWMA 시 오차>



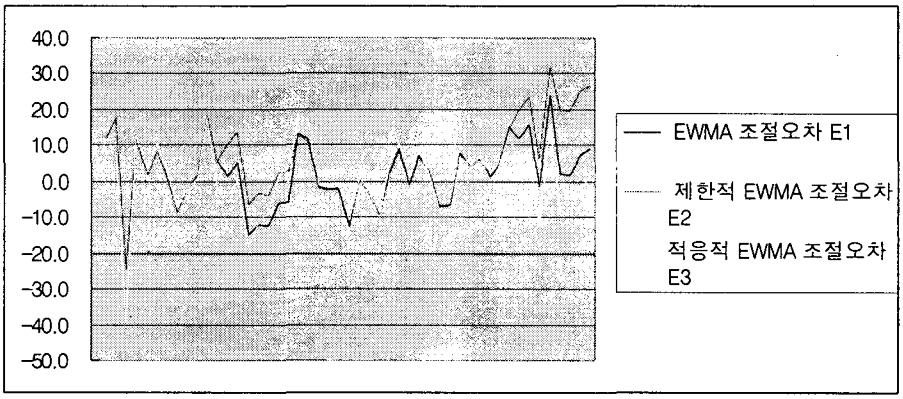
<그림5. 적응적 EWMA 조절>



<그림6. 적응적 EWMA 조절시 오차>



<그림7 세가지 방법의 비교>



< 그림8. 세가지 방법의 오차>

6. 결론

평활상수 $\lambda = 0.2$ 을 사용한 EWMA 보다, 제한적 ($L = 8$)을 사용한 EWMA 경우

AAI 는 평균적으로 14.1으로 줄었고, 표준편차는 11.1 로 EWMA 보다 7%의 증가를 가져왔다

적응적 평활상수를 사용하면 조절의 양은 증가하지만, 표준편차는 10.2 로 거의 변화가 없다. 그러나 적응적 평활상수는 초기값의 선택에 영향을 받으나 그 양은 미비한 것으로 나타났다

참고문헌

[1] Baxley, R.V., Jr.(1994), "Application of the EWMA for Algorithmic Statistical Process Control," *Quality Engineering*, Vol. 7, pp. 397-418.

[2] Box, G. E. P., Coleman, D. E., and Baxley, R., Jr. (1997), "A Comparison of Statistical Process Control and Engineering Process Control," *Journal of Quality Technology,* Vol. 29, No. 2, pp. 128-130.

[3] Box, G. E. P., Jenkins, G. M., and Reinsel, G. C. (1994), *Time Series Analysis, Forecasting, and Control*, 3rd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[4] Box, G. E. P. and Kramer, T. (1992), "Statistical Process Monitoring and Feedback Adjustment-A Discussion," *Technometrics,* Vol. 34, pp. 251-285.

[5] Box, G. E. P. and Luceno, A. (1994)," Selection of Sampling Interval and Action Limit for Discrete Feedback Adjustment " *Technometrics,* Vol. 36, pp. 369-378

[6] Box, G. E. P. and Luceno, A. (1997 A), *Statistical Control : By Monitoring and Feedback Adjustment*, John wiley & Sons, New York.

[7] Box, G. E. P. and Luceno, A. (1997 B)," Discrete Proportional -Integral Adjustment and Statistical Process Control " *Journal of Quality Technology,* Vol. 29, No. 3 pp. 248-260

[8] Crowder, S. V., Hawkins, D. M., Reynold M. R. JR., and Yashchin, E. (1997), "Process Control and Statistical Inference," *Journal of Quality Technology,* Vol. 29, No. 2, pp. 134-139.

[9] Tucker, W. T., Faltin, F. W., and Vander Wiel, S. A. (1993), "Algorithmic Statistical Process Control: An Elaboration," *Technometrics*, Vol. 35, pp. 363-375.