

비선형 구조물에 대한 이동 접근법(MMA)의 적용 Application of Method of Moving Asymptotes for Non-Linear Structures

진 경 욱*, 한 석 영**, 최 동 훈**

Keywords : MMA(이동 접근법), Local Approximation Function(국부 근사 함수),
Dual Function(이원 함수), Move Limits(이동 한계)

ABSTRACT : A new method, so called MMA(Method of Moving Asymptotes) was applied to the optimization problems of non-linear functions and non-linear structures. In each step of the iterative process, the MMA generates a strictly convex approximation subproblems and solves them by using the dual problems. The generation of these subproblems is controlled by so called 'moving asymptotes', which may both make no oscillation and speed up the convergence rate of optimization process. By contrast in generalized dual function, the generated function by MMA is always explicit type. Both the objective and behaviour constraints which were approximated are optimized by dual function. As the results of some examples, it was found that this method is very effective to obtain the global solution for problems with many local solutions. Also it was found that MMA is a very effective approximate method using the original function and its 1st derivatives.

1. 서론

지난 20여년 동안 새로운 알고리즘의 개발, 컴퓨터 계산 성능 향상 및 유한 요소법의 발전은 최적 설계 분야의 연구에 놀라운 발전을 가져왔다.

일반적인 구조물 최적화는 구조물의 재료, 단면 등을 설계 변수로 하여 응력, 변위 등의 구속조건을 만족하면서 구조물을 경량화 한다. 설계 변수로 구성된 구속조건은 일반적으로 비선형 음함수(implicit function)이므로 유한 요소 프로그램(finite element program)으로 얻은 정보를 사용하여 연속적인 양함수(explicit function)로 변

환한다.⁽¹⁾ 그러나 유한 요소 프로그램은 원천 코드(source code)를 제공하지 않으므로 설계자가 임의로 변경하기는 어렵다.

일반적으로 설계자는 계산 비용과 시간을 줄이기 위해 테일러 전개(Taylor series expansion)의 1차식을 사용하여 근사(approximation)한다. 이런 근사 기법의 하나인 연속 선형 근사 계획법(SLP)⁽²⁾은 초기에 개발된 것으로 심플렉스 방법(simplex method)을 적용하여 계산한다. 다음의 블록 선형 근사(CONLIN)⁽³⁾는 1차 미분 값이 양수인 경우는 변수를 직접, 음수이면 변수의 역수를 사용한다. 이 기법은 단면적이 설계 변수인 구조물에서는 변수의 역수를 사용하므로 적용하기에 유리하다. 이 방법은 보수(conservative) 근사를 채택하고 있어 구조물 최적화에 매우 좋은 수렴성을 보이고 있으나 함수가 너무 보수적이거

* 한양대학원 자동차공학과 대학원

** 한양대학교 기계공학부

나 충분히 그렇지 못한 경우에는 섭동하는 경우가 발생한다. 위의 방법들은 엄격한 볼록 함수(strictly convex function)를 생성할 수 없으며, 결과적으로 이원 함수(dual function)를 적용할 수 없다는 단점을 안고 있다.⁽⁴⁾⁻⁽⁵⁾ 이러한 단점을 해결하기 위해 국부 근사 기법 중 이동 접근법(MMA : Method of Moving Asymptotes)⁽⁶⁾이라는 근사 기법이 제안되었다.

이 기법은 이동 접근선을 사용하므로 국부해(local minimum)로 수렴하는 단점을 보완함과 동시에 수렴속도를 향상시킬 수 있다. 더 나아가 기존의 기법과는 달리 원 함수의 변수와 라그랑지 변수(Lagrange multiplier)와의 관계를 양함수로 명확히 표현하여 다양한 문제에 대해 적용할 수 있다.

본 연구에서는 이동 접근법을 기존의 트러스 구조물⁽⁷⁾ 및 국부 해가 많이 존재하는 비선형 구조물⁽⁸⁾의 최적 설계에 대해 적용하여 그 효율성을 검증하고자 한다.

2. 이동 접근법

한 점 또는 여러 점의 원 함수 값과 1차 도함수 값을 사용하여 현 설계점에 근접한 함수를 생성하는 근사는, 설계 변수 공간에 대해 국부, 중역(midrange), 광역(global) 근사 세 가지로 분류된다. 이 중 국부 근사 기법의 효율성이 우수한 것으로 알려져 가장 많이 적용되고 있다.⁽⁹⁾

본 연구에서 제안하는 이동 접근법은 국부 근사 기법의 하나로 함수 계산과 1차 도함수의 계산 과정이 매우 복잡한 구조물 최적화 문제에 대해, 안정적이며 연속적으로 해를 계산해 나갈 수 있다. 각 단계에서는 엄격한 근사 볼록 부분 함수를 생성하고, 수렴 속도를 높이기 위해 이동 접근선(moving asymptotes)을 도입한다. 이동 접근선 $L_j^{(k)}$, $U_j^{(k)}$ 에 대한 규정이 정립되어 있지는 않지만 일반적으로 다음과 같이 정의한다.

- (1) 최적화 과정이 섭동하는 경향이 있으면, 현 설계점에 근접한 이동 접근선을 정의한다.
- (2) 수렴 속도가 느리면, 현 설계점에서 멀리 떨어진 이동 접근선을 정의한다.

이에 따른 이동 접근선의 한 예를 들면,

- (a) 반복 횟수가 $k=0$ 또는 1인 경우,

$$\begin{cases} L_i^{(k)} = x_i^{(k)} - (\bar{x}_i - x_i) \\ U_i^{(k)} = x_i^{(k)} + (\bar{x}_i - x_i) \end{cases} \quad (1)$$

- (b) $k \geq 2$ 인 경우,

$$\textcircled{1} \frac{x_i^k - x_i^{k-1}}{x_i^{k-1} - x_i^{k-2}} < 0 \text{ 인 경우}$$

$$\begin{cases} L_j^k = x_j^k - s(x_j^{k-1} - L_j^{k-1}) \\ U_j^k = x_j^k + s(U_j^{k-1} - x_j^{k-1}) \end{cases} \quad (2)$$

$$\textcircled{2} \frac{x_i^k - x_i^{k-1}}{x_i^{k-1} - x_i^{k-2}} \geq 0 \text{ 인 경우,}$$

$$\begin{cases} L_j^k = x_j^k - (x_j^{k-1} - L_j^{k-1})/s \\ U_j^k = x_j^k + (U_j^{k-1} - x_j^{k-1})/s \end{cases} \quad (3)$$

이외에도 이동 접근선을 다르게 정의할 수 있으나, 본 연구에 있어서는 식 (1)~(3)을 사용한다. 이동 접근선의 정의에 따라 원 함수를 근사하면 다음과 같다.

minimize :

$$\tilde{f}^{(k)} = r_0^{(k)} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_{0i}}{U_i^{(k)} - x_i} + \frac{q_{0i}}{x_i - L_i^{(k)}} \right)$$

subject to :

$$\tilde{g}_j^{(k)} = r_j^{(k)} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_{ij}}{U_i^{(k)} - x_i} + \frac{q_{ij}}{x_i - L_i^{(k)}} \right)$$

$$\max \{x_i, \alpha_i^{(k)}\} \leq x_i \leq \min \{\bar{x}_i, \beta_i^{(k)}\}$$

$$\text{for } i=1, \dots, n \quad j=1, \dots, m \quad (4)$$

여기서,

$$p_{ij}^{(k)} = \begin{cases} (U_i^{(k)} - x_i^{(k)})^2 \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, & \text{if } \frac{\partial f_j}{\partial x_i} > 0 \\ 0, & \text{if } \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$q_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{if } \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \geq 0 \\ -(x_i^{(k)} - L_i^{(k)})^2 \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, & \text{if } \frac{\partial f_j}{\partial x_i} < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$r_i^{(k)} = f(x_i) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_i^{(k)} - x_i^{(k)}} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_i^{(k)} - L_i^{(k)}} \right) \quad (7)$$

그리고, $\alpha_i^{(k)}$, $\beta_i^{(k)}$ 는 불능이 되는 것을 방지

하기 위한 이동 한계(move limits)이다. 국부 근사법에서는 식 (8)처럼 설계점 x_i 에서의 함수 값과 1차 도함수 값은 같아야 한다.

$$\begin{cases} \tilde{f}_j^{(k)}(x_i) = f_j^{(k)}(x_i) \\ \partial \tilde{f}_j^{(k)} / \partial x_i = \partial f_j / \partial x_i \end{cases} \text{ at } x = x_i^{(k)} \quad (8)$$

또한 p_{ij} , q_{ij} 는 양수이며, $L_j^{(k)} < x_i^{(k)} < U_j^{(k)}$ 이므로 근사 함수의 2차 미분 값은 항상 0보다 크다. 즉, 1차 도함수에 상관없이 항상 엄격한 볼록 함수가 되므로 이원 함수를 적용할 수 있다. 만약 이동 접근선이 $L_j^{(k)} = -\infty$, $U_j^{(k)} = +\infty$ 이면 연속 선형 근사 계획법이 되고, $L_j^{(k)} = 0$, $U_j^{(k)} = +\infty$ 이면 볼록 선형 근사가 된다. 위에 기술한 이동 접근법의 계산 과정을 Fig. 1에 도식적으로 표현하였다.

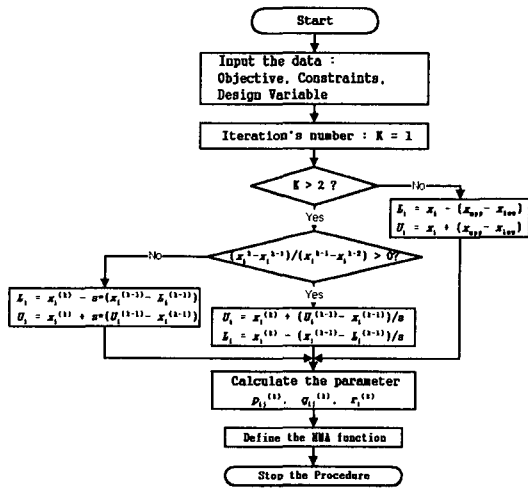


Fig. 1 Flowchart of the MMA Procedure

3. 이원 함수

이동 접근법으로 근사한 식은 볼록 함수이므로 효율적인 최적화를 위해 다음과 같은 이원 함수를 적용한다.

$$\begin{aligned} L &= (\tilde{f}_0 + \sum_i \tilde{f}_i) + \sum_j \lambda_j (\tilde{g}_{0j} + \sum_i \tilde{g}_{ij}) \\ &= r_0 - \lambda^T b + \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_{0i} + \lambda^T p_i}{U_i - x_i} + \frac{q_{0i} + \lambda^T q_i}{x_i - L_i} \right) \\ &= r_0 - \lambda^T b + \sum_{i=1}^n l_i(x_i, \lambda) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서, λ_j 는 라그랑지 변수이며, $l_i(x_i, \lambda)$ 는 다음과 같다.

$$l_i(x_i, \lambda) = \frac{p_{0i} + \lambda^T p_i}{U_i - x_i} + \frac{q_{0i} + \lambda^T q_i}{x_i - L_i} \quad (10)$$

모든 $\lambda_j \geq 0$ 에 대해 이원 문제의 목적함수 L_i 는 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} L_i(\lambda) &= \min_x \{ l(x_i, \lambda); \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i \text{ for all } i \} \\ &= r_0 - \lambda^T b + \sum_{i=1}^n l_i(\lambda) \end{aligned} \quad (11)$$

이동 접근법은 x_i 를 λ_j 의 함수로 표현한다.

$$x_i(\lambda_j) = \frac{(p_{0i} + \lambda^T p_i)^{1/2} L_i + (q_{0i} + \lambda^T q_i)^{1/2} U_i}{(p_{0i} + \lambda^T p_i)^{1/2} + (q_{0i} + \lambda^T q_i)^{1/2}} \quad (12)$$

따라서, L_i 는 λ_j 만의 함수가 된다.

$$\begin{aligned} L_i(\lambda) &= r_0 - \lambda^T b \\ &+ \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_{0i} + \lambda^T p_i}{U_i - x_i(\lambda_j)} + \frac{q_{0i} + \lambda^T q_i}{x_i(\lambda_j) - L_i} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)을 λ_j 로 미분을 하고, 구배(gradient)를 사용하여 최적화한다. 즉, $\partial L_i / \partial \lambda_j$ 가 계산되면 식 (12)를 통해 x_i 를 얻을 수 있으므로 식 (4)는 연속적으로 계산할 수 있다.

4. 구조물 최적 설계 예

4. 1. 4-바 트러스 문제

4-바 트러스 문제⁽⁷⁾는 Fig. 2에 보여지는 것과 같다. 설계 변수 x_i 는 i 번째 부재의 단면적이고, 목적함수는 최소 중량으로 하며, 각 방향으로 외력 $F_x = 44.5$ kPa, $F_y = 90$ kPa, $F_z = 267$ kPa가 가해진다. 구속조건은 응력과 변위에 대한 2가지 경우를 고려하는 데, 경우 ①에서는 오직 응력만을 고려하며, 경우 ②는 절점 1에 대한 z 방향으로의 변위를 구속조건으로 추가한다. 이 문제의 이동 접근선은 다음과 같이 정의된다.

(a) $k=0, k=1$ 인 경우,

$$L_j^{(k)}=0 \text{ and } U_j^{(k)}=5 \cdot x_i^{(k)}$$

(b) $k \geq 2$ 인 경우, 식 (2)~(3)을 적용한다.

모든 부재의 초기 단면적은 3.23 cm^2 이고, 계산에 필요한 데이터를 Table 1에 나타내었다. 또한, Table 2에 이동 접근법과 Ref.(7)에 대한 결과를 비교하였다.

Table 1 Data for the optimum of 4-bar truss

| Material | Aluminum |
|----------------------|--------------------------------------|
| Young's modulus | $E = 70 \text{ GPa}$ |
| Mass Density | $\rho = 2.77 \text{ g/cm}^3$ |
| Stress Limits | $\pm 170 \text{ Mpa}$ on all members |
| Lower Limits in Area | None |
| Upper Limits in Area | None |

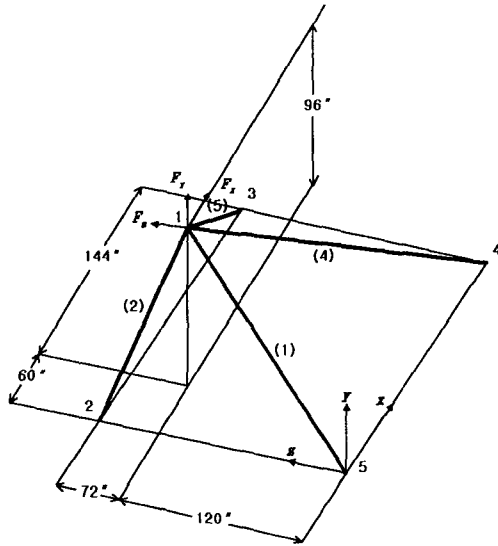


Fig. 2 4-bar Truss

Table 2 Results for 4-bar truss

| Case | Minimum Weight | Member areas | | | | |
|------|----------------|--------------|-------|--------|--------|--------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| ① | MMA | 316.19 | 5.238 | 9.071 | 10.508 | 0.000 |
| | Ref.(7) | 322.22 | 5.536 | 9.071 | 11.258 | 0.000 |
| ② | MMA | 562.18 | 0.000 | 23.908 | 5.101 | 15.397 |
| | Ref.(7) | 577.66 | 0.000 | 24.290 | 4.961 | 16.219 |

(Unit : weight[N], area[cm²])

4. 2. 기어 감속기 설계

Fig. 3의 기어 감속기⁽⁸⁾에 대한 설계 변수로는 치폭(x_1), 치 모듈(x_2), 피니언 치 갯수(x_3), 베어링 사이의 축 1, 2 길이(x_4, x_5), 축 1, 2 직경(x_6, x_7)을 고려하고, 구속조건으로는 기어 잇면의 굽힘응력(g_1), 표면응력(g_2), 전달력에 의한 축 1, 2 횡변형률(g_3, g_4), 축 1, 2의 응력(g_5, g_6) 및 각 계수들에 대한 비($g_7 \sim g_{11}$) 등이다.

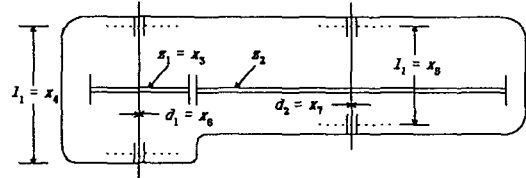


Fig. 3 Speed Reducer(Gear Pair)

이동 접근선은 4-바 문제와 동일하며, 각 식을 공식화하면 다음과 같다.

minimize :

$$f(\hat{x}) = 0.7854x_1x_2^2(3.3333x_3^2 + 14.9334x_3 - 43.0934) - 1.508x_1(x_6^2 + x_7^2) + 7.477(x_6^3 + x_7^3) + 0.7854(x_4x_6^2 + x_5x_7^2)$$

subject to :

$$g_1 = 27x_1^{-1}x_2^{-2}x_3^{-1} \leq 1,$$

$$g_2 = 397.5x_1^{-1}x_2^{-2}x_3^{-2} \leq 1,$$

$$g_3 = 1.93x_2^{-1}x_3^{-1}x_4^3x_6^{-4} \leq 1,$$

$$g_4 = 1.93x_2^{-1}x_3^{-1}x_5^3x_7^{-4} \leq 1,$$

$$g_5 = \left[\left(\frac{745x_4}{x_2x_3} \right)^2 + 16.9 \times 10^6 \right]^{0.5} / 0.1x_6^3 \leq 1100,$$

$$g_6 = \left[\left(\frac{745x_5}{x_2x_3} \right)^2 + 157.5 \times 10^6 \right]^{0.5} / 0.1x_7^3 \leq 850,$$

$$g_7 = x_2x_3 \leq 40,$$

$$g_8 = 5x_2 - x_1 \leq 0, \quad g_9 = x_1 - 12x_2 \leq 0,$$

$$g_{10} = (1.5x_6 + 1.9) \cdot x_4^{-1} \leq 1,$$

$$g_{11} = (1.1x_7 + 1.9) \cdot x_5^{-1} \leq 1,$$

$$2.6 \leq x_1 \leq 3.6, \quad 0.7 \leq x_2 \leq 0.8,$$

$$17 \leq x_3 \leq 28, \quad 7.3 \leq x_4 \leq 8.3,$$

$$7.3 \leq x_5 \leq 8.3, \quad 2.9 \leq x_6 \leq 3.9,$$

$$5.0 \leq x_7 \leq 5.5$$

Fig. 4는 반복 횟수에 따른 목적함수 값의 변화를 보이고 있고, Fig. 8은 구속조건의 위반 정도를 나타내었다.

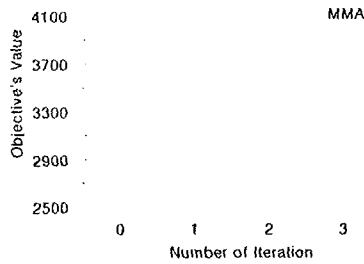


Fig. 4 Objective's value vs. number of iteration in speed reducer

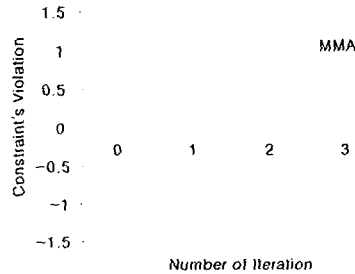


Fig. 5 Constraint's violation vs. number of iteration in speed reducer

4. 3. 용접보 설계

Fig. 6에 도시된 용접보 설계 문제⁽⁸⁾는, 구속 조건으로 용접 부분의 전단응력(g_1), 굽힘응력(g_2), 바에 대한 좌굴하중(g_3), 빔 끝 부분에 대한 변형량(g_4), 용접 부분의 높이와 용접 보의 폭의 제한(g_5)이고, 목적함수는 설치비용, 인건비 및 재료비용을 합하여 최소화하는 문제이다.

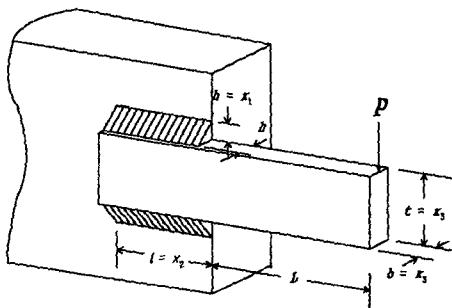


Fig. 6 Welded beam

설계 변수는 용접 부분의 폭과 높이(x_1), 길이(x_2), 용접 보의 높이(x_3), 용접 보의 폭(x_4)이며, 이를 공식화하면 다음과 같다.

minimize :

$$f(\vec{x}) = 1.10471x_1^2x_2 + 0.0481x_3x_4(14 + x_2)$$

subject to :

$$g_1 = \left\{ \frac{1}{2b_1b_2^2} + \frac{3(28+x_2)}{x_1^2x_2[x_3^2+3(x_1+x_3)^2]} + \frac{4.5(28+x_2)^2[x_2^2+(x_1+x_3)^2]}{x_1^2x_2^2[x-2^2+3(x_1+x_3)^2]^2} \right\}^{1/2} - \frac{13/6}{6} \leq 0$$

$$g_2 = \frac{1}{x_4x_3^2} - 0.05952 \leq 0$$

$$g_3 = 0.09267 - x_3x_4^2(1 - 0.02823x_3) \leq 0$$

$$g_4 = 8.7808 - x_3^2x_4 \leq 0, \quad g_5 = x_1 - x_4 \leq 0$$

$$0.125 \leq x_1 \leq 10, \quad 0.1 \leq x_2 \leq 10,$$

$$0.1 \leq x_3 \leq 10, \quad 0.1 \leq x_4 \leq 10$$

Fig. 7, Fig. 8은 각각 반복 횟수에 따른 목적함수 값과 구속조건 위반 정도를 나타내었다.

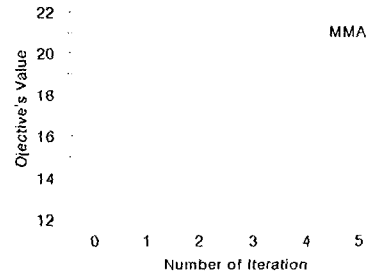


Fig. 7 Objective's value vs. number of iteration in welded beam

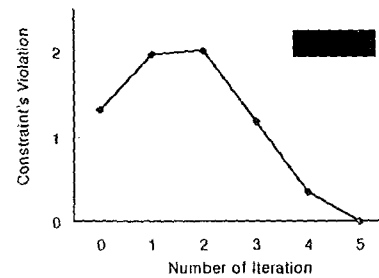


Fig. 8 Constraint's violation vs. number of iteration in welded beam

Fig. 7로부터 목적함수의 최종 값은 초기 값에 비해 증가했으나 Fig. 8로부터 초기점이 비가용영역(infeasible region)에서 점차 가용영역으로 수렴해 가는 것을 알 수 있다. 즉, 이것은 국부 최소 값에서 궁극적인 광역 값으로 수렴하고 있음을 의미한다.

5. 결론

이동 접근법을 트러스 및 비선형 구조물에 적용한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 트러스 구조물에서는 SLP에 비해 우수한 최적해를 구할 수 있다.
- (2) 비선형 구조물에 대해서는 섭동하지 않고 최적 해를 구할 수 있었으며 국부 해에 가까운 경우에도 광역 해 방향으로 수렴하는 것을 확인할 수 있었다.
- (3) 트러스 및 비선형 구조물의 대해 이동 접근법을 적용한 결과 매우 효율적임을 확인하였다.

참고문헌

- (1) J. F. Bathelemy, R. T. Haftka, "Approximation Concepts for Optimum Structural Design - A Review", *Structural Optimization*, Vol. 5, pp. 129-144 (1993)
- (2) J. E. Kelly, "The Cutting Plane Method for Solving Convex Programs", *Journal of SIAM*, Vol. VIII, No. 4, pp. 703-712, (1960)
- (3) V. Braibant, C. Fleury, "An Approximation Concept Approach to Shape Optimal Design", *Com. Methods in Applied Mech. and Eng.*, Vol. 53, pp. 119-148 (1985)
- (4) C. Fleury, "Structural Weight Optimization by Dual Methods of Convex Programming", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 14, pp. 1761-1783 (1979)
- (5) C. Fleury, V. Braibant, "Structural Optimization : A New Dual Method Using Mixed Variables", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 23, pp. 409-428 (1986)
- (6) K. Svanverg, "The Method of Moving Asymptotes-A New Method for Structural Optimization", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 24, pp. 359-373 (1987)
- (7) L. A. Schmit Jr., B. Farshi, "Some Approximation Concepts for Structural Synthesis", *AIAA*, Vol. 12, No. 5, 692-699 (1974)
- (8) S. S. Rao, 1996, *Engineering Optimization*, 3rd Ed., Wiley-Interscience
- (9) R. T. Haftka, Z. Gurdal, 1992, *Elements of Structural Optimization*, 3rd Ed., Kluwer Academic Publishers
- (10) A. D. Belegundu, J. S. Arora, "A Study of Mathematical Programming Methods for Structural Optimization. Part II : Numerical Results", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 21, pp. 1601-1623 (1985)
- (11) D. L. Logan, 1993, *A First Course in the Finite Element Method*, 2nd Ed., PWS Publishing Company