

### 2단 치차장치의 굽힘과 비틀림 진동에 관한 연구

### A Study on the Flexural and Torsional Vibration of Two Stage Gear System

정태형(한양대학교), 최정락, 이정상\*(한양대학교 대학원)

T. H. Chong(Hanyang Univ.), J. R. Choi, J. S. Lee(Hanyang Univ.)

#### Abstract

In this paper, dynamic behavior of a two stage gear train system is analyzed. This system consists of three shafts supported by ball bearing at the ends of them and two pairs of spur gear sets.

For exact analysis, the meshing tooth pair of gears is modeled as spring having time-dependent meshing stiffness and damping. The result of this analysis is compared to that of analysis using other model of spring having mean mesh stiffness.

The effect of the excitation force by the imbalance of a rotor of a motor on the vibration of a gear train system is also analyzed.

Finally, the change of a natural frequency of the whole system due to the change of an angle between three shafts is compared in each case, and from this analysis, the avoiding angle for design is advised.

#### 1. 서론

동력전달용 치차장치의 설계에서 가장 중요하게 고려되어야 하는 것은 전달하중에 대하여 충분한 강도를 갖도록 설계하는 것이다. 그러나, 최근 동력전달용 치차장치의 고속화·고부하의 요구가 증가하면서, 강도뿐만 아니라 진동 및 소음에 대한 중요성이 증대하고 있어, 그에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다<sup>(1)~(4)</sup>. 그러나, 기존의 연구들의 대부분은 1단치차장치를 대상으로 하고 있고, 2단 이상의 다단치차장치의 진동에 관한 연구는 상당히 미흡한 상태이며, 치차의 진동을 해석할 때 치를 평균물림강성을 갖는 스프링으로, 베어링을 강체로 모델링한 것이 대부분이다. 또한, 치차

물림부의 오차에 기인하는 진동뿐만 아니라 구동기등 외부로부터 유입되는 진동을 고려하여 전체 시스템의 동적 거동을 살펴볼 필요가 있다.

이에 본 연구에서는 동력전달용 2단 치차장치의 진동을 대상으로 하여, 치차 물림부분을 시변 스프링과 윤활막에 의한 댐퍼로, 베어링을 스프링으로 모델링하여 그 동적거동을 살펴보았다. 또한 치차장치를 구동하는 모터에 의해 발생하는 불균형력을 진동의 기진력으로 하여 이것이 치차장치의 진동에 미치는 영향을 해석하였으며, 2쌍의 치차가 물려있는 중간축에 대해 다른 2개의 축이 이루는 각도에 따른 고유진동수의 변화에 대해 살펴 보았다.

#### 2. 2단 치차계의 모델링

본 연구에서 대상으로 하고 있는 동력전달장치는 Fig. 1과 같이 양단이 볼베어링으로 지지되어 있는 3개의 축과 2개의 평치차쌍으로 연결된 2단 치차장치이다. 토크  $T$ 를 전달하는 2단 치차장치의 3개의 축은 비틀림에 대해서는 탄성체로 모델링하였고, 굽힘에 대해서는 그 길이가 축의 직경에 비해 충분히 짧으므로 강체로 모델링하였다.

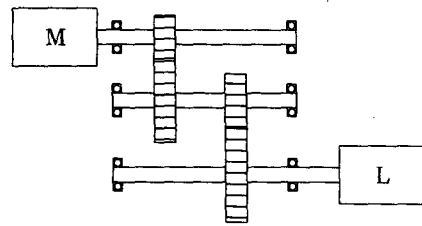


Fig. 1 2-stage gear system

치차물림부분은 Fig. 2와 같이 1쌍의 평치차가 맞물려 있는 치를 물림주기에 따라 주기적으로 변하는 물림강성  $K_p(t)$ 를 갖는 스프링과 윤활

막에 의한 감쇠계수  $C_g(t)$ 의 뎀퍼로 하고, 각각의 치차 본체를 작용선 방향으로 환산한 질량체로 한 진동계로 모델링하였다<sup>(1)</sup>.

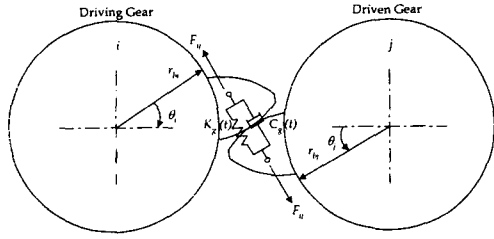


Fig. 2 Vibrational modeling of a pair of spur gear

### 3. 진동방정식

#### 3.1. 비틀림 진동

비틀림 진동에 대하여 치차  $i$ 와  $j$ 사이에 작용하는 전달법선하중  $F_{ij}$ 를 각 치차의 기초원 반경  $r_{in}$  ( $i=1\sim4$ )와 각 치차의 회전각  $\theta_i$  ( $i=1\sim4$ )의 함수로 정의하면, 식 (1)과 같이 된다.

$$F_{12} = K_{g1} \cdot (r_{i1}\theta_1 - r_{j2}\theta_2) + C_{g1} \cdot (r_{i1}\dot{\theta}_1 - r_{j2}\dot{\theta}_2) \quad (1)$$

$$F_{34} = K_{g2} \cdot (r_{i3}\theta_3 - r_{j4}\theta_4) + C_{g2} \cdot (r_{i3}\dot{\theta}_3 - r_{j4}\dot{\theta}_4)$$

여기서,  $K_g(t)$ 와  $C_g(t)$ 는 임의의 시간  $t$ 에서의 물림강성과 감쇠계수이며 식(2)와 같이 구한다<sup>(5)</sup>.

$$K_g(t) = x(\tau) \cdot \bar{K}_g$$

$$C_g(t) = 2\xi \cdot \sqrt{M \cdot \bar{K}_g(t)} \quad (2)$$

비틀림에 대한 진동방정식은 식 (3)과 같다<sup>(9)</sup>.

$$I_p \ddot{\theta} + K\theta + F_{ij}r = 0 \quad (3)$$

#### 3.2. 굽힘진동

굽힘 진동에 대하여 구동치차  $i$ 와 피동치차  $j$ 사이에 작용하는 전달법선하중  $F_{ij}$ 를 치차물림 부분의 전달법선하중방향으로의 변위와  $F_{ij}$ 가  $y$ 축과 이루는 각도  $\gamma_1, \gamma_2$ 의 함수로 정의하면, 식 (4)와 같다.

$$F_{12} = K_{d1} \left[ \frac{(x_1 + a_1\varphi_{1x}) - (x_2 - b_2\varphi_{2x})}{\sin \gamma_1} + \frac{(y_1 - a_1\varphi_{1y}) - (y_2 + b_2\varphi_{2y})}{\cos \gamma_1} \right] - C_{d1} \left[ \frac{(\dot{x}_1 + a_1\dot{\varphi}_{1x}) - (\dot{x}_2 - b_2\dot{\varphi}_{2x})}{\sin \gamma_1} + \frac{(\dot{y}_1 - a_1\dot{\varphi}_{1y}) - (\dot{y}_2 + b_2\dot{\varphi}_{2y})}{\cos \gamma_1} \right]$$

$$F_{34} = K_{d2} \left[ \frac{(x_2 + b_1\varphi_{2x}) - (x_1 - c_1\varphi_{1x})}{\sin \gamma_2} + \frac{(y_2 - b_1\varphi_{2y}) - (y_1 + c_1\varphi_{1y})}{\cos \gamma_2} \right] + C_{d2} \left[ \frac{(\dot{x}_2 + b_1\dot{\varphi}_{2x}) - (\dot{x}_1 - c_1\dot{\varphi}_{1x})}{\sin \gamma_2} + \frac{(\dot{y}_2 - b_1\dot{\varphi}_{2y}) - (\dot{y}_1 + c_1\dot{\varphi}_{1y})}{\cos \gamma_2} \right] \quad (4)$$

여기서,  $\varphi_{ix}, \varphi_{iy}$ 는  $i$ 번째 축이  $x, y$ 축을 중심으로 회전한 각도이며,  $a_i, b_i, c_i$ 는 Fig. 3에서 정의한바와 같다.

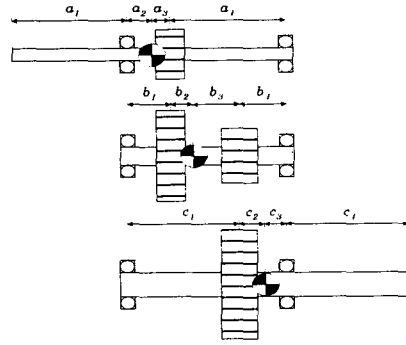


Fig. 3 Definition of notation

굽힘에 대한 진동방정식은, 식(5)와 같다<sup>(9)</sup>.

$$M\ddot{X} + C_x\dot{X} + K_xX + F_{ijx} = 0$$

$$I_d \ddot{\theta} + C_x a^2 \dot{\theta} + K_x a^2 X + C_x a \dot{X} + K_x b X + F_{ijx} c = 0 \quad (5)$$

$$M\ddot{Y} + C_y\dot{Y} + K_yY + F_{ijy} = 0$$

$$I_d \ddot{\theta} + C_y a^2 \dot{\theta} + K_y a^2 Y + C_y a \dot{Y} + K_y b Y + F_{ijy} c = 0$$

#### 3.3 구동기의 불균형력의 영향

모터 진동중 가장 일반적인 원인이 되는 회전자(rotor) 질량불균형(Imbalance)이 전체 시스템에 미치는 영향을 해석하기 위해 구동기를 Fig. 4와 같이 모델링 한다. 이상적으로 회전자의 회전중심과 질량중심이 일치한 경우는 모터의 토크  $T(t)$ 는 변동은 없고 일정하지만 실제의 경우는 Fig. 4와 같이 회전자의 회전중심과 질량중심이 일치하지 않고, 임의의 편심량  $e$ 만큼 반경방향으로 편심이 된다. 이 경우 모터는 식(6)과 같이 토크의 변동과  $x, y$  방향으로의 힘의 변동이 생긴다.

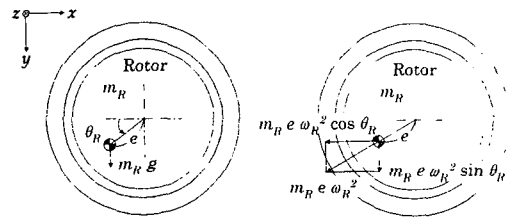


Fig. 4 Modeling of eccentric rotor for torsional & flexural vibration

$$T_e(t) = T_0 + e \cdot m_{Rg} \cdot \cos \theta_R$$

$$F_{fx}(t) = m_R \cdot e \cdot \omega_R^2 \cdot \cos \theta_R \quad (6)$$

$$F_{fy}(t) = m_R \cdot e \cdot \omega_R^2 \cdot \sin \theta_R$$

여기서,  $\theta_R = \omega_R t$  이다.

### 3.4 베어링강성의 추정

일반적으로 베어링은 하중이 작용할 때 처짐이 발생하므로, 로터시스템의 동적 거동을 명확히 하려면 베어링강성의 계산이 필요하다. 본 연구에서는, 구름 베어링에 대한 높은 정확도가 필요하지 않은 경우 강성의 근사값을 제공하기 위해 E. P. Gargiulo, Jr. 에 의해 개발된 방정식 중 깊은 홈 볼베어링이나 앵글러 볼베어링을 위한 식 (7)을 이용하여 베어링의 반경방향 스프링강성을 추정하였다<sup>(10)</sup>.

$$k = 0.0325 \times 10^6 \cdot \sqrt[3]{DF_z Z^2 \cos^5 a} \quad (7)$$

### 4. 진동의 해석

앞장에서 기술한 시스템에 대하여 Table 1~3의 제원을 가지고 전체 치차계의 진동방정식을 계산하였다. 치차계의 비틀림과 굽힘에 대한 고유진동수는 Table 4와 같고, 각각의 고유진동수에 대한 진동모드를 계산하여 진동의 형태를 관찰하면 Fig. 7, 그리고 Fig. 8과 같다.

Table 1 Dimensions of motor

		Motor
Power	[kW]	7.5
Rotational speed	[rpm]	1200
Torque	[N·m]	59.718
Weight of rotor	[N]	600
Diameter of rotor	[mm]	100

Table 2 Dimensions of shafts

	Shaft 1	Shaft 2	Shaft 3
Transmitted power	7.5	45	225
Rotational speed	1200	200	40
Length of shaft	285	200	285
Diameter of shaft	22	40	52
Bearing	6904ZZ	6207ZZ	6010ZZ

Table 3 Dimensions of gears

	Gear 1	Gear 2	Gear 3	Gear 4	
No. of teeth	24	144	20	100	
Module	[mm]	2	3.5	3.5	
Pitch circle dia.	[mm]	48	288	70	350
Base circle dia.	[mm]	45.105	270.632	65.779	328.892
Pressure angle	[deg]	20	20	20	20
Face width	[mm]	20	20	35	35
Mass	[kg]	0.2841	10.2276	1.0574	26.434
Equivalent mass	[kg]	0.161	5.791	0.599	14.968

Table 4 Natural frequency

	Torsional vibration [rpm]	flexural vibration [rpm]
1st	5360	30590
2nd	14320	36140
3rd	34820	41640

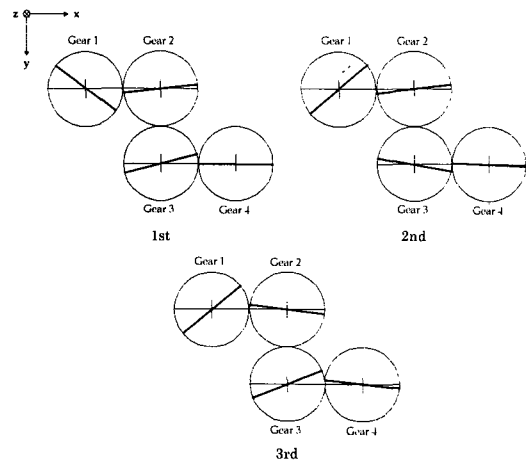


Fig. 5 Natural mode shape of torsional vibration

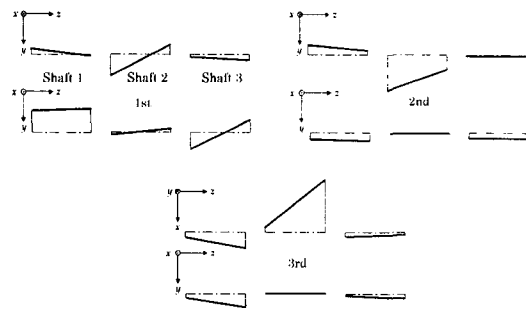


Fig. 6 Natural mode shape of flexural vibration

### 3.1. 치차물림부의 스프링강성과 감쇠의 영향

Fig. 7은 치차 1과 치차 2의 치차쌍의 물림주기에 대한 치차물림부분의 물림강성의 변화를 2주기동안 구한 것이다. 그림에서 보면 전술했던 바와 같이 치차쌍의 물림주기에 대한 물림강성은 1쌍 물림과 2쌍 물림을 반복하면서 계속해서 변화하는 것을 볼 수 있다. 이는 치차 3과 치차 4사이에서도 거의 동일하다.

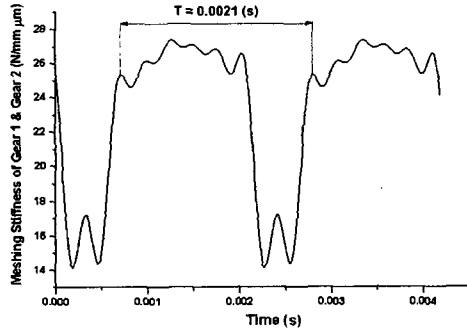


Fig. 7 Change of meshing stiffness of gear1 & gear2

Fig. 8과 Fig. 9는 물림부분의 감쇠를 고려하지 않았을 때, 비틀림과 굽힘 진동에 대한 강제진동을 해석한 것으로서, 시변 물림강성과 평균 물림강성이 진동에 미친 결과를 나타낸 것이다. 그림에서 실선은 시변 물림강성을 갖는 스프링으로 모델링한 경우이고, 파선은 평균 물림강성을 갖는 스프링으로 모델링한 경우이다.

그림에서 보면 평균 스프링강성을 갖는 스프링인 경우는 고유진동수에서의 변위만 증가하지만, 시변 물림강성을 갖는 스프링인 경우는 고유진동수 전후에서 큰 비선형성이 나타나는 것을 볼 수 있다.

Fig. 10과 Fig. 11은 시변 물림강성의 스프링인 경우, 물림부분의 감쇠를 고려했을 때와 감쇠를 고려하지 않았을 때를 비교한 것이다. 그림에서 굵은 실선은 감쇠가 없는 경우이고, 가는 실선은 감쇠가 있는 경우이다. 감쇠가 있을 때는 고유진동수 전후에서 나타나던 비선형성이 감소하고 변위도 감소하는 것을 볼 수 있다.

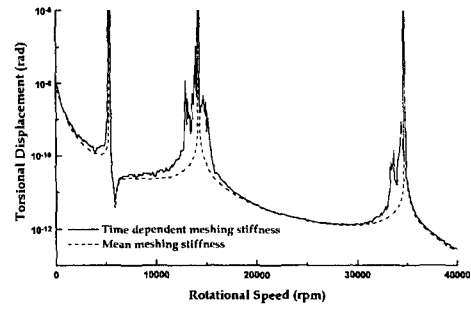


Fig. 8 The effect of the change of meshing stiffness on the forced torsional response without damping

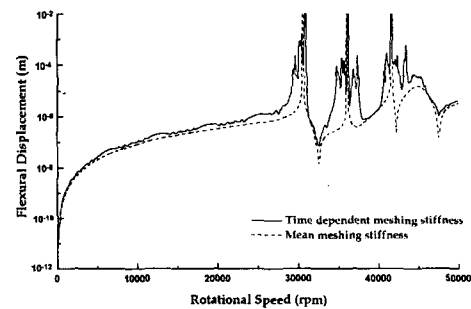


Fig. 9 The effect of the change of meshing stiffness on the forced flexural response without damping

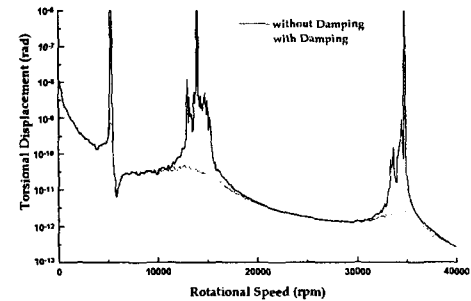


Fig. 10 The effect of the meshing damping on the forced torsional response

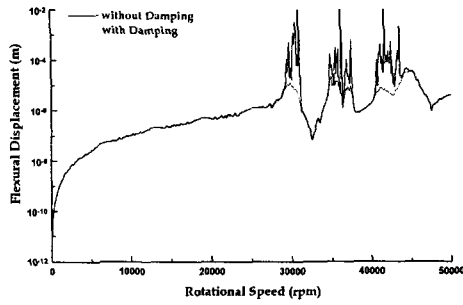


Fig. 11 The effect of the meshing damping on the forced flexural response

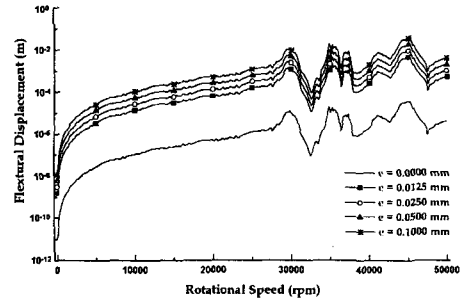


Fig. 13 The effect of the eccentricity of rotor on the forced flexural vibration with damping

### 3.2. 구동기의 불균형력의 영향

Fig. 12와 13은 비틀림과 굽힘에 대하여 치차 물림부를 시변 물림강성을 갖는 스프링과 댐퍼로 모델링한 경우에 있어, 모터 회전자 질량중심의 편심량  $e$ 를 0~0.1 mm 까지 변화를 시키면서 비틀림에 대한 강제진동의 응답의 변화를 본 것이다.

그림에서 편심량이 증가하면서 그 변위량도 증가하는 것을 볼 수 있다. 그런데, 편심량  $e$ 가 0.025 mm 일 때를 기준으로 하여 편심이 없을 때와 비교해 보면 상당히 큰 변위량의 차이를 볼 수 있지만 편심량  $e$ 가 0.1 mm 일 때는 편심량이 약 4배 증가했지만 그 변위량의 차이는 편심이 없는 경우에 비해 상당히 작다. 이것은 편심이 생긴 경우는 편심되지 않은 경우에 비해 상당한 변위를 발생시키지만, 일단 편심이 생기면 편심의 양에는 비교적 적게 관계한다는 것을 알 수 있다.

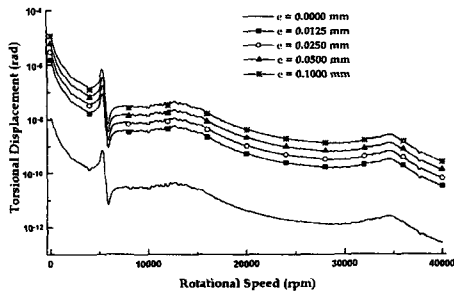


Fig. 12 The effect of the eccentricity of rotor on the forced torsional vibration with damping

### 3.3. 축각의 영향

1단 치차장치의 경우는 2개의 축이 항상 같은 평면에 존재하게 되지만 2단 치차장치의 경우에 축들은 임의의 각도로 배치시킬 수 있다. 이때, 각 치차쌍 사이의 전달법선하중의 크기는 변동이 없지만, 두 전달법선하중의 방향이 변하므로 베어링에 가해지는 분력의 크기에 변동이 생기고, 따라서 베어링의 스프링강성이 변한다.

이런 변동이 전체 치차장치에 미치는 영향을 보기 위해, Fig. 14와 같이 2단 치차계의 3개의 축이 이루는 각도, 즉 축 1과 축 2가 이루는 평면과 축 2와 축 3이 이루는 평면 사이의 각을  $\delta$ 로 정의한다. 그림에서 해칭된 3개의 원은 각 치차가 있는 축을 나타내며, 각 치차의 피치원을 2점 쇄선으로 표시했다.

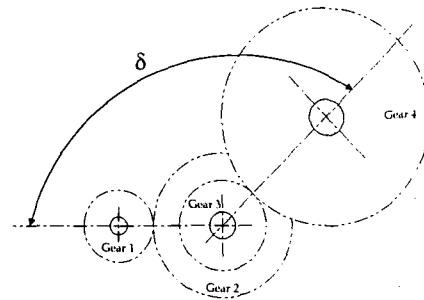


Fig. 14 Definition of the shafts angle  $\delta$

두 축이 이루는 각도에 따른 베어링 스프링 강성의 변화를 고려해서, 축 1과 축 2가 이루는

평면을 기준으로 각도  $\delta$ 를  $15^\circ$  간격으로 증가시키면서 전체 시스템의 1~3차 고유진동수의 변화를 Fig. 15에 나타내었다. 그림에서 보면, 3개의 축이 이루는 각도  $\delta$ 가  $90^\circ \sim 150^\circ$  인 경우와  $300^\circ \sim 360^\circ$  부근에서 1차 고유진동수가 다른 각도에 비해 다소 낮은 회전속도에서 나타나는 경우가 있는 것을 볼 수 있는데, 이것은 치차 1과 2의 치차쌍과 치차 3과 4의 치차쌍 사이의 두 전달법선하중의 합력의 크기의 변화로 베어링의 강성이 감소했기 때문이다.

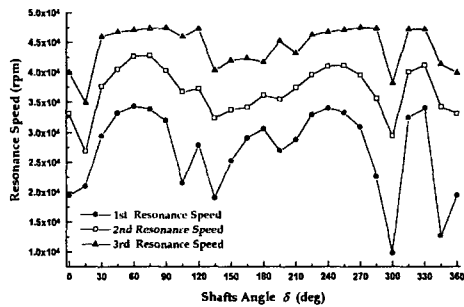


Fig. 15 The effect of the shafts angle  $\delta$  on the resonance speed

## 5. 결론

동력전달용 2단 치차장치의 진동특성에 대하여 해석한 결과 다음의 사항을 명확히 할 수 있었다.

1) 치차물림부분을 좀더 정확하게 해석하기 위해 물림강성이 물림주기에 따라 변하는 시변스프링으로 모델링한 결과 상당 물림강성을 갖는 스프링으로 모델링하던 기존의 연구 방법에서는 나타나지 않았던 비선형성이 고유진동수 부근에서 나타났으며, 물림부의 감쇠를 고려했을 때는 이러한 비선형성과 변위가 감소하였다.

2) 구동기 회전자의 질량불균형이 2단 치차계의 진동에 미치는 영향을 해석한 결과 질량중심이 회전중심에서 편심이 되면, 편심 되지 않은 경우에 비해 상당한 변위를 발생시키지만, 편심량에 대한 변위량의 변화는 상대적으로 크지 않았다.

3) 3개의 축들이 이루는 각도에 따른 고유진동수의 변동을 본 결과, 두 전달법선하중의 합력이 감소하는  $90^\circ \sim 150^\circ$  부근과  $300^\circ \sim 360^\circ$  의

부근에서 1차 고유진동수가 상당히 낮아지는 경우가 발생하였다. 따라서, 2단 이상의 동력전달용 치차장치를 설계하거나 구동할 때는 이런 각도의 영향을 고려해야 시스템의 진동성능을 향상시킬 수 있다.

## 참고문헌

- (1) UMEZAWA, Kiyohiko, 1982, “齒車の振動・騒音とその対策”, 機械設計, Vol. 26, No. 3, pp. 37~42.
- (2) IIDA, TAMURA, KIKUCHI, and AGATA, 1980, “齒車軸の曲げとねじりの連成振動 (第1報)”, Transactions of the JSME, Vol. 46, No. 404, pp. 375~382.
- (3) IWATSUBO, ARII, and KAWAI, 1983, “齒車で連結されに回轉軸の曲げねじり連成振動”, Transactions of the JSME, Vol. 49, No. 442, pp. 929.
- (4) Kahraman, A., 1993, “Effect of Axial Vibration on the Dynamics of a Helical Gear Train”, Transactions of the ASME Journal of Vibration & Acoustics, Vol. 115, pp. 33~39.
- (5) 정태형, 명재형, “헬리컬 치차의 접촉상태와 치차성능추정법에 관한 연구”, 대한기계학회논문집, Vol. 22, No. 10, pp. 1884~1893(1998. 10)
- (6) IIDA, TAMURA, and YAMAMOTO, 1986, “Dynamic Characteristics of a Gear Train System with Softly Supported Shafts”, Bulletin of JSME, Vol. 29, No. 252, pp. 1811~1816.
- (7) IIDA, TAMURA, and OONISHI, 1985, “Coupled Torsional-flexural Vibration of a Shaft in a Geared System”, Bulletin of JSME, Vol. 28, No. 245, pp. 2694~2698.
- (8) Kahraman, A., 1994, “Dynamic Analysis of a Multi-Mesh Helical Gear Train”, Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 116, pp. 706~712.
- (9) William, W. S., 1964, “Mechanical Vibration”, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill
- (10) Gargiulo, E. P., Jr., 1980, “A Simple Way to Estimate Bearing Stiffness”, Machine Design, pp. 107~110.