

## 미소변형률 조건에서의 비선형성에 대한 탄소성 구성모델

### An Elasto-Plastic Constitutive Model for the nonlinearity at Small Strain Conditions

오세봉<sup>1)</sup>, Seboong Oh, 권기철<sup>2)</sup>, Gi-Chul Kweon, 김동수<sup>3)</sup>, Dong-Su Kim

<sup>1)</sup> 영남대학교 토목공학과 조교수, Assistant Professor, Dept. of Civil Eng., Yeungnam Univ.

<sup>2)</sup> 동의대학교 토목공학과 전임강사, Assistant Professor, Dept. of Civil Eng., Dongeui Univ.

<sup>3)</sup> 한국과학기술원 토목공학과 부교수, Associate Professor, Dept. of Civil Eng., KAIST

**SYNOPSIS** : An elasto-plastic constitutive model was proposed, in which the behavior at small-to-large strain level can be modeled. From a mathematical approach it was proved that the model includes the previous successful models. The experimental results of a series of resonant column tests, torsional shear tests and triaxial tests were verified and as a result the proposed model could predict small-to-large strain behavior more consistently and accurately than the hyperbolic model and the Ramberg-Osgood model for a weathered granitic soil.

**Keywords** : elasto-plasticity, anisotropic hardening rule, small-to-large strain, shear modulus

## 1. 서론

지반재료의 구성관계는 재하조건(동적시험 및 정적시험)이나 변형률 수준(미소변형률 및 대변형률)에 따라 접근방법이 상이하게 연구되어 왔다. 미소변형률 영역에서의 비선형거동을 고려하는 모델은 매우 제한된 경우에 적용 가능하고, 대변형률을 고려한 모델과의 효과적인 결합이 어려운 실정이다. 실제 공용상태에서 지반이 경험하는 변형률 크기 범위에서의 합리적인 변형 해석을 위해서는, 미소변형률 조건 뿐만 아니라 파괴규준을 포함하는 대변형률 조건시의 거동을 동시에 포함할 수 있는 구성모델이 요구되고 있다.

지반동력학적 관점에서 볼 때 지반재료의 전단시험시 시료에서 일어나는 간극수압 및 유효응력이 현장조건과 동등하다고 가정하여 배수조건을 고려하지 않는 것이 일반적이다. 이는 연약지반 안정해석시 적용되는 전응력개념과 일치한다(Holtz and Kovacs 1981). 그리고 전응력개념에 의거한 구성관계는 강도 및 변형계수에 따라 지층을 세분하면, 응력해석에 실용적으로 적용될 수 있다.

본 연구에서는 미소변형률에서 대변형률까지의 거동을 모델할 수 있는 비등방 경화규칙에 의거한 탄소성 모델을 개발하는데 목적이 있다. 따라서 제안된 구성모델은 일반 등방경화규칙에 근거한 비등방 경화규칙을 채택하였으며(Lee and Oh, 1995), Mises 형태의 파괴규준을 채택하여 전응력 개념을 토대로 개발하였다.

## 2. 비등방경화 탄소성 구성모델

이승래와 오세봉(1995)은 일반 등방경화규칙 (*generalized isotropic hardening rule*)을 제안하여, 상동응력  $\xi_{ij}$ 를 응력원점뿐만 아니라 임의의 응력상태에서 선정하여 재료의 비등방성을 표현할 수 있도록

하였다(그림 1). 그림 1 (a)와 (b)에 나타나는 재하 및 역재하의 과정에서, 항복면은 각각의 재하과정에 상응하는 상동중심에 대하여 등방경화한다. 이 때의 응력-변형률 관계는 그림 1 (c)에 도시하였듯이 상응하는 비선형 관계를 유발한다. 특히 역재하시에는 새롭게  $\xi_{ij}$ 를 생성시키고, 이  $\xi_{ij}$ 에 대하여 항복면들이 등방경화함으로써 역재하과정에서 유발되는 소성유동을 표현할 수 있다.

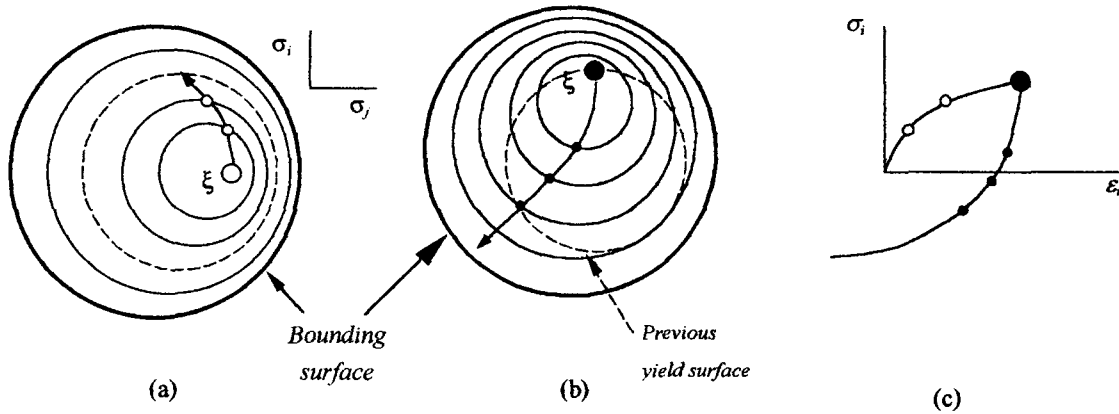


그림 1 일반 등방경화에 의거한 비등방 경화규칙

내부변수  $\xi_{ij}$ 는 연속적인 재하과정에서는 변화하지 않지만 하중방향이 급격히 변화하는 경우에만 변하는 변수로 가정한다. 그리고 그림 1에서 보여지듯이 경계면(bounding surface)의 크기와 위치는 일정하다고 가정한다. 경계면과 항복면은 일반적인 응력장에 대하여 다음 식으로 나타난다.

등방압축상태에서 삼축시험이나 비틀전단시험등을 수행하는 경우에는  $\Pi$ 면에서 응력원점으로부터 방사적인 응력경로를 나타낸다. 이 경우에 경계면과 항복면은 다음과 같이 단순화할 수 있다.

$$F = (\bar{q} - b)^2 - R^2 = 0 \quad (1)$$

$$f = (q - \beta)^2 - r^2 = 0 \quad (2)$$

여기서  $q = \sqrt{1.5 s_{ij} s_{ij}}$ 로 삼축시험조건에서는  $q = \sigma_1 - \sigma_3$ 이다. 그리고  $b, \beta$  및  $R, r$ 은 각각  $q$ 축상에 나타나는 경계면과 항복면의 중심 및 크기를 나타낸다.

항복면의 크기가 소성축차변형률에 의하여 지배된다고 가정하였다.

$$\hat{\epsilon}_q^b = a \frac{(r/R)^b}{(1 - r/R)^c} \quad (3a)$$

$$\hat{\epsilon}_q = \sqrt{2/3} \{ (\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})^2 + (\epsilon_{yy} - \epsilon_{zz})^2 + (\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx})^2 + 3/2 (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \}^{1/2} \quad (3b)$$

여기서 소성 축차변형률  $\hat{\epsilon}_q^b = \int d\hat{\epsilon}_q^b$  이고 적분범위는 하나의 역재하 과정 내에서 규정된다. 계수  $a, b$  및  $c$  는 경화함수에 사용되는 재료계수들이다.

소성 변형률중분 텐서는 관련유동규칙에 의하여 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$d\epsilon_{ij}^b = \frac{1}{H} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} d\sigma_{pq} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4)$$

$$\text{여기서 } H = -\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \hat{\epsilon}_q} \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \hat{\epsilon}_q} \frac{\partial f}{\partial q}$$

따라서 탄소성 응력-변형률 관계식은 다음과 같이 유도할 수 있다 (오세봉 1999).

$$dq = 3G_i \left\{ 1 - 3G_i \left( \frac{\partial f}{\partial q} \right)^2 / \overline{H} \right\} d\hat{\epsilon}_q \quad (5)$$

여기서  $\overline{H} = 3G_i f_q^2 + H$ ,  $G_i = G_{\max}$  = (초기) 탄성전단계수

제안된 탄소성 구성모델이 미소변형률에서 대변형률까지의 거동을 표현할 수 있는 근거를 기존의 대표적 구성관계와 비교하여 수학적으로 검증하고자 한다. 이를 위하여 미소변형률뿐 아니라 1%이상의 대변형률에 대한 거동에도 적용되는 쌍곡선 모델과 미소변형률 거동에 널리 통용되는 Ramberg-Osgood 모델을 비교 대상으로 하였다. 삼축압축시험에서 쌍곡선 모델(Konder, 1963; Hardin and Drnevich, 1972)은 다음과 같은 식으로 나타난다

$$q = \frac{\hat{\epsilon}_q}{a_b + b_h \hat{\epsilon}_q} \quad (6)$$

여기서 계수의 역수  $1/a_b$ 는 초기(접선) 변형계수이고  $1/b_h$ 는 축차응력의 최대값  $q_{\max}$ 를 나타낸다. 이 때 항복면 크기비  $r/R = q/q_{\max} = b_h q$ 이므로 식 (3)은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\hat{\epsilon}_q = \frac{a_b}{b_h} \frac{r/R}{1 - r/R} \quad (7)$$

이 때 탄성변형률  $\epsilon_a^e = q/E = a_b q = \frac{a_b}{b_h} \frac{r}{R}$ 이므로

$$\hat{\epsilon}_q = \frac{a_b}{b_h} \frac{(r/R)^2}{1 - r/R} \quad (8)$$

이다. 따라서 식 (3)은 계수  $a = a_b/b_h$ ,  $b = 2$ ,  $c = 1$ 일 때 쌍곡선 모델과 일치하게 되므로 쌍곡선 모델을 포함하는 함수라고 할 수 있다.

Ramberg-Osgood 모델은 다음과 같이 나타난다.

$$\hat{\epsilon}_q = q/3G_{\max} + m (q/3G_{\max})^n \quad (9)$$

여기서 전단계수  $G = E/2(1+\nu)$ 이다.  $\hat{\epsilon}_q^e = q/3G_{\max}$ 이고 등방압축시  $r/R = q/q_{\max}$ 이므로

$$\hat{\epsilon}_q^p = \frac{m}{(3G_{\max}/q_{\max})^n} (r/R)^n \quad (10)$$

따라서 식 (3)은 계수  $a = m/(3G_{\max}/q_{\max})^n$ ,  $b = n$ ,  $c = 0$ 일 때 Ramberg-Osgood 모델과

일치하게 되며, Ramberg-Osgood 모델을 포함하는 함수라고 할 수 있다.

### 3. 국내 화강풍화토 시험에 대한 검증

본 연구에서는 대전시 금고동 쓰레기 매립장 비탈사면의 화강풍화토 시료에 대하여 제안된 모델의 유용성을 검증하였다. 대상 지역에서 불교란시료를 채취하여 공진주시험 (RC), 비틀전단시험 (TS), 그리고 LDT를 사용한 정적삼축압축시험(TX)을 실시하였다. 시험에 사용된 장치, 시험절차 등은 김동수 등 (1997)의 논문에 상세히 기술되어 있다.

등방압축 조건하에서 수행한 시험결과들을 분석하기 위하여 식 (3)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi = \hat{\epsilon}_q^b (1 - q/q_{max})^c = a (q/q_{max})^b \quad (11)$$

따라서 계측된  $\phi$ 와  $q/q_{max}$ 를 대수축에 나타내면 계수 a, b를 결정할 수 있다. 단 계수 c는 가정하여  $\phi$ 와  $q/q_{max}$  관계가 대수축하에서 선형적으로 나타날 수 있도록 하여야 하는 데 경험적으로 0.3-0.4 정도의 값을 나타낸다.

삼축압축시험(TX)은 자연함수비 상태의 시료에 대하여 수행하였으며 횡변위를 계측하지 않았으므로  $\hat{\epsilon}_q \approx 2(1 + \nu)\epsilon_o/3$ , Poisson 비는 0.25로 가정하였다. 미소변형률 조건에서는 이러한 가정이 실제 거동과 별 차이를 보이지는 않으리라고 여겨진다. 그리고 비틀전단시험(TS), 공진주시험(RC) 결과에서 나타난 전단변형률로부터 축차변형률  $\hat{\epsilon}_q = \gamma/\sqrt{3}$ 을 구할 수 있다. 따라서 소성 축차변형률은 최대(초기) 전단계수를 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\hat{\epsilon}_q^b = \hat{\epsilon}_q - \hat{\epsilon}_q^o, \quad \hat{\epsilon}_q^o = q/3G_{max} \quad (12)$$

시료는 구속압이 0.02MPa(test (1)), 0.04MPa(test (2)), 0.08MPa(test (3))인 경우에 대하여 각각 수행되었으며, 그 시험결과를 식 (11)과 (12)를 이용하여 분석하여 표 1에 정리하였다.

표 1 화강풍화토의 재료계수

a	b	c	점착력(kPa)	마찰각(°)	$E_{max}$ [구속응력] (MPa) <sup>a</sup>		
					test (1)	test (2)	test (3)
0.150	2.50	0.30	12.15	27.9	90 [0.02]	120 [0.04]	175 [0.08]

<sup>a</sup>시험은 각 구속응력에 대하여 비틀전단, 공진주, 삼축압축시험이 이루어졌으며 시험연번에 따라 명칭을 구분하였다. 예를 들어 구속압이 0.02MPa인 test (1)은 각각 TS(1), RC(1), TX(1)으로 칭하였다.

그림 2에는 정규화 변형계수( $E/E_{max}$ )에 대한 실험치와 계산치가 비교되어 있다. 제안된 모델의 경우 미소변형률 조건하의 비틀전단시험 및 공진주시험 결과를 잘 예측하였다. 한편 Ramberg-Osgood 모델에 의하면 제안된 모델과 유사하게  $E/E_{max}$ 를 보여주고 있다. 이로부터 제안된 모델이 Ramberg-Osgood 모델이 표현가능한 미소변형률 조건의 응력-변형률 관계를 모델할 수 있음을 알 수 있다.

반면 쌍곡선 모델에 의한 관계는 그림 2에서 보여지듯이 0.1%이하의 변형계수를 심하게 과소평가함을 알 수 있다. 쌍곡선 모델은 미소변형률 거동 및 대변형률 거동에 모두 적용가능하지만, 이에 필요한 계수는 변형률 수준에 따라 상이하게 도출된다. 본 절에서는 0.1%이상의 거동을 잘 표현할 수 있는 쌍곡선 모델계수를 도출하였으며, 이로 인하여 실제 거동과 극심한 차이를 보이고 있다.

구속압 0.08MPa에 상응하는 응력-변형을 관계가 그림 3에 나타나 있다. 제안된 모델의 경우 삼축시험 결과를 근사하게 계산하였다.

한편 쌍곡선 모델은 0.1%이상에서 나타나는 실제 응력-변형을 관계를 매우 유사하게 예측하였다. 그러나 미소변형을 조건에서의 거동을 잘 모델할 수 있는 Ramberg-Osgood 모델은 0.1%이상의 응력-변형을 관계를 예측하기 곤란하였다. 특히 대상 시료의 강도를 과대평가하는 결과를 초래하였다. 이러한 결과로 미루어볼 때 제안된 구성모델은 탄소성론에 근거하여 미소변형률에서 대변형률까지의 응력-변형률 관계를 합리적으로 모델할 수 있음을 알 수 있다.

제안된 모델은 각 지층에 상응하는 최대 변형계수( $E_{max}$ )와 전단강도를 적용하여 실제 응력-변형률 관계를 적합하게 모델할 수 있다. 표 1에 나타난 Mohr-Coulomb 파괴규준 계수( $c'=12.15\text{kPa}$ ,  $\phi'=27.9^\circ$ )로부터 최대 축차응력은 다음과 같은 식을 이용하여 결정할 수 있다.

$$q_{max} = \sigma_3 \tan^2(45^\circ + \phi/2) + 2c \tan(45^\circ + \phi/2) - \sigma_3 \quad (13)$$

그림 4 (a)에서 보여지듯이 각 구속압에 상응하는 변형계수를 전반적으로 잘 예측하였으며 특히 비틀전단시험 및 공간주시험 결과를 잘 예측하였다. 다만 LDT를 이용한 삼축시험 결과는 분산이 심하였고 제안된 모델은 전반적인 경향을 합리적으로 모델할 수 있었다. 그림 4 (b)에서는 응력-변형률 관계를 비교하였으며 구속압이 0.08MPa인 경우(TX(3))에는 변형률을 다소 과소평가하였으나 실제 관계를 대체로 정확하게 모델할 수 있었다.

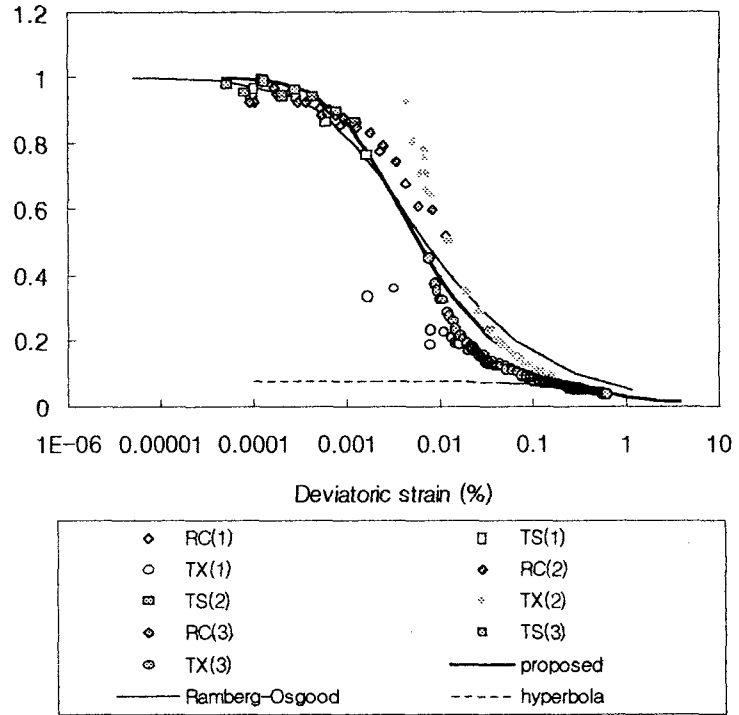


그림 2 할선계수비  $E/E_{max}$ 에 대한 비교

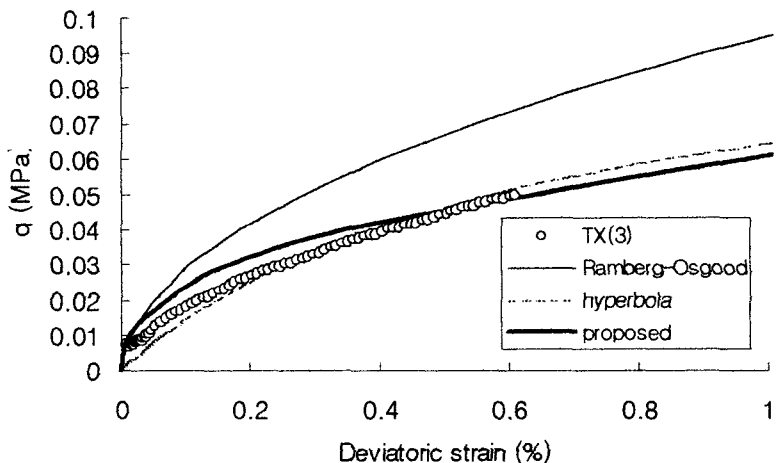
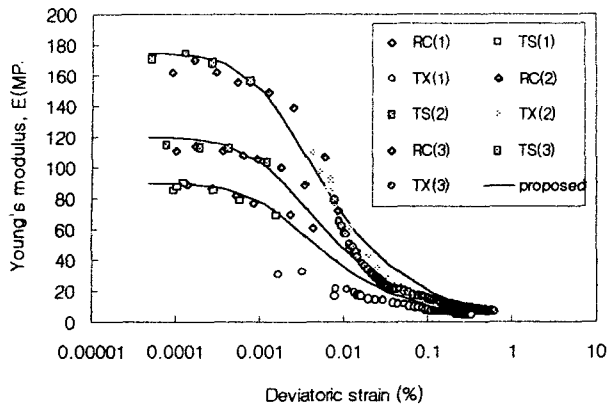
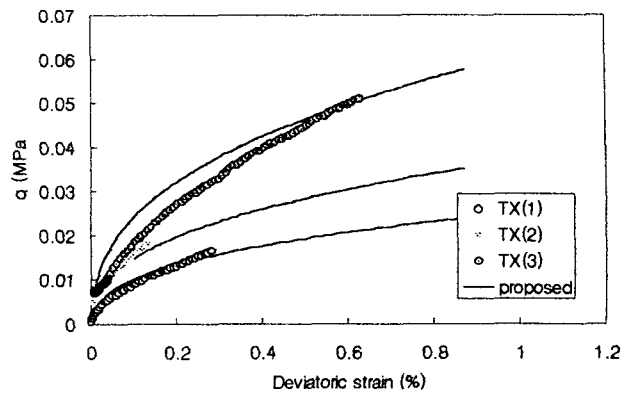


그림 3 응력-변형률 관계에 대한 비교

이러한 결과들로 미루어 볼 때, 제안된 비등방경화 탄소성모델은 미소변형률 조건에서 나타나는 비선형적인 응력-변형률 관계를 모델할 수 있음을 알 수 있다. 특히 제안된 모델이 비등방경화 탄소성론에 근거하기 때문에 다양한 재하조건에 따른 거동을 합리적으로 모델할 수 있었다.



(a) 할선계수 관계



(b) 응력-변형률 관계

그림 4 구속압에 따른 할선계수 관계 및 응력-변형률 관계

#### 4. 결론

본 연구는 미소변형률 조건에서 나타나는 비선형거동 뿐만 아니라 대변형률에서의 응력-변형률 관계를 표현할 수 있는 구성모델을 탄소성론과 비등방 경화규칙을 토대로 개발하였다. 그 내용을 정리하면 다음과 같다.

1. 제안된 구성관계는 기존의 대표적 구성모델중 쌍곡선 모델과 Ramberg-Osgood 모델을 포함하고 있음을 수학적으로 입증하였으며, 이로 인하여 미소변형률에서 대변형률까지의 거동을 합리적으로 모델할 수 있다.
2. 공진주시험, 비틀전단시험, 삼축시험 등 일련의 실내시험 결과를 이용하여 모델계수를 용이하게 도출할 수 있었으며, 쌍곡선 모델 및 Ramberg-Osgood 모델과 비교한 결과 제안된 모델은 미소변형률에서 대변형률까지의 거동을 일관되게 모델할 수 있다. 제안된 모델은 전응력 개념을 토대로 하기 때문에 대상 지층의 강도 및 최대 변형계수에 따라 지층을 세분하여 비선형해석에 적용할 수 있다.

#### 참고문헌

1. 김동수, 권기철, 정순용, 박재영 (1997), "실내시험 및 현장시험을 통한 지반의 비선형 변형특성 평가" 한국지반공학회, 제13권, 제5호, pp. 89-100.
2. 오세봉 (1999), "비등방경화 구성모델을 적용한 연약 지반의 비배수 거동 해석 : I. 구성모델," 한국 지반공학회지, 심사중
3. Hardin, B. O. and Drnevich, V. P., (1972), "Shear Modulus and Damping in Soils : Design Equations and Curves," Journal of SMF Div., ASCE, Vol. 98, No. SM7, pp. 667-692.
4. Holtz, R. D. and Kovacs, W. D. (1981). *An Introduction to Geotechnical Engineering*, Prentice Hall
5. Konder (1963), "Hyperbolic Stress-Strain Response: Cohesive Soils," Journal of SMF Div., ASCE, Vol. 89, No. SM1, pp. 115-143.
6. Lee, S. R. and Oh, S. (1995). "An Anisotropic Hardening Constitutive Model Based on Generalized Isotropic Hardening Rule for Modeling Clay Behavior, *Int. J. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 19, 683-703
7. Ramberg, W. and Osgood, W. R., (1943), "Description of Stress-Strain Curves by the Three Parameters," Technical Note 902, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, D.C.