

## 유전자 알고리즘을 이용한 사면의 임계파괴면 예측기법에 관한 연구 A Study on the Prediction Technique for Critical Slip surface Using Genetic Algorithm

김홍택<sup>1)</sup>, Kim, Hong-Taek, 강인규<sup>2)</sup>, Kang, In-kyu, 황정순<sup>3)</sup>, Hwang, Jung-Soon  
장원호<sup>4)</sup>, Chang, Weon-Ho

<sup>1)</sup> 홍익대학교 토목공학과 교수, Professor, Dept' of Civil Eng., Hong-Ik University

<sup>2)</sup> (주) 브니엘 컨설턴트 책임기술자, Chief Engineer, Vniel Consultant Co., Ltd.

<sup>3)</sup> 홍익대학교 토목공학과 대학원, Graduate Student, Dept' of Civil Eng., Hong-Ik University

<sup>4)</sup> (주) 도우 엔지니어즈 이사, Director, Do Woo Engineers

**SYNOPSIS :** In the present study, a searching technique for critical slip surface in two dimensional slope stability analysis is proposed. The failure surface generation and analysis has been usually limited to simple geometric shapes. However, more random surfaces need to be examined for some particular ground conditions. For this purpose, random searching technique is developed using genetic algorithm. The generalized limit equilibrium method is employed as the method of stability analysis. Using this technique, the factor of safety is compared with the result by using simplified Bishop's method. In addition, the convergent trend of fitness value is analyzed.

**Key Words :** Slope stability analysis, Critical slip surface, Random searching technique, Genetic algorithm

### 1. 서론

사면의 안정성은 일반적으로 안전율에 의해 평가되며, 사면안정해석에 있어 임계파괴면은 안전율이 최소가 되는 지점을 연결하여 결정된다. 최소안전율을 정의하는 임계파괴면의 결정을 위해 널리 사용되는 방법들은 대부분 비선형 프로그래밍에 의한 결정론적인 방법들이며, 임의탐색(random searching) 방법들은 일반적으로 효율성이 떨어진다는 이유로 거의 사용하지 않고 있다.

전술한 결정론적인 방법들은 실제로는 상당히 복잡한 형태를 지니는 사면의 파괴면 형태를 원호 또는 대수나선 등의 비선형 함수로 표현되는 수학적인 모델로 간략화하여 안정해석을 수행한다. 그러나 이러한 방법들로는 지반내부에 존재하는 다양한 지층의 불연속적인 특성 등에 의한 영향을 효과적으로 반영하는 데에는 한계가 있다. 더욱이 지층이 다층으로 구성되어 있을 경우, 파괴면의 형태는 원호 또는 단순 대수나선이 아니라 복합 대수나선 또는 복합직선 등에 가깝다. 따라서 지반 내부에 존재하는 다양한 지층의 특성과 지층들의 불연속적인 측면 등을 보다 효과적으로 반영하기 위해서는 지층의 특성 등 제반조건들을 보다 유연하게 반영하여 임계파괴면의 형태를 결정할 수 있는 임의탐색 방법이 요구된다.

본 연구에서는 전술한 문제점 등을 감안하여 지반 내부에 다양하게 존재하는 지층들의 불연속적인 특성 등을 고려할 수 있는 임의탐색 방법에 의한 임계파괴면 형태를 예측키 위해 유전자 알고리즘(genetic algorithm)을 이용한 기법을 제시하고자 한다.

본 연구에서는 파괴면을 수학적인 함수로 미리 가정하지 않고, 파괴면을 정의하는 각 절편 저면의 기하학적 형상 및 시종점 등 파괴면의 범위 등을 유전자 알고리즘을 이용하여 임의의 값들(random values)로서 표현하고, 이를 토대로 최소안전율을 나타내는 임계파괴면을 결정하였다. 임계파괴면을 결정하기 위한 본 유전자 알고리즘의 탐색과정에 안전율이 적합도 함수로 정의되었다. 또한 본 연구를 통해 제시된 유전자 알고리즘을 이용한 최소안전율 산정기법의 적합성 및 타당성 등을 확인하기 위해 여러 연구자들이 제안한 기존의 결정론적인 방법들에 의한 결과와 서로 비교·분석하였다.

## 2. 유전자 알고리즘의 일반적인 고찰

### 2.1 이론배경

인공적인 유전시스템인 유전자 알고리즘(Genetic Algorithm, GA)은 최근 컴퓨터의 광범위한 활용과 더불어 인간의 능력을 컴퓨터를 통해 구현하고자 하는 인공지능(artificial intelligent)의 한 분야로써, 자연세계의 진화현상에 기초하여 Holland(1975)에 의해 개발된 전역적(global)인 최적화 알고리즘이며, 공학분야에는 Goldberg (1987)에 의해 처음 적용되었다. GA는 자연계의 유전과정을 모방하여 생물학적 유전인자인 염색체와 유사한 구조를 지니는 문자열들(string) 사이에서 선택(selection), 교배(crossover) 및 변이(mutation) 등의 연산을 거쳐 다음 세대의 새로운 연산자를 인공적으로 만들어 내는 과정을 통해, 적합한 해를 탐색한다. 특히 기존의 최적화 방법이 탐색의 방법으로서 국부탐색을 행함으로 해서 전체 최적점(global optimum)을 찾기 위해 다수의 초기점에 대해 반복계산을 해왔으나, GA는 하나의 설계점이 아닌 설계집단을 사용하여 확률론적인 탐색을 행함으로 해서 전체 최적점에 도달할 신뢰도가 크다(양영순 등, 1992). 전형적인 유전자 알고리즘은 프로그램에서 임의의 값으로 초기화된 개체들의 집합으로부터 시작하며, 중요한 구성요소들로는 적합도 함수(fitness function), 개체(individual) 표현법, 유전연산자 및 알고리즘 제어 파라미터 등이 있다. 이중 적합도 함수는 각 개체들 간의 우열 여부를 평가하는 기반이며, 유전자 알고리즘에 의한 최적해 탐색에 있어 그 근거가 되는 값이다.

### 2.2 유전자 알고리즘의 연산(GA Operator)과 개체선택방법

유전자 알고리즘의 연산은 자연계를 모방한 선택(selection), 교배(crossover) 그리고 변이(mutation)연산에 의해 구현된다. 또한 유전자 알고리즘은 설계변수(저부파괴각과 파괴의 시종점의 좌표)의 십진 정수 값을 그대로 사용하는 것이 아니라 십진수의 값을 이진 스트링으로 표현한다. 만약 설계변수가 여러 개일 경우, 이진 비트들로 표현되는 설계변수들을 직렬로 연결함으로써 자연계의 염색체(chromosome)와 유사한 형태를 지니는 하나의 개체(individual)를 형성하게 된다. 전형적인 유전자 알고리즘은 프로그램에서 임의의 값으로 초기화된 개체들의 집합(generation, 세대)으로 시작하며, 각각의 개체는 주어진 문제에 의해 평가되는 적합도 값(본 연구의 경우는 안전율에 근거한 값)을 토대로 자연계를 모방한 선택(selection), 교배(crossover) 그리고 변이(mutation)연산을 수행함에 의해 최적해를 탐색하는 과정을 거치게 된다.

개체선택의 방법은 몇 가지 방법이 있으며, 토너먼트 선택(tournament selection)은 그 중 한가지 방식이며 그림 1은 이에 대한 개략적인 설명이다. 토너먼트 선택은 조기수렴의 문제와 탐색의 후반에 발생하는 진화의 정체에 대한 대안으로서 Goldberg와 Deb(1991)에 의해 제안된 방법이다. 토너먼트 선택은 세대에서 임의로 선택된 개체들(일반적으로 2개)간의 경쟁을 통해 적합도가 가장 높은 개체( $\Phi_{winner}$ )가 다음 세대의 생성을 위해 교배연산의 장소(mating pool)로 저장되며, 경쟁에 참가했던 개체는 다시 원래의 장소로 되돌려져 다시 선택될 수 있다. 선택연산은 주어진 환경에 잘 적응하는 개체는 살아남고 그렇지 않은 개체는 도태되는 자연선택 현상을 모델링한다. 교배연산은 선택연산을 통해 결정된 개체들의 스트링을 상호 교환하는 과정으로서, 결국 교배연산을 통해 적합성이 높은 형질의 설계점이 많이 생성되어 세대가 증가하면서 최적점의 주위로 많은 설계변수들이 집중된다. 결국 유전자 알고리즘에 의한

최적점의 탐색은 이를 통해 구현된다.

자연계의 돌연변이를 모델링한 변이연산은 스트링내의 각각의 이진 비트를 0은 1로, 1은 0으로 변경하는 연산자로서 탐색의 방향이 국부해로 향할 때 여기서 벗어나도록 도움을 준다. 자연계와 마찬가지로 변이연산은 아주 낮은 변이확률( $P_m$ , 보통 0.02이하)을 각각의 비트에 적용하여 연산을 수행함으로서 유전자 알고리즘에서도 드물게 발생한다.

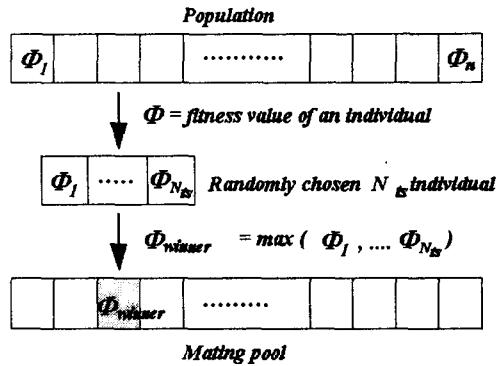


그림 1. 토너먼트 선택의 개략도

### 3. 유전자 알고리즘을 이용한 사면의 안정해석

#### 3.1 유전자 알고리즘을 이용한 가상 파괴면의 가정

일반적인 사면안정해석법은 최소안전율의 평가를 위한 파괴면의 형상을 수학적인 함수로서 미리 결정한 후, 최소안전율을 나타내는 임계파괴면을 탐색하는 결정론적인 방법을 따르게 된다. 그러나 사면안정해석을 최소안전율을 탐색하기 위한 최적화 문제로 간주한다면 이러한 방법들은 다양한 지층의 조건이나 변화양상을 반영하기 위한 파괴면의 형상변화가 제한됨에 따라 구해진 최소안전율 역시 가정된 파괴면에 대해서만 유효한 국부해로 간주할 수 있다.

따라서 본 연구에서는 실제 현장의 지반조건들을 반영하기 위한 방편으로서 기존의 사면안정 해석법들과는 다르게 유전자 알고리즘을 적용하여 임의의 파괴면을 가정하였으며, 최소안전율을 나타내는 임계파괴면을 탐색하였다. 최소안전율을 나타내는 임계파괴면의 탐색은 결국 파괴면의 형상을 결정하는 각 절편들의 저부 파괴각을, 특정한 지질조건, 사면의 형상 그리고 경계조건들에 의해, 결정하는 문제라 할 수 있다. 그림 2에는 최소안전율을 나타내는 임계파괴면의 결정하기 위해, 임의의 파괴면을 생성하는 개략적인 방법이 도시되어 있다.

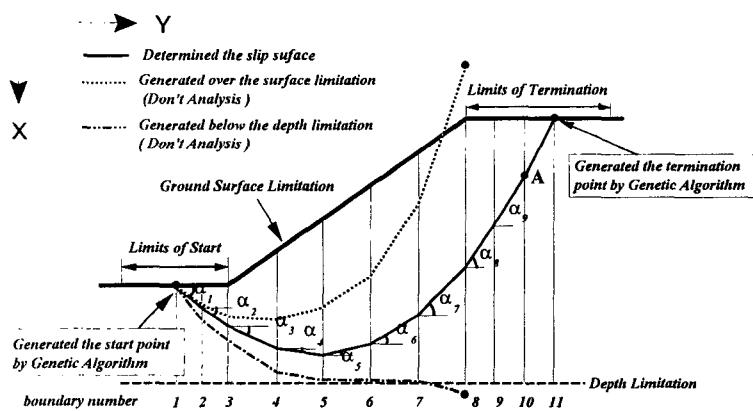


그림 2. 유전자 알고리즘에 의한 가상 파괴면의 탐색

표 1. 유전자 알고리즘의 설계변수

파괴면의 시작위치	절편의 저부파괴각
$P_{start}$	$α_1, α_2, α_3, \dots$
파괴면의 종료위치	
$P_{end}$	$α_{n-3}, α_{n-2}, α_{n-1}$

\*  $n$  : 파괴토체 내의 절편의 총 개수

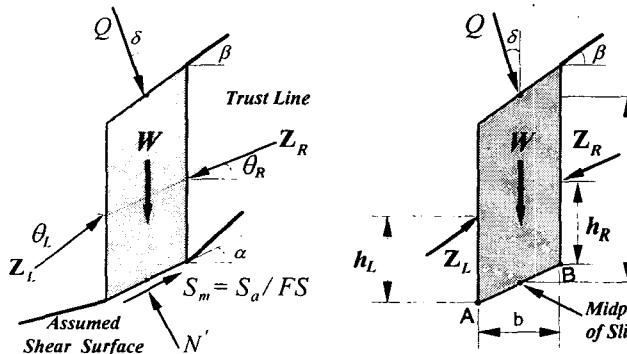
파괴면의 가정은 먼저 해석의 대상이 되는 사면에 대해, 파괴면의 시작점과 종료점을 유전자 알고리즘을 이용하여 각각 주어진 범위(limits)내에서 임의의 좌표(random coordinate)로서 결정한다. 그 다음으로 임의의 개수로 분할된 절편들의 저부 파괴각을 역시 유전자 알고리즘을 이용하여 임의의 각도들(random angles)로 가정하는 과정을 통해 가상파괴면을 생성하게 되는 절차를 거치게 된다. 이때, 가장 마지막 절편(n번째 절편)의 저부 파괴각은 유전자 알고리즘을 이용하여 생성하지 않고, 이전 절편(n-1번째 절편)의 우측 저부파괴점(그림 2의 A점)과 임의의 좌표로 결정된 종료점( $P_{end}$ )을 연장하는 선으로서 결정된다.

또한 가상의 파괴면을 생성하는 과정에서, 저부 파괴각에 의해 결정되는 절편들간의 경계면 상의 파괴점이 깊이의 한계치 보다 깊거나 혹은 지표면 상부에 위치할 경우에는 안정해석의 과정을 거치지 않고 다음 장에서 거론되는 적합도 함수의 조정에 의해 도태시키는 과정을 거치게 된다. 결과적으로 사면의 파괴면 가정을 위한 유전자 알고리즘의 설계변수는 표 1과 같이 정리할 수 있다.

### 3.2 사면의 안정해석 이론

본 연구에서는 3.1절에서 결정된 가상파괴면에 대한 사면의 안전율을 계산하기 위해 Generalized Limit Equilibrium(GLE) method를 사용하였다. GLE method는 절편법의 일종으로 Spencer's method를 개량한 방법으로서 Chugh(1986)에 의해 일반화된 방법이다.

GLE method는 파괴토체를 여러 개의 임의의 절편들로 분할하여 절편들간의 힘평형관계와 모멘트평형관계를 만족하는 안전율을 결정하는 방법이다.



$FS$	: factor of safety	$h$	: Ave. height of slice
$S_a$	: available strength	$h_R$	: height of $Z_R$
$S_m$	: mobilized strength	$h_L$	: height of $Z_L$
$W$	: weight of slice	$b$	: width of slice
$N'$	: effective normal force	$\beta$	: inclination of top
$Q$	: external surcharge	$\alpha$	: inclination of base
$Z_L$	: left interslice force	$\theta_L$	: left interslice force angle
$Z_R$	: right interslice force	$\theta_R$	: right interslice force angle
$\delta$	: angle of surcharge		

그림 3. 절편에 작용하는 힘의 개요

GLE method는 가정사항으로, 각 절편들의 우측에 작용하는 절편력의 작용각( $\theta_R$ )을 Spencer's method(1967)나 Morgenstern - Price method(1965)와 유사하게 식 (1)과 같이 정의한다.

$$\theta_R = \lambda \cdot f(x) \quad (1)$$

여기서,  $f(x)$  : 절편력의 작용각 변화를 묘사하기 위한 0 ~ 1 사이의 값을 지니는 함수

$\lambda$  : 추가적인 미지의 항

이와 같은 절편력의 작용각에 대한 가정에 의해 그림 3에 도시된 임의의 절편에 대한 힘평형관계와 모멘트평형관계를 만족하는 관계식은 각각 식 (2)와 (3)과 같다.

$$Z_R = Z_L A' [\cos(\alpha - \theta_L) + \sin(\alpha - \theta_L) \tan \phi_m] + \\ A' \{ W \cos \alpha (\tan \phi_m - \tan \alpha) - C_m + Q [\cos(\alpha - \delta) \tan \phi_m - \sin(\alpha - \delta)] \} \quad (2)$$

여기서,  $A' = 1 / \cos(\alpha - \theta_R) [1 + \tan(\alpha - \theta_R) \tan \phi_m]$

$$h_R = \frac{Z_L}{Z_R \cos \theta_R} \left\{ h_L \cos \theta_L - \frac{b}{2} (\cos \theta_L \tan \alpha - \sin \theta_L) \right\} + \frac{1}{Z_R \cos \theta_R} h Q \sin \delta + \frac{b}{2} (\tan \theta_R - \tan \alpha) \quad (3)$$

결국 GLE method는 힘평형관계에 의해 유도된 식 (2)와 모멘트 평형관계에 의해 유도된 식 (3)에 의해 적절한 경계조건을 만족하는 안전율  $FS_f$ 와  $FS_m$ 을 각각 산정한 후, 이 두 값이 같아지는 값을 가정된 파괴면에 대한 사면의 안전율(factor of safety)로서 결정하는 절차를 지니게 된다.

### 3.3 적합도 함수와 제약조건의 설정

유전자 알고리즘의 가장 큰 특성은 적합도 함수,  $F_r$ ,와 제한조건의 값만을 사용하여 주어진 최적화 문제의 해를 탐색하며, 미분값이나 그 이외의 수학적 제약조건을 필요로 하지 않는 직접탐색방법이다. 여기에서, 적합도 함수란 최적화 하고자 하는 대상에 대해 각 개체들이 지니는 적합도의 정도를 평가하는 기반이며 결국 가장 높은 적합도를 지니는 개체가 최적의 개체로서 결정된다. 본 연구에서는 최적화 대상을 사면의 최소안전율로서 설정하였으며, 개체들간의 우열을 더욱 명확하게 판정하기 위해 식 (4)와 같이 설정하였다.

$$F_r = \left( \frac{1.0}{FS} \right)^2 \quad (4)$$

또한 적합도 값의 산정을 위한 제약조건으로서 임의로 생성된 저부파괴각에 의해 결정되는 각 절편의 우측하부 점(그림 3의 B점)의 Y좌표,  $Y_{fail(i)}$ ,로서 결정하였으며, 이를 식으로 표현하면 식 (5)와 같다.

$$Y_{fail(i)} > Y_{SL(i)}, \quad F_r = 0.001 \\ Y_{fail(i)} < Y_{BL(i)}, \quad F_r = 0.001 \quad (5)$$

여기서,  $Y_{SL(i)}$  : i번째 파괴블록 우측 경계면과 지표면 간의 교점에 Y좌표

$Y_{BL(i)}$  : i번째 파괴블록 우측 경계면과 하부 한계면 간의 교점에 Y좌표

결국 유전자 알고리즘에 의해 임의로 생성되는 파괴면이 지표면으로 설정된 상한계면이나, 일정 깊이 이하로 설정되는 하한계면을 초과할 경우 적합도의 값이 크게 낮아져 이에 관련된 설계변수들은 도태의 과정을 거치게 된다.

## 4. 분석 및 고찰

### 4.1 단일지층의 경우

본 분석에서는 유전자 알고리즘에 의해 결정된 파괴면을 토대로 결정된 최소안전율의 적합성 및 타당성을 검증하기 위하여 먼저 단일지층을 가진 사면을 대상으로 해석을 수행하였다. 사면은 그림 4와 같이 1:2.0의 경사를 지니며, 유전자알고리즘의 탐색조건으로 세대수와 각 세대당의 개체수는 각각 50과

10으로 설정하였다.

안정해석의 수행을 위해 절편력의 작용각을 정의하는  $f(x)$ 는 half-sine으로 가정하였으며, 파괴면내의 토체는 전면부, 사면부 그리고 배면부가 각각 독립적으로 분할되었다. 또한 파괴의 시점범위와 종점범위, 지반의 강도정수 및 분할된 절편의 개수 등의 해석에 사용된 입력변수는 표 2와 같다.

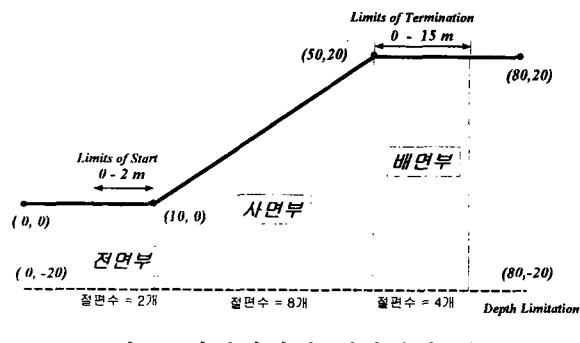


그림 4. 가정사면의 개략적인 형상

표 2. 해석을 위한 설정치들과 강도정수

지반의 강도정수	파괴면의 한계치		
단위중량	$16 \text{ kN/m}^3$	시점범위	0~0.5m
점착력	$20 \text{ kN/m}^2$	종점범위	0~15m
내부마찰각	$20^\circ$	하한계면	-20m
절편의 개수	전면부 8 개	사면부 4 개	배면부 4 개

본 사면에 대해 유전자 알고리즘을 이용하여 파괴면을 예측한 결과, 본 연구의 경우 최소안전율은 1.389로 다른 해석방법들과 유사한 결과를 얻을 수 있었다. 표 3은 그림 4의 예제단면에 대하여 각 해석방법들과 유전자 알고리즘을 적용한 사면안정해석 결과를 서로 비교한 것이다.

표 3. 최소안전율의 비교

해석의 방법	최소 안전율	해석의 방법	최소 안전율
Ordinary Method	1.406	Bishop's Method	1.544
Janbu's Method	1.373	본 연구	1.390

## 4.2 복합지층의 경우

본 분석에서는 서로 다른 3개의 층으로 구성된 다층지반을 대상으로 한 탐색을 수행하였다. 해석에 사용된 입력변수는 4.1절과 동일하나 단지 각절편의 개수를 전면부 2개, 사면부 10개, 배면부 3개로 하여 해석을 수행하였으며, 각 세대의 개체수는 20으로 설정하였다. 또한 사면은 1:1.5의 경사를 지니며, 그 개략적인 크기와 해석범위 등은 그림 5와 같고 지반의 강도정수는 표 4와 같다.

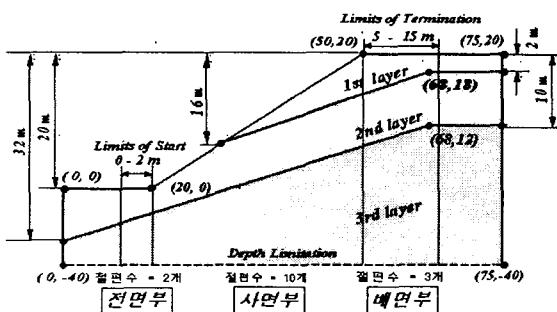


그림 5. 복합지층의 형상과 설정치의 개요

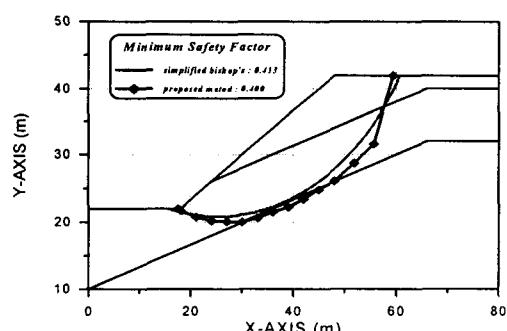


그림 6. 파괴면 형상과 최소안전율 비교

표 4. 복합지층의 지반 강도정수

구 분	$C(t/m^2)$	$\phi(^{\circ})$	$\gamma(t/m^3)$
1st layer	3.0	12.0	1.92
2nd layer	1.0	5.0	1.92
3rd layer	30.0	40.0	1.92

표 5. 최소안전율의 비교

해석의 방법	최소 안전율
Simplified Bishop's method	0.417
본 연구	0.400

본 사면에 대한 해석결과 다층지반의 경우는 표 5와 같이 Simplified Bishop's method로 해석한 경우의 최소안전율은 0.417이며, 본 연구에 의한 방법은 0.400으로 평가되었다. 이는 그림 6을 통해 개략적으로 확인 할 수 있듯이 Simplified Bishop's method의 경우 파괴면이 두번째 지층과 세번째 지층의 경계면상에서 한점에 접하는 원호로서 결정되나 본 연구의 경우 경계면과 평행한 직선구역이 나타나는 등 전체적으로 지층경계면상에 존재하는 지층경사가 파괴면의 결정에 반영된 결과로 판단된다.

#### 4.3 적합도 함수의 변화와 안전율의 수렴 경향

단일지층의 경우에는 최대적합도 값과 평균적합도 값의 차이가 세대수가 증가함에 따라 그 차이가 비교적 작아지나 다층지반의 경우는 그 차이가 비교적 큰 것으로 나타났다. 이러한 경향은 탐색변수의 변화에 의해 계산되는 안전율이 다층지반의 경우가 좀더 민감하게 변화하기 때문인 것으로 판단된다.

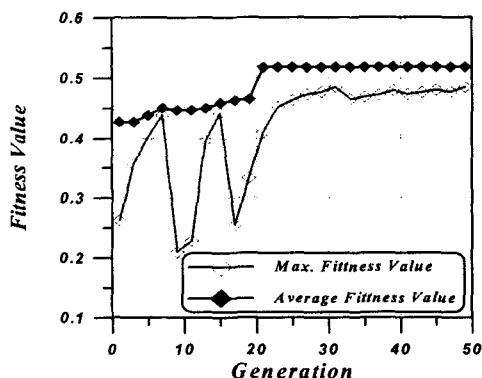


그림 7. 세대수에 따른 평균적합도와 최대적합도 값 (단일지층의 경우)

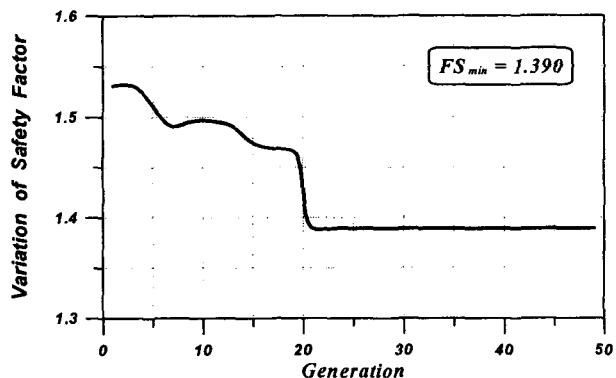


그림 8. 세대수 증가에 따른 안전율의 변화경향  
(단일지층의 경우)

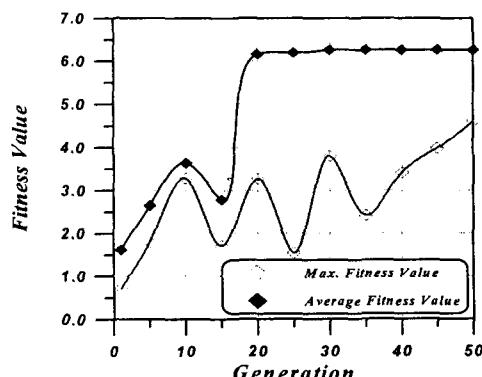


그림 9. 세대수에 따른 평균적합도와 최대적합도 값 (다층지반의 경우)

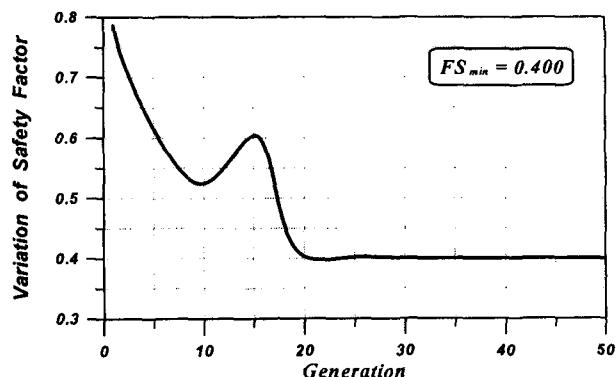


그림 10. 세대수 증가에 따른 안전율의 변화경향  
(다층지반의 경우)

그림 8과 10에 도시된 최소안전율의 경우, 두 가지 경우 서로 유사하게 세대수 20을 전후하여 임계파괴면을 의미하는 최소안전율에 수렴하는 것으로 나타났다. 단일지층의 경우에는 초기세대부터 계산된 안전율이 세대를 거듭하며 최소안전율에 점차 근접하는 경향을 보이나, 다층지반의 경우에는 세대의 증가에도 불구하고 최소안전율의 수렴 경향에서 다소 진동하는 양상을 보이고 있다. 이러한 경향은 다층지반이 지니는 특성 및 저부 파괴각의 미소변화에 대해 안전율의 평가가 민감한 경향을 나타내기 때문인 것으로 생각된다.

## 5. 결론

본 연구에서는 최적화 기법의 일종인 유전자 알고리즘을 이용하여 사면안정해석시 최소 안전율을 나타내는 임계파괴면의 결정하는 사면안정해석 기법을 제시하였으며, 이에 대한 주요 결과를 정리하면 다음과 같다.

- (1) 유전자알고리즘을 이용하여 단일 지층에 대한 사면안정해석을 수행한 결과, 다른 해석방법들과 비교해 볼 때 잘 일치하고 있는 것으로 평가되었다.
- (2) 또한 다층지반에 적용한 경우에는 계산된 최소 안전율이 일반적인 해석방법들에 비교해 볼 때, 다소 작게 평가되었다. 이러한 경향은 최소 안전율의 평가를 위해 가정된 파괴면의 형태가 수학적인 함수식들로 미리 결정되는 것이 아니라 지반조건에 따라 안전율의 평가가 민감하게 변화하기 때문인 것으로 판단된다.
- (3) 본 연구에서 제시된 유전자 알고리즘을 이용한 사면의 임계파괴면 예측기법을 확대·적용하기 위해서는 탐색변수들의 적절한 크기(비트수)의 설정, 선택(selection)의 방법 등에 대한 연구를 통해 해석시간을 단축시키고 유전자 알고리즘의 입력변수들에 대한 영향분석 등의 연구가 향후 진행되어야 할 것이다.

## 참고문헌

1. Chugh, A.K.(1986), "Variable Interslice Force Inclination in Slope Stability Analysis", *JSSMFE, Soils and Foundations*, Vol. 26, No.1, pp.115~121.
2. Goldberg, D.E., and Deb, K.(1991), "A comparative analysis of selection schemes used in genetic algorithms." *Found. of Genetic Algorithms*, I , pp.69~93.
3. Goldberg, D.E., and Kuo, C.H.(1987), "Genetic Algorithms in Pipeline Optimization.", *ASCE., J. Comp. in Civ. Engrg.*, 1(2), pp.128~141.
4. Morgenstern, N. R. and price, V.E.(1965), "The Analysis of the Stability of General Slip Surface", *Geotechnique*, Vol. 15, pp.79~93
5. Spencer, E.(1967), "A Method of Analysis of the Stability of Embankments Assuming Parallel Inter-Slice Force", *Geotechnique*, Vol. 17, pp. 11~26.
6. 양영순, 김기화(1995), "실수형 Genetic Algorithms에 의한 최적 설계", 전산구조공학회, 제8권, 제2호, pp. 123~132.