

# 무손실 전송선로를 가진 카오스 회로에서의 카오스 동기화

배 영 철

여수대학교 전기공학과

## Chaos Synchronization with Lossless Transmission Line of Chaos Circuit

Young-chul Bae

Nat'l Yosu University

E-mail : ycbae@yosu.yosu.ac.kr

### Abstract

Chua's circuit is a simple electronic network which exhibits a variety of bifurcation and attractors. The circuit consists of two capacitors, an inductor, a linear resistor, and a nonlinear resistor. In this paper, a transmitter and a receiver using two identical Chua's circuits are proposed and a synchronizations of lossless transmission line are investigated. Since the synchronization of the transmission system is impossible by coupled synchronization, the drive-response synchronization theory were used. As a result, the chaos synchronization has delay characteristics in the lossless transmission system caused by the line parameters L and C.

### 1. 서 론

최근에 카오스 현상에 대한 관심이 물리학, 화학, 생물학, 공학 등에서 높아지고 있으며 이에 대한 응용이 활발하게 진행되고 있다. Chua는 간단한 전자 회로로 카오스 현상이 존재함을 증명하였다. Chua 회로는 매우 단순한 자율, 3차계 시스템으로 가역성을 가지며 1개의 비선형 소자인 3구분 선형 저항(3-segment piecewise-linear resistor)과 4개의 선형 소자인(R, L, C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>)로 구성되는 발진회로다.

$$C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} = G(v_{C_1} - v_{C_2}) + i_L \quad (1)$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -v_{C_2}$$

여기서  $G = 1/R$ ,  $g(\cdot)$ 는 식 (2)와 같이 표현되는 3구분 선형 함수(3-segment piecewise-linear function)이며 그림 2에 나타내었다.

$$g(v_R) = m_0 v_R + \frac{1}{2} (m_1 - m_0) [|v_R + B_P| - |v_R - B_P|] \quad (2)$$

여기서  $m_0$ 는 외부 영역의 기울기,  $m_1$ 은 내부 영역의 기울기,  $\pm B_P$ 는 break-point이다.

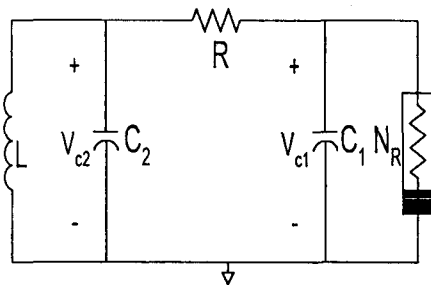


그림 1. Chua 회로

Matsumoto에 의해 제안된 Chua 회로[1]를 그림 1에 나타냈으며 상태방정식은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} = G(v_{C_2} - v_{C_1}) - g(v_{C_1})$$

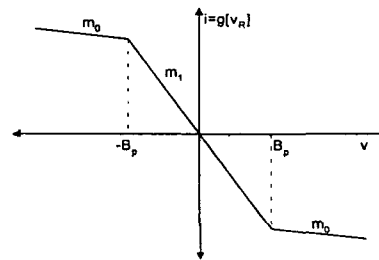


그림2. 비선형 저항의 전압 전류 특성

카오스 동기화에 관한 이론은 주로 채널을 이상적인 채널로 보고 적용한 경우가 대부분이며 이는 실제 선로를 고려하지 않아 적용 상의 문제점이 있다. 이에 본 연구에서는 동일한 2개의 Chua 회로 사이에 무손실 등가 전송선로를 둔 카오스 동기화에 관하여 연구하였다.

## 2. 관계이론

### 2.1 등가 무손실 전송선로를 가진 Chua 회로

구분 선형 소자를 가진 Chua 회로의 LC 공진기들 한쪽이 단락된 무손실 전송선로로 치환하면 그림 3과 같은 회로를 얻을 수 있다.

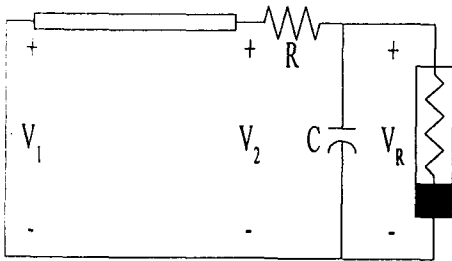


그림 3. 전송 선로를 가진 Chua 회로

Branin[7]는 무손실 전송선로의 과도 해석을 위한 특성곡선법을 제안하였다. 그림 4와 같은 전송 선로의 특성 방정식은 다음과 같이 표시된다.

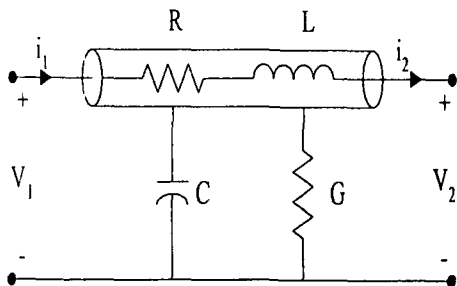


그림 4. 전송 선로

$$L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri + \frac{\partial e}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$C \frac{\partial e}{\partial t} + Ge + \frac{\partial i}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

여기서  $e(x, t)$ 와  $i(x, t)$ 는 시간  $t$ 에서 선로  $x$ 점의 전압과 전류,  $R, L, C, G$ 는 단위 길이당의 저항, 인덕턴스, 커패시턴스, 컨덕턴스를 나타낸다.

특성곡선에서 정의된  $dx/dt = 1/\sqrt{LC}$ 과  $dx/dt = -1/\sqrt{LC}$ 를 사용하여 식(3)과 식(4)를 계산하면 다음식과 같은 상미분 방정식을 유도할 수

있다.

$$\sqrt{\frac{L}{C}} di + (Ri + \sqrt{\frac{L}{C}} G e) dx + de = 0 \quad (5)$$

$$-\sqrt{\frac{L}{C}} di + (Ri - \sqrt{\frac{L}{C}} G e) dx + de = 0 \quad (6)$$

식(5)는  $dx/dt = 1/\sqrt{LC}$  일 때 얻어지며 진행파 특성을 가지고 식(6)는  $dx/dt = -1/\sqrt{LC}$  일 때 얻어지며 반사파 특성을 가진다.

식(5)와 (6)에서 무손실 전송 선로인 경우  $R=0, G=0$ 이므로 다음과 같은 식으로 정리할 수 있다.

$$\Delta e = -Z_0 \Delta i \quad (7)$$

$$\Delta e = +Z_0 \Delta i \quad (8)$$

여기서  $Z_0 = \sqrt{L/C}$  이며 선로의 특성 임피던스,  $\Delta e$ 는 주어진 선로에서의 임의의 두점간의 전압차,  $\Delta i$ 는 전류차를 나타낸다.

전송선로의 길이를  $d$ 라고 하고 일단에서 다른 일단으로의 파의 지연 시간을  $\tau = \sqrt{LC}d$ 라 놓으면 식(9),(10)과 같은 전압 방정식을 세울 수 있다.

$$e(d, t) = -Z_0 i(d, t) + [e(0, t-\tau) + Z_0 i(0, t-\tau)] \quad (9)$$

$$e(0, t) = +Z_0 i(0, t) + [e(d, t-\tau) - Z_0 i(d, t-\tau)] \quad (10)$$

식(9)와 식(10)은 입사파와 반사파 전압원을 이용하여 다음과 같은 수식으로 정리 할 수 있다

$$e(d, t) = -Z_0 i(d, t) - e_2(0, t-\tau) \quad (11)$$

$$e(0, t) = +Z_0 i(0, t) - e_1(d, t-\tau) \quad (12)$$

여기서

$$e_2(0, t) = -[2e(0, t) + e_1(d, t-\tau)]$$

$$e_1(d, t) = -[2e(d, t) + e_2(0, t-\tau)]$$

이다.

식(11)과 식(12)의 등가 회로를 그림 5에 나타내었다.

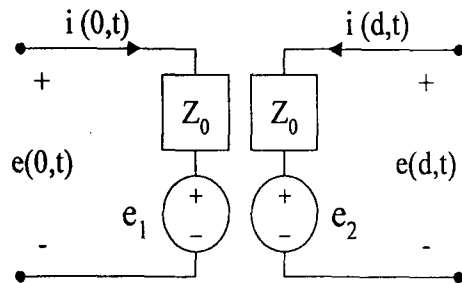


그림 5. 전송 선로의 특성 모델

그림 4의 전송선로는 그림 5와 같이 등가 변환되므로 전송선로를 가진 그림3의 Chua 회로는 그림 6과 같은 새로운 등가회로로 변환할 수 있다.

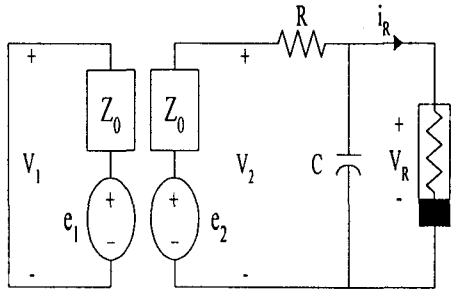


그림 6. 전송 선로를 가진 Chua 회로의 등가회로

2.2 등가 무손실 전송선로를 가진 Chua 회로에서의 카오스 동기화

동일한 Chua 회로 2개를 송신부와 수신부로 놓고 그 사이에 등가 무손실 전송 선로를 가진 카오스 회로에서의 동기화 회로를 그림7에 나타내었다.

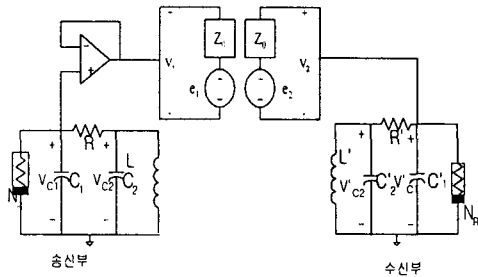


그림7. 등가 무손실 전송선로를 가진 카오스 동기화 회로

그림 7은 동일한 2개의 Chua 회로에서 percora 와 Caroll이 제시한 구동 동기 이론을 적용하여 동기화를 이루었다.

그림 7의 등가 전송 선로를 가진 동기화 회로의 상태 방정식을 다음식과 같다.

송신부의 상태방정식

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_{c_1}}{dt} &= G(v_{c_1} - v_{c_1}) - g(v_{c_1}) \\ C_2 \frac{dv_{c_2}}{dt} &= G(v_{c_1} - v_{c_2}) + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} &= -v_{c_2} \end{aligned} \quad (7)$$

등가 무손실 전송선로부의 상태방정식

$$\begin{aligned} e_{1(t)} &= 2v'_{c_1} - e_2(t-\tau) \\ e_{2(t)} &= 2v_{c_1} - e_1(t-\tau) \end{aligned} \quad (8)$$

수신부의 상태방정식

$$\begin{aligned} C_1' \frac{dv_{c_1'}}{dt} &= G'(v_{c_2'} - v_{c_1'}) - g'(v_{c_1'}) \\ C_2' \frac{dv_{c_2'}}{dt} &= G'(v_{c_1'} - v_{c_2}') + i_L' \\ L' \frac{di_L'}{dt} &= -v_{c_2'} \end{aligned} \quad (9)$$

$v_x = v_{c_1} - v_{c_1'}, v_y = v_{c_2} - v_{c_2'}, i_z = i_L - i_L'$ 라 정의하고 식(7), 식(8), 식(9)에서 차 시스템을 구하면 식(10)와 같이 3차 시스템으로 정리 할 수 있다.

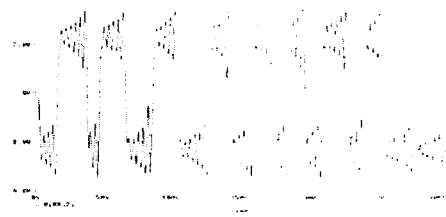
$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_x}{dt} &= G(v_y - v_x) - S_1 v_x \\ C_2 \frac{dv_y}{dt} &= G(v_x - v_y) + i_z \\ L \frac{di_z}{dt} &= -v_y \end{aligned} \quad (10)$$

식(10)에서 차 시스템은 시간이 지남에 따라 0으로 수렴해 가는, 즉  $\lim_{t \rightarrow \infty} |v_x| = \lim_{t \rightarrow \infty} |v_y| = \lim_{t \rightarrow \infty} |i_z| = 0$ 가 되면 동기화가 이루어지는 것이다.

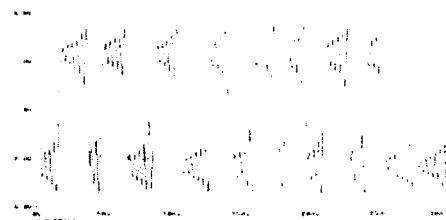
식(7)-식(10)에서

$L, L' = 18mH, C_1 = 0.062\mu F, C_1, C_1' = 10mH, C_2, C_2' = 100mH, R, R' = 1.74K\Omega, d = 1m$ 로 놓고  $Z_0 = \sqrt{L/C_2}, \tau = \sqrt{LCd}$ 를 구하면 각각  $424\Omega$ 과  $0.05ms$ 가 됨을 알 수 있다. 따라서 송신부와 수신부 사이에는  $0.05m$ 만큼의 시간 지연이 존재하는 동기화를 이루게 된다.

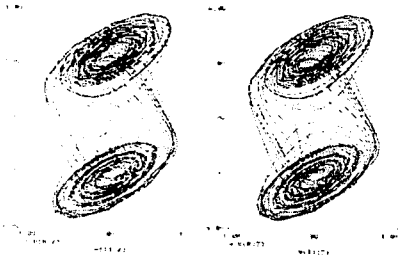
그림7의  $v_{c_1}$  구동에 의한 무손실 전송선로에 대한 동기화 결과를 그림 8에 송,수신부의 시계열 데이터를 나타내었다.



(a) 송신부의 시계열 데이터



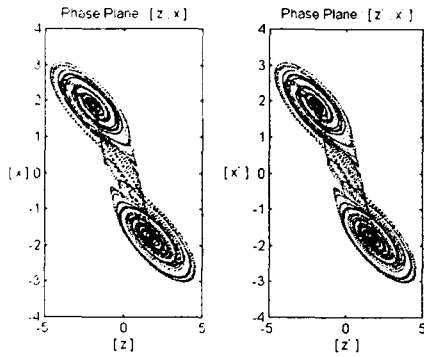
(b) 수신부의 시계열 데이터



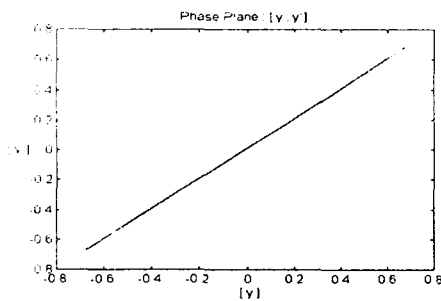
(c) 송수신부의 위상공간

그림 8.  $v_{c1}$  구동에 의한 무손실 전송 선로의 카오스 동기화 결과

그림 9는 그림 7에서  $v_{c1}$  구동에 의한 동기화 결과를 나타내었다. 그림 8과 9를 살펴보면 무손실을 가진 카오스 회로에서의 동기화는 시간 지연을 가지고 송수신부가 정확하게 동기화 됨을 알 수 있다.



(a) 위상 공간



(b) 동기화 척도

그림 9.  $v_{c2}$  구동에 의한 무손실 전송 선로의 카오스 동기화 결과

### 3. 결 론

본 연구에서는 두 개의 동일한 Chua 회로에 무손실 전송선로를 두어 등가 전송로를 구성한 후 구동 동기 이론을 적용하여 동기기화를 이루었다. 무손실 전송선로 가진 Chua 회로의 카오스 동기화는 전송 선로의 L과 C 영향에 의한 시간 지연이 있는 동기화가 이루어짐을 확인할 수 있었다.

#### [참 고 문 헌]

- [1] T. Matsumoto, "A Chaotic Attractor from Chua's circuit", IEEE Trans. on Circuit and System, vol. CAS-31, pp. 1055 - 1058, 1984.
- [2] 배영철, 고재호, 임화영, "Chua 회로에서의 Bifurcation과 Attractor", 대한전기학회 하계 학술대회 논문집, pp.664 - 666, 1995.
- [3] 배영철, 고재호, 임화영, "구분 선형 함수의 최적 구현에 관한 연구", 한국자동제어학술 회의 논문집, pp. 370 - 373, 1995.
- [4] 배영철, 고재호, 임화영, "Chua 회로에서의 파라미터 변화에 의한 Period-doubling과 Bifurcation에 관한 연구", 한국 자동제어 학술 회의 논문집, pp. 482 - 485, 1995.
- [5] L. Kocarev, K. S. Halle, K. Eckert and L. O. Chua, "Experimental Demonstration of Secure Communication via Chaotic Synchronization" Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 2, no. 3, pp. 709-713, 1992.
- [6] K. S. Halle, C. W. Wu, M. Itoh and L. O. Chua, "Spread Spectrum Communication through Modulation of Chaos" Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 3, no. 2, pp. 469-477, 1993.
- [7] F. H. Branin, Jr, "Transient Analysis of Lossless Transmission Lines", Proc. IEEE, vol.55, pp. 2012 - 2013, 1967.
- [8] A. N. Sharkovsky, "Chaos from a Time-delayed Chaos Circuit", IEEE Trans. on Circuit and System, vol. CAS-40, pp. 781 - 783, 1993.
- [9] L. Kocarev and Z. Tazev, "Analytical Description of a Fractal Set Generated by the Time-Delayed Chua's Circuit", International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 4, pp. 1639 - 1643, 1994.
- [10] X. Rodet, "Models of Musical Instruments from Chua's Circuit with Time-Delay", IEEE Trans. on Circuit and System, vol. CAS-40, pp. 696-701, 1993.