

추적 시스템을 위한 최적 검출 문턱값 선택

정 영 헌 (鄭 漢 憲)

경운대학교 전자공학과

전화 : (0546) 479-1214 / 팩스 : (0546) 479-1029

Optimal selection of detection threshold for tracking systems

Young-Hun Jung

Dept. of Electronic Engineering, Kyungwoon University

E-mail : yhjung@kyungwoon.ac.kr

Abstract

In this paper, we consider the optimal control of detection threshold to minimize the conditional mean-square state estimation error for the probabilistic data association (PDA) filter. Earlier works on this problem involved the cumbersome graphical optimization algorithm or time-consuming numerical optimization algorithm. Using the numerical approximation of information reduction factor, we obtained the closed-form optimal detection threshold. This results are very useful for real-time implementation.

I. 서론

하나의 표적을 추적하는 문제에 있어서 과정잡음(process noise)과 측정잡음(measurement noise)에 의해서 발생하는 부정확성 외에 측정의 근원(origin)과 관련된 부정확성이 있을 수 있다. 이러한 측정 근원의 부정확성은 표적추적 알고리즘에 이용될 측정이 관심없는 표적 또는 랜덤 클러터(random clutter)등으로부터 생성된 것일 수도 있게 한다. 이러한 사실은 표적추적과 관련된 데이터 연관(data correlation) 문제를 발생시키게 된다. 이와 같은 데이터 연관 문제를 해결하는 가장 대표적인 방식으로는 PDA(Probabilistic Data Ass-

ociation) 필터[1]를 이용하는 방식이 있다. 추적기의 추정오차 공분산행렬(covariance matrix)은 추적의 성능을 결정하는 성능지수(performance index)로 널리 사용된다. PDA 필터의 경우 추정오차 공분산행렬은 측정 데이터의 함수로써, 측정 데이터와 무관하게 추적기의 성능을 표현하기 위해서는 추정오차 공분산행렬의 확률적(stochastic)인 부분을 확정적(deterministic)인 부분으로 바꾸어야 한다. Fortmann등[2]은 추정오차 공분산행렬의 확률적인 부분을 유효 게이트 내의 측정 위치와 유효 측정의 갯수에 대한 기대치로 바꾸어 근사적인 추정오차 공분산행렬을 구했다. 또한, 정상상태의 위치추정오차의 평균제곱근을 최소화하는 검출문턱값을 그래프를 이용하여 얻었다. 하지만, 이 방법은 시변 시스템에서는 사용될 수 없으며, 그래프를 이용하여 최적의 값을 얻기 때문에 매우 비효율적이며 부정확하다. Gelfand등[3]은 참고문헌 [2]와는 달리 수치해석적 최적화 알고리즘을 이용하여 추정오차의 평균제곱근을 최소화하는 검출문턱값을 얻었다. 하지만, 이 방법은 매우 복잡한 형태의 적분식을 갖는 정보감축인자(information reduction factor)를 구해야 하므로, 최적해를 얻는데 매우 많은 시간이 소요될 뿐만 아니라, 구한 최적해가 전역최적해(global optimum solution)임을 보장할 수 없었다. 최근, Kershaw등[4]은 복잡한 형태의 정보감축인자를 근사화하여 표적검출확률 P_D 와 거짓검출확률 P_F 의 함수로 표현하였다.

이 논문에서는 상태 추정오차의 평균제곱근을 최소화하는 검출문턱값의 최적제어 방법을 제시하고 닫힌 형

태의 최적해를 구한다. Fortmann이 제시한 근사화된 공분산행렬식과 Kershaw등이 제시한 근사화된 정보감축인자를 바탕으로, 부등식 제한조건을 가진 비선형 최적제어문제로 수식화한 후, 닫힌 형태의 최적제어해를 구한다.

II. 추적필터 및 측정모델

가산적인 잡음(additive noise)이 섞인 수신된 레이다 신호는 두 직교하는 성분 $(A_1 + N_1, A_2 + N_2)$ 으로 구성된다. A_1 과 A_2 는 swerling I모델[3,5]을 따르는 가우시안으로 각각 동상(inphase) 성분과 위상이 90° 차이나는 신호성분이며, 신호에너지는 $E[A_i^2] = 1/2 \cdot E_R$ 이다. N_1 과 N_2 은 각각 잡음에너지가 $E[N_i^2] = 1/2 \cdot N_R$ 인 수신 잡음이다. 표적의 신호대잡음비는 신호 에너지에 대한 잡음 에너지의 비로써 $SNR = E_R / N_R$ 이다. 식(1)과 같이 수신된 신호의 크기의 제곱이 주어진 검출문턱값(detection threshold)보다 크면 표적이 검출된 것으로 본다.

$$((A_1 + N_1)^2 + (A_2 + N_2)^2) / N_R > -\ln P_F \quad (1)$$

이때 표적검출확률(P_D)과 거짓검출확률(P_F), 그리고 신호대잡음비(SNR)에 대한 관계식은 아래와 같다.

$$P_D = P_F^{1/(1+SNR)} \quad (2)$$

다음과 같은 표적 운동과 측정에 대한 모델을 가정하자.

$$x(k+1) = F(k)x(k) + \Gamma(k)v(k) \quad (3)$$

$$z(k) = H(k)x(k) + w(k) \quad (4)$$

여기서 $x(k)$ 는 시간 k 에서 표적의 상태 벡터이며, $z(k)$ 는 측정 벡터이다. $v(k)$ 는 표적운동의 과정잡음으로서, 평균은 0이고 분산이 $Q(k)$ 이다. $w(k)$ 는 평균이 0이고 공분산행렬 $R(k)$ 를 가지는 측정 잡음 벡터이다. 이때 $v(k)$ 와 $w(k)$ 는 상호 비상관 관계(uncorrelated)인 가우시안 백색 잡음이며, $F(k)$, $H(k)$, $\Gamma(k)$ 는 이미 알고 있는 행렬이다.

추적필터에 사용될 측정이 관심있는 표적이외에 랜덤 클러터등으로부터 생성될 수도 있으므로 측정의 개수는 1개이상일 수도 있다. 유효게이트(validation

gate) 안에서의 거짓측정의 개수는 매개변수 $\rho V(k)$ 를 갖는 포아송(Poisson) 분포를 가정한다. 여기서 ρ 는 거짓측정의 밀도이며, $V(k)$ 는 유효 게이트의 면적이다. 유효 게이트는 n_k 개의 분해셀(resolution cell)로 구성되어 있으며, 각각의 분해셀은 똑같은 검출문턱값과 표적검출확률을 가진 독립적인 검출기를 지니고 있다. 따라서, 거짓측정의 밀도 ρ 는

$$\rho = P_F / V_c = n_k P_F / V(k) \quad (5)$$

이다. 여기서 V_c 은 분해셀의 면적이다.

시간 k 에서 유효 게이트 내의 측정을 $z_i(k)$, $i = 1, \dots, m_k$ 로 두며, 모든 측정의 갯수를 m_k 로 나타낸다. 시간 k 에서의 유효 측정 집합을 $Z(k) \triangleq \{z_i(k)\}_{i=1}^{m_k}$ 로 두며, 측정들의 누적 집합을 $Z^k \triangleq \{Z(i)\}_{i=1}^k$ 로 나타낸다. 시간 k 에서의 측정치와 측정 예측치의 오차를 이노베이션(innovation) $\nu_i(k) \triangleq z_i(k) - H(k)\hat{x}(k|k-1)$ 라 하며, 이노베이션 공분산행렬은 $S(k) = H(k)P(k|k-1)H(k)^T + R(k)$ 이다. 여기서 $P(k|k-1)$ 는 상태예측오차 공분산행렬이다. 유효 게이트는 $R_g^g(k) \triangleq \{z: \nu(k)S(k)^{-1}\nu(k) < g^2\}$ 를 만족하는 영역으로, 이 때 g 는 게이트 크기라고 부른다. 측정 벡터가 M 차원인 경우 유효 게이트 면적은 $V(k) = c_M |g^2 S(k)|^{1/2}$ 이며, 여기서 c_M 은 $c_M = \pi^{M/2} / \Gamma(M/2 + 1)$ 를 만족하는 M -차원 단위 공간의 체적이다.

먼저, $\theta_i(k)$ 는 측정 $z_i(k)$ 가 실제 표적으로부터 발생했다는 사건, $\theta_0(k)$ 는 실제 표적에서 발생한 측정이 없다는 사건이라 두면, 이 사건들의 사후 확률은 $\beta_i(k) \triangleq P(\theta_i(k) | Z^k)$ 로서

$$\beta_0(k) = b \left/ \left(b + \sum_{j=1}^{m_k} e_j(k) \right) \right. \quad (6)$$

$$\beta_i(k) = e_i(k) \left/ \left(b + \sum_{j=1}^{m_k} e_j(k) \right) \right.$$

이다. 여기서 $b = (2\pi)^{M/2} \rho |S(k)|^{1/2} (1 - P_D P_C) / P_D$, $e_i(k) = \exp(-\nu_i(k)^T S(k)^{-1} \nu_i(k) / 2)$, M 은 측정의 차원, ρ 는 클러터 밀도, P_C 는 실제 표적이 검출된 경우, 실제 표적의 측정이 유효게이트안에 있을 확률이다. 최종적으로 PDA 필터의 상태 추정오차 공분산행렬은 다음과 같다.

$$P(k|k) = P(k|k-1) - (1 - \beta_0(k))K(k)S(k)K(k)^T + \tilde{P}(k) \quad (7)$$

여기서

$$\tilde{P}(k) = K(k) \left[\sum_{i=1}^{m_k} \beta_i(k) \nu_i(k) \nu_i(k)^T - \nu(k) \nu(k)^T \right] K(k)^T \quad (8)$$

이며, $W(k) = P(k|k-1)H(k)^T S(k)^{-1}$ 는 칼만이득, $\nu(k) = \sum_{i=1}^{m_k} \beta_i(k) \nu_i(k)$ 은 이노베이션의 가중합이다. 추정오차 공분산행렬은 식 (7)에서 알 수 있듯이 측정치의 함수로서, 통계학적 관점에서만 그 특성이 결정될 수 있다. 따라서, 기대값을 통해 근사식을 얻을 수 있다[2].

$$\begin{aligned} \bar{P}(k|k) &= E[P(k|k)|Z^{k-1}] \\ &= P(k|k-1) - q_2(k)K(k)S(k)K(k)^T \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 $q_2(k)$ 는 측정 근원의 불확정성에 기인한 정보감축인자(information reduction factor)로서

$$\begin{aligned} q_2(k) &= P_D \frac{C_M}{(2\pi)^{M/2}} \sum_{m_k=1}^{\infty} \frac{e^{-\rho V(k)} (\rho V(k))^{m_k-1}}{(m_k-1)!} \quad (10) \\ &\times \left(\frac{M}{g} \right)^{m_k-1} I_2(m_k) \end{aligned}$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} I_2(m_k) &= \int_0^g \dots \int_0^g \frac{\exp(-r_1^2) r_1^2}{b + \sum_{j=1}^{m_k} \exp(-r_j^2/2)} \quad (11) \\ &\times (r_1 \dots r_{m_k})^{m_k-1} dr_1 \dots dr_{m_k} \end{aligned}$$

이다. 위의 정보감축인자 $q_2(k)$ 는 P_D 와 $\rho V(k)$ 의 함수로서, 중적분이 포함되어 구하기가 매우 힘들다. Kershaw등[4]은 위와 같이 복잡한 형태의 정보감축인자를 $M=2$, $g=4$ 인 경우에 대해, 수치적 근사화를 통해 다음과 같이 간단한 형태로 표현하였다.

$$\hat{q}_2(k) = \frac{0.997 P_D}{1 + 0.37 P_D^{-1.57} \rho V(k)} \quad (12)$$

III. 최적제어문제로의 수식화

이 장에서는 II장에서 설명한 근사화된 PDA 필터의 추정오차 공분산행렬을 근거로, 추정오차의 평균제곱

을 최소화하는 검출문턱값의 선택을 최적제어문제로 수식화하도록 한다. 먼저, 추정오차의 평균제곱은 아래와 같이 쓰여진다.

$$\begin{aligned} E[|x(k) - \hat{x}(k|k)|^2 | Z^{k-1}] &= \text{tr} E[P(k|k) | Z^{k-1}] \\ &\approx \text{tr} P(k|k-1) - \hat{q}_2(k) \text{tr} K(k)S(k)K(k)^T \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 tr 은 대각합(trace)을 말하며, 제어변수인 검출문턱값 ($-\ln P_F(k)$)은 거짓검출확률 $P_F(k)$ 를 포함으로서 얻을 수 있다. 여기서 신호대잡음비 SNR은 주어진 값으로 가정하자. 따라서, 최적 검출문턱값 선택문제는 부등식의 제한조건을 가진 다음과 같은 비선형 최적제어문제로 쓰여질 수 있다:

$$\min_{P_F(k)} \text{tr} P(k|k-1) - \hat{q}_2(k) \text{tr} K(k)S(k)K(k)^T \quad (13)$$

제한조건은 $0 < P_F(k) \leq 1$ 이다. 식 (12)의 $P(k|k-1)$, $K(k)$, 그리고 $S(k)$ 는 입력변수 $P_F(k)$ 함수가 아니라, $F(k)$, $Q(k)$, $R(k)$ 에 따라 결정되어지므로, 식 (13)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\max_{P_F(k)} \hat{q}_2(k) \quad (14)$$

추정오차의 평균제곱을 최소화하는 검출문턱값의 선택문제가 III장에서 보았듯이 정보감축인자를 최대화하는 거짓검출확률을 구하는 문제로 바뀌었다. 간단한 식의 표현을 위해 시간 index k 를 빼고, 식 (2)와 (5)를 식 (12)에 대입하여 \hat{q}_2 를 정리하면,

$$\hat{q}_2 = \frac{0.997 P_F^{(1+SNR)}}{1 + 0.37 n_k P_F \frac{(-0.57+SNR)}{(1+SNR)}} \quad (15)$$

이다. P_F 에 대해 \hat{q}_2 를 일차 미분을 영으로 둬으로써 \hat{q}_2 를 최대화하는 P_F 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{q}_2}{\partial P_F} = 0 = & \frac{1}{1+SNR} P_F^{-\frac{SNR}{1+SNR}} \Delta - 0.37 n_k \frac{-0.57+SNR}{1+SNR} P_F^{-\frac{0.57}{1+SNR}} \\ & \Delta^2 \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 $\Delta = 1 + 0.37 n_k P_F \frac{-0.57+SNR}{1+SNR}$ 이다. 식 (16)이 영

이 되기 위해서는 분모항이 무한대가 되든지 분자항이 영이어야 한다. 분자항을 영으로 만드는 최적의 P_F 는

$$P_F^* = \left(\frac{1}{0.37 n_k (-1.57 + SNR)} \right)^{\frac{-1 + SNR}{-0.57 + SNR}} \quad (17)$$

으로 유일한 값이다. P_F 는 항상 영보다 큰 값이어야 하므로, $SNR > 1.57$ 이어야 한다. 또한, 분모항이 무한대가 되는 P_F 는 존재하지 않는다. 따라서, 식 (17)은 추정오차의 평균제곱을 최소화하는 거짓검출확률의 닫힌 형태의 최적해이다.

IV. 수치실험

표적의 운동모델은 2차원공간에서의 등속운동을 가정하고, 위치성분이 측정된다고 가정하였다. 측정 샘플링 주기 T 는 1초, 신호대잡음비는 10dB로, 전체 추적 시간은 100초로 두었다. 추정오차 상호분산행렬 $P(0|0)$ 은 참고문헌 [1]에서 제안한 방법으로 초기화하였다. 이 경우 고정된 거짓검출확률 $P_F = 0.05$ 로 둔 경우와 제안된 최적의 거짓검출확률 P_F^* 로 구한 경우의 위치 추정오차의 평균제곱근값을 Monte Carlo 시뮬레이션을 통해 얻었다. 그림 1은 식 (17)에 나타난 닫힌 형태의 최적의 거짓검출확률을 점선으로 표시하였으며, 최적의 거짓검출확률은 초기에는 10^{-2} 이었으나, 10초후부터는 정상상태값 3×10^{-2} 에 도달하였다. 그림 2는 위치 추정오차의 평균제곱근을 나타내었으며, 거짓검출확률을 고정된 5×10^{-2} 로 둔 경우보다, 최적의 값으로 둔 경우가 작은 것을 알 수 있다.

V. 결론

이 논문에서는 상태 추정오차의 평균제곱을 최소화하는 검출문턱값의 최적제어 방법을 제시하고 닫힌 형태의 최적해를 구한다. 근사화된 PDA필터의 공분산행렬식과 정보감축인자를 바탕으로, 비선형 최적제어문제로 수식화한 후, 닫힌 형태의 최적제어해를 구했다. 이 결과는 검출문턱값의 실시간 선택에 적용되어 질 수 있다.

참고문헌

[1] Y. Bar-Shalom and T. E. Fortmann, *Tracking and Data Association*, Orlando, FL: Academic Press, 1988.

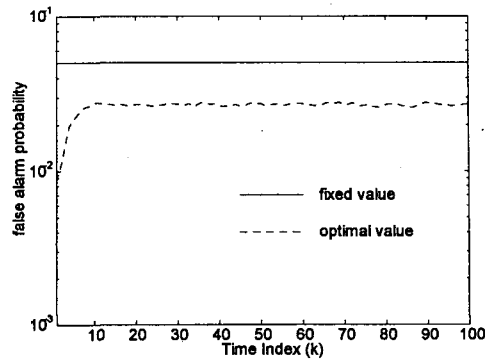


그림 1. 최적의 거짓검출확률

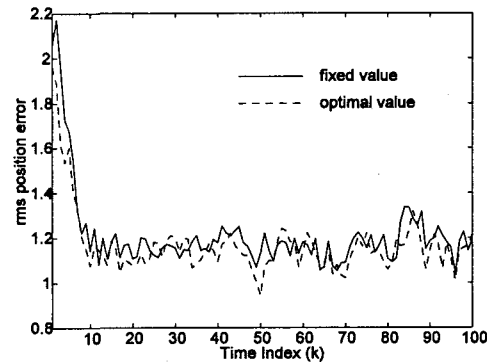


그림 2. 위치 추정오차의 평균제곱근

[2] T. E. Fortmann, Y. Bar-Shalom, M. Scheffe, and S. B. Gelfand, "Detection thresholds for tracking in clutter-A connection between estimation and signal processing," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-30, pp. 221-229, Mar. 1985.

[3] S. B. Gelfand, T. E. Fortmann, and Y. Bar-Shalom, "Adaptive detection threshold optimization for tracking in clutter," *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-32, pp. 514-523, Apr. 1996.

[4] D. J. Kershaw and R. J. Evans, "A contribution to performance prediction for probabilistic data association tracking filters," *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-32, pp. 1143-1147, July 1996.

[5] G. van Keuk and S. S. Blackman, "On phased-array radar tracking and parameter control," *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-29, pp. 186-194, Jan. 1993.