연속 시간 어핀 Takagi-Sugeno 퍼지 제어 시스템의 안정도

The Stability of Continuous Time Affine Takagi-Sugeno Fuzzy Control System

김은태, 이희진, 김동연*

국립한경대학교 제어계측공학과
국립한경대학교 전자공학과*

Abstract

In recent years, many studies have been conducted on fuzzy control since it can surpass the conventional control in several respects. In this paper, a novel approach to the stability analysis of the continuous-time affine Takagi-Sugeno fuzzy control systems is proposed. The suggested analysis method is easily implemented by the recently spotlighted convex optimization techniques called Linear Matrix Inequalities (LMI).

I. 서 론

Sugeno형 퍼지 제어는 모델 기반 퍼지 제어라는 최근의 연구방향에서 가장 활발한 연구가 진행되는 분야이다. 이는 1985년 Takagi와 Sugeno에 의해 제안된 퍼지 모델 (편의상 본 논문에서는 TS 모델이라 칭함)에 근거한 방법으로 그 안정도에 대한 많은 연구 결과가 발표되었다.

그 중 가장 주목할 만한 연구로는 Tanaka와 그의 동료들이 발표한 TS퍼지 시스템의 점근 안정도를 보장하는 충분조건으로, 그는 [1-3]로 이어지는 일련의 논문에서 TS모델의 여러 부시스템에 대한 공통 리아프노프 함수라는 개념으로 이 문제를 접근하였다. 이 외에도 많은 제어 학자들이 TS 시스템이나 이와 비슷한 시스템의 안정도 해석에 참여하였다.

그러나 이들은 모두 후건부에 상수항을 가지고 있지 않은 선형 TS 퍼지 시스템의 안정도에 대한 연구로 Sugeno의 최초 논문 [4]에서 사용한 후건부에 상수항을 포함하고 있는 어핀 TS 퍼지 시스템의 안정도에 대해서는 거의 연구가 진행되지 않았다.

따라서 본 논문에서는 연속 어핀 TS 퍼지 시스템에 대하여 안정성을 보장하는 조건을 유도하고, 이 조건을 선형 행렬 부등식의 형태로 바꾸어 수치적으로 다루도록 한다.

II. 선형 TAKAGI-SUGENO 퍼지 시스템과 안정 조건

선형 TS 퍼지 시스템은 다음의 형태를 취한다.

R_i : If $x_1(t)$ is M_{i1}, $\cdots$ and $x_n(t)$ is M_{in}

$$\text{then } \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x} \tag{1}$$

여기서 $\boldsymbol{x}^T(t) = [x_1(t) \;\; x_2(t) \;\; \cdots \;\; x_n(t)]$이고 R_i은 i번째 퍼지규칙이고 $M_{i1}, M_{i2}, \cdots, M_{in}$ 퍼지변수이다. 이 시스템의 입출력 식은 (2)로 나타나게 된다.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}}{\sum_{i=1}^{r} w_i}, \quad w_i = \prod_{j=1}^{n} M_{ij}(x_j) \tag{2}$$

식 (2)의 안정조건은 정리 1과 같다.

정리 1 [1-3]

(2)로 나타나는 연속 선형 TS 퍼지 시스템은 다음을 만족하는 공통 양한정 행렬 P가 존재하면 안정하다.

$$A_i^T P + PA_i < 0 \tag{3}$$

이 밖에도 선형 TS 시스템의 안정도에 대해서는 많은 연구가 있었지만 어핀 TS 퍼지 시스템의 안정도에 대한 연구 결과는 미비한 것이 사실이다. 다음 장에서는 어핀 TS 퍼지 시스템의 안정 조건을 제시하고 선형 행렬 부등식의 문제로 변환한다.

III. 어핀 TAKAGI-SUGENO 퍼지 시스템과 안정도

어핀 TS 퍼지 시스템은 다음의 IF-THEN형식을 취한다.

R_i : If $x_1(t)$ is M_{i1}, $\cdots$ and $x_n(t)$ is M_{in},

$$\text{then } \dot{x} = A_i x + \mu_i \tag{4}$$

선형의 경우에서와 같이 그 입출력은 다음의 식으로 나타나게 된다.

$$\dot{x} = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i (A_i x + \mu_i)}{\sum_{i=1}^{r} w_i} \quad w_i = \prod_{j=1}^{n} M_{ij}(x_j) \tag{5}$$

가정 1

(1) 원점 $x=0$에 대하여 한 개의 퍼지 규칙만이 반응하는 것으로 한다. 이때 그 규칙을 R_ξ로 한다.

$$w_\xi(0)=1, \ w_i(0)=0, (i=1,\cdots,r, \ i\neq\xi)$$

(2) $w_\xi(0)=1$인 $i=\xi$인 퍼지 규칙에 대해서는 상수항 μ_ξ 은 0이다.

$$\mu_\xi = 0$$

정리 2

(4)로 나타나는 어핀 TS 퍼지 시스템은 모든 규칙 R_i에 대하여 다음을 만족하는 공통 양한정 행렬 P가 존재하면 안정하다:

$$x^T(A_i^T P + PA_i)x + \mu_i^T P x + x^T P \mu_i < 0$$

증명) 생략

위의 정리의 결과를 가정1과 결합하여 $i=\xi$인 경우와 $i\neq\xi$의 경우로 나누어 생각한다.

(i) $i=\xi$인 경우 가정 1에 의하여 원점의 R_ξ의 소속도는 1이고 상수항은 0이다. 이 경우 정리 2의 전제 조건은 R_ξ에 반응하는 0아닌 모든 x에 대하여

$$x^T(A_\xi^T P + PA_\xi)x < 0$$

라는 조건으로 줄게 되고 이는 다음의 행렬 부등식으로 쓸 수 있다.

$$A_\xi^T P + PA_\xi < 0$$

(ii) 그 외의 퍼지 규칙 R_i ($i\neq\xi$)에 대하여 다음의 함수를 정의한다.

$$F_{io}(x) \equiv x^T(A_i^T P + PA_i)x + \mu_i^T P x + x^T P \mu_i,$$

퍼지 규칙 R_i ($i\neq\xi$)과 관련된 상태 공간의 영역을 다음과 같은 2차 식으로 표현한다. 편의상 x_q ($q=1,\cdots,n$)에 대하여 위의 조건을 이차 부등식 $F_{iq}(x)$의 형태로 바꾸면,

$$F_{iq}(x) \equiv x^T T_{iq} x + 2u_{iq}^T x + v_{iq} \le 0$$

위의 연립 부등식은 참고문헌 [5]에 소개된 S-과정을 통하여 다음의 부등식으로 변형될 수 있다: 있다.

$$\begin{pmatrix} A_i^T P + PA_i - \sum_{q=1}^{n} \tau_{iq} T_{iq} & P\mu_i - \sum_{q=1}^{n} \tau_{iq} u_{iq} \\ \mu_i^T P - \sum_{q=1}^{n} \tau_{iq} u_{iq}^T & -\sum_{q=1}^{n} \tau_{iq} v_{iq} \end{pmatrix} < 0 \tag{6}$$

따라서, 정리 2는 선형행렬부등식 형태로 표현되는 다음의 수정정리 1로 변형된다.

수정정리 1

(4)와 (5)로 나타나는 어핀 TS 퍼지 시스템은 모든 규칙 R_i에 대하여 다음의 선형 행렬 부등식을 만족하는 공통 양한정 행렬 P와 $\tau_{i1} \ge 0$, $\tau_{i2} \ge 0$, $\cdots$ $\tau_{in} \ge 0$가 존재하면 안정하다:

$$A_\xi^T P + PA_\xi < 0, \quad w_\xi(0)=1 \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} A_i^T P + PA_i - \sum_{q=1}^{n} \tau_{iq} T_{iq} & P\mu_i - \sum_{q=1}^{n} \tau_{iq} u_{iq} \\ \mu_i^T P - \sum_{q=1}^{n} \tau_{iq} u_{iq}^T & -\sum_{q=1}^{n} \tau_{iq} v_{iq} \end{pmatrix} < 0 \tag{8}$$

IV. 어핀 TAKAGI-SUGENO 퍼지 시스템의 가안정성

본 장에서는 어핀 TS 퍼지 시스템으로 표현 제어 대상에 대하여 전체 시스템의 안정성을 보장하는 TS 퍼지 제어기의 설계 방식을 제안하도록 한다. 제어기 설계를 단순히 하기 위하여 전건부에 대하여서는 Tanaka가 제안한 병렬 보상 기법(PDC)을 이용한다.

제어 대상 플랜트가 어핀 TS 퍼지 시스템으로 표현된다고 가정한다.

R_i : If $x_1(t)$ is M_{i1}, $\cdots$ and $x_n(t)$ is M_{in}

then $\dot{x} = A_i x + B_i u + \mu_i$ (9)

$$\dot{x} = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i (A_i x + B_i u + \mu_i)}{\sum_{i=1}^{r} w_i} \tag{10}$$

퍼지 제어기는 식(11)과 같이 퍼지 플랜트와 같은 전건부를 공유한다.

L_j : If $x_1(t)$ is M_{j1}, $\cdots$ and $x_n(t)$ is M_{jn}

then $u = K_j x$ (11)

여기서 퍼지 제어기 (11)은 다음의 식으로 표현된다.

$$u = \frac{\sum_{j=1}^{r} w_j (K_j x)}{\sum_{j=1}^{r} w_j} \tag{12}$$

(10)와 (12)을 결합하면 폐루프 어핀 TS 퍼지 시스템은 다음의 식으로 표현된다.

$$\dot{x} = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i^2 (G_{ii} x + \mu_{ii})}{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} w_i w_j} + 2\frac{\sum_{i<j\le r} w_i w_j (G_{ij} x + \mu_{ij})}{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} w_i w_j} \tag{13}$$

여기서

$$G_{ii} = A_i + B_i K_i, \quad \mu_{ii} = \mu_i, \ (i = 1, \cdots, r)$$

$$G_{ij} = \frac{(A_i + B_i K_j) + (A_j + B_j K_i)}{2},$$

$$\mu_{ij} = \frac{\mu_i + \mu_j}{2} \quad (i < j)$$

수정정리 2

식 (10)로 나타나는 어핀 TS 퍼지 시스템은 다음의 선형 행렬 부등식을 만족하는 공통 양한정 행렬 P 와 $\tau_{ijq} \geq 0$ 가 존재하면 식 (12)으로 표현되는 퍼지 제어기에 의해 안정화 될 수 있다.

$$G_{\xi\xi}^T P + PG_{\xi\xi} < 0, \quad w_\xi(0) = 1 \text{ and}$$

$$\begin{pmatrix} G_{ij}^T P + PG_{ij} - \sum_{q=1}^{n} \tau_{ijq} T_{ijq} & P\mu_{ij} - \sum_{q=1}^{n} \tau_{ijq} u_{ijq} \\ \mu_{ij}^T P - \sum_{q=1}^{n} \tau_{ijq} u_{ijq}^T & -\sum_{q=1}^{n} \tau_{ijq} v_{ijq} \end{pmatrix} < 0$$

V.모의 실험

본 장에서는 제안된 퍼지 시스템 안정도에 근거하여 어핀 TS 퍼지 시스템에 대한 제어기를 설계하도록 한다. 제어 하고자하는 시스템은 다음의 식 (14)으로 나타나는 비선형 시스템이다.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + \tanh(\frac{x_1}{2}) + x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + u \end{cases} \tag{14}$$

우선 4장에 소개된 가안정성에 대한 성질을 이용하기 위하여 (14)의 비선형식을 어핀 TS 퍼지 시스템으로 변형한다. [1-3]등에서 선형 TS퍼지 시스템을 구성한 것과 같은 방식으로 (14)의 시스템을 Jacobian 선형화하여 다음의 어핀 TS 퍼지 시스템을 구성한다.

R_1 : If $x_1(t)$ is M_1,

then $\dot{x} = A_1 x + B_1 u + \mu_1$

R_2 : If $x_1(t)$ is M_2,

then $\dot{x} = A_2 x + B_2 u + \mu_2$ (15)

R_3 : If $x_1(t)$ is M_3,

then $\dot{x} = A_3 x + B_3 u + \mu_3$

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \mu_1=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$
$$A_2=\begin{pmatrix}5/4&1\\2&0\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \mu_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$A_3=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix},\ B_3=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \mu_3=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

그림 1는 전건부의 소속 함수이다.

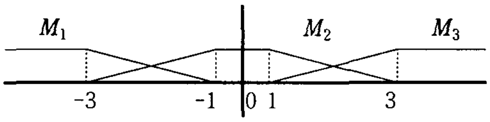

그림 1. 어핀 TS 퍼지 시스템의 전건부 소속함수

위의 플랜트에 대하여 식 (16)으로 주어지는 퍼지 제어기를 설계한다.

L_j : If $x_1(k)$ is M_{j1},

$$\text{then } \boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{K}_j\,\boldsymbol{x}(k) \tag{16}$$

퍼지 제어기는 $\boldsymbol{G}_{11}$, $\boldsymbol{G}_{22}$, $\boldsymbol{G}_{33}$의 고유치가 $(-2, -3)$에 위치하도록 설정한다.

$\boldsymbol{K}_1=(-14.0000 \quad -6.0000)$

$\boldsymbol{K}_2=(-15.8125 \quad -6.2500)$

$\boldsymbol{K}_3=(-14.0000 \quad -6.0000)$

이 경우

$$\boldsymbol{G}_{22}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{G}_{22}-\boldsymbol{P} < 0$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{G}_{ij}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{G}_{ij}-\boldsymbol{P}-\tau_{ij1}\boldsymbol{T}_{ij1} & \boldsymbol{G}_{ij}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\mu}_{ij}-\tau_{ij1}\boldsymbol{u}_{ij1}\\ \boldsymbol{\mu}_{ij}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{G}_{ij}-\tau_{ij1}\boldsymbol{u}_{ij1}^T & \end{pmatrix} < 0$$

여기서 (i, j) = (1, 1), (3, 3), (1, 2), (2, 3)

위 시스템의 제어 결과는 그림 2와 같다.

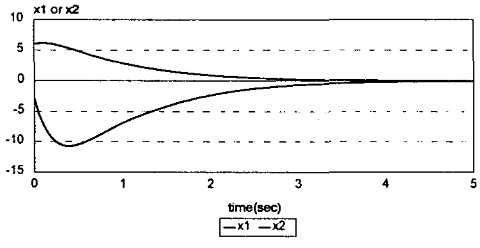

그림 2. 퍼지 제어되는 비선형 시스템의 응답

VI. 결론

본 논문에서는 어핀 TS 퍼지 시스템의 안정성과 가안정성을 다루었다. 우선 TS 퍼지 시스템의 안정 조건을 유도하였고 S-과정을 통하여 선형 행렬 부등식 문제로 바꾸어 수치적 해법을 제시하였다. 또 끝으로 컴퓨터 모의 실험을 통하여 제안한 조건의 타당성을 확인하였다.

REFERENCE

[1] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 45, 136-156, 1992

[2] H. O. Wang, K. Tanaka, M. F. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 4, No. 1, pp 14-23, Feb 1996.

[3] K. Tanaka. T. Ikeda and H. O. Wang, "An LMI approach to fuzzy controller designs based on the relaxed stability conditions," in *Proc. of IEEE Int'l Conf. Fuzzy Systems* (FUZZ/IEEE), pp.171-176, 1997.

[4] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Trans. Systems Man Cybernet*, vol. 15, No. 1 , pp 116-132, 1985.

[5] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM: Philadelphia, 1994