1999年度 大韓電子工學會 秋季綜合學術大會論文集 第22卷 第2號 99/11

LMI를 이용한 LQ-서보형 PI제어기 설계

김 상 엽(金 相 燁), 서 병 설(徐 丙 卨)
한양대학교 전자통신공학과,한양대학교 전자통신공학과
전화 : (02) 2290-0364 / 팩스 : (02) 2281-9912

LQ-Servo PI Controller Design Using LMI

Sang-Yeob Kim , Byung-Suhl Suh
Department of Electronic Communication Engineering
Hanyang University
e-mail : sangyeob@hymail.hanyang.ac.kr
bssuh@email.hanyang.ac.kr

Abstract

This paper concerns a development of LQ-servo PI controller design on the basis of time-domain approach. This is because the previous design techniques developed on the frequency-domain is not well suited to meet the time-domain design specifications. Our development techniques used in this paper is based on the convex optimization methods including Lagrange multiplier, dual concept, semidefinite programming.

I. 서 론

최근에 이론적으로 정교한 제어기 설계이론이 많이 개발되었으나, 상용화의 문제점과 설계상의 간편성 때문에 아직도 산업계에서는 PID제어기가 각광을 받고 있다. PID 제어기 설계방법에 최적이론의 도입은 수치적 계산이 복잡하고 난해하여 온라인 동조개발을 어렵게 하고 다변수 시스템에서는 이 어려움이 더욱 가중되어 디카플링(decoupling)을 통한 순차적 루프차단(sequential loop closing) 방법[1][2]등이 사용되어 왔으나 H^{∞}[3]와 같은 새로운 강인 최적제어기 설계이론들이 창출되어 이들을 활용하는 강인 최적 PID 제어기 설계기법들이 연구되어왔다. 최근에 Grimble[4]과 Mattezzoni와 Rocco[5] 등은 방법을 활용하려는 시도가 있었는데, 전자의 방법은 어떤 특정한 부류의 플랜트에서만 사용 가능하여 매우 제한적이며 구한 PID는 매우 복잡한 구조를 갖고 있어 제어기 설계가 매우 난해하여져 실용성의 문제가 있으며 후자의 방법은 3개의 설계 파라미터로 구성된 PID를 단지 하나의 변수를 갖고 있는 단일 설계 파라미터로 유도하였기 때문에 설계의 유연성에 문제가 되어 실제가 되어 성능향상을 가하는 데 문제가 있다. 이런 문제점들을 극복할 수 있고 다변수 시스템을 효율적으로 다루기 위해 LQ-서보형 PI제어기가[6] 고려되었다. 여기서 LQ-서보형 PI 제어기란 MIT의 Athans[7]에 의해 제시되었던 LQ-서보가 PI제어기로 해석할 수 있음을 말한다. 기존의 LQ-서보설계기법 혹은 LQ-서보형 PI제어기 설계 기법[6][8][9] 이나 강인 제어 설계기법으로 잘 알려진 H_2나 H_{∞}방법 등 대부분의 강인 제어기 설계방법들은 주파수 영역의 설계사항에 의해 개발되었으므로 시간영역에서의 설계사양인 정착시간(settling time), 상승시간(rising time), 오버슈트(overshoot)등을 만족하는 제어기의 설계가 잘 이루어질 수 없음이 지적되어왔다.

그래서 본 연구에서는 LQ-서보형 PI 제어기가 시간영역에서 설계사양들을 좀 더 효율적으로 만족시킬 수 있도록 시간영역에서의 설계방법을 볼록형 최적화기법(convex optimization)기법에 기초하여 개발하였다. 그 구체적인 설계방법은 가격함수를 최소로 하는 입력을 구하는 프라이멀(primal)문제를 라그랑지(Lagrange)기법[10][11]을 도입하여 최소-최대(min-max)에 의해 다목적(multiobjective)을 푸는 문제로 변환을 시도한 후, 계산을 용이하게 하기 위해 강한 쌍대성원리(strong duality)[10][11]를 이용하여 쌍대함수(dual function)[11][12]인 최대-최소(max-min)문제로 변환을 하였다. 그리고 이 쌍대함수를 풀기 위해 LMI(LinearMatrix Inequality)[10][11][12][13][14]에 기초한 SDP(semidefinite programming)[10][12]를 사용하여 강인한 LQ-서보형 PI제어기의 설계변수값을 구하는 방법을 제시하였다.

II. 본 논문에서 제안한 방법

LQ-서보형 PI제어기의 구조는 다음 그림 1과 같으며 LQ-서보형 PI제어기란 Athans에 의해 소개된 LQ-서보구조[8]를 출력이 피이드백된 제어이득 G_y를 비례이득, 정상상태의 오차를 줄이기 위해 사용된 적분기의 제어이득 G_z를 적분이득으로 해석한 것이다.

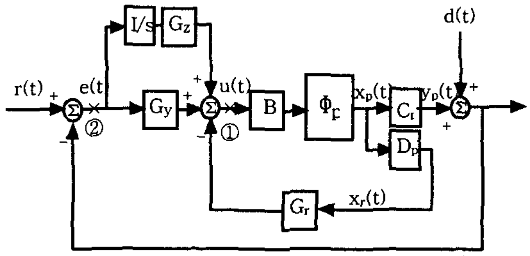

그림 1 LQ-서보형 PI제어기 구조
Fig. 1 Structure Of LQ-Servo PI Controller

LQ-서보형 PI제어기에 관한 상태공간식과 특성은 기존의 연구들에서 상세히 설명되었기 때문에 다음과 같이 간략히 서술한다. LQ-서보형 PI제어기는 안정도-강인성이 보장되고 있지만 성능-강인성을 부여하기 위해 개발된 방법으로 그림 1에서 플랜트의 상태변수, $x_p(t)$,의 차원이 n이라고 할 때 그 중 m개의 상태변수를 출력변수, $y_p(t)$, 로 선정하여 성능-강인성을 부여하고자 한 것이다. 나머지 상태변수, $x_r(t)$,는 부분 상태 궤환으로 안정도-강인성을 더욱 향상시키는 데 기여할 수 있다. 그리고 정상상태 오차를 제거하기 위해 출력의 적분을 상태에 추가하여 덧붙임 상태(augmented state), $x(t)=[z_p(t)\ y_p(t)\ x_r(t)]^T$,가 형성되고 차원은 $n+m$이 되며 덧붙인 상태공간식은 관계식(1)로 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}(t)=Ax(t)\ +\ Bu(t) \tag{1}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & C_p \\ 0 & A_p \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0 \\ B_p \end{bmatrix} \tag{2}$$

그리고 출력식은 식(3)으로 주어진다.

$$z(t)=Cx(t) \tag{3}$$

여기서 제어법칙은 $u(t)=Kx(t)$이고 K는 제어이득으로 가격함수식 (4)를 최소로 하고 식(5)의 대수리카티식(algebraic riccati equation)을 풀어서 구한다. 여기서 $K=-[\,G_z\ G_y\ G_r]$ 로서 G_z는 적분기의 이득이고 G_y은 비례이득이며 G_r은 부분상태궤환 이득이다.

$$J=\int_0^{\infty}[x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t)]\ dt \tag{4}$$

$$A^TP+PA+C^TC-RBR^{-1}B^TP=0 \tag{5}$$

그리고 LQ-서보형 PI는 그림 1 구조의 ①에서 절단한 입력측에서 보면 완전한 LQR 문제와 같은 구조이기 때문에 LQR의 특성인 안정도-강인성을 이어받으면서 출력측 상태를 이용하여 성능-강인성의 향상에 대한 문제로 다룰 수 있다.

기존의 방법들은 가격함수식 (4)의 가중치인 Q와 R을 설계변수로 하여 주파수 영역에서 루프전달함수의 저주파와 고주파에서 특이값 일치방법[6][8][9] 및 볼록형 최적화기법을 사용하는 루프형상기법에 의존하고 있다. 그래서 시간영역에서의 설계사양이 잘 부합되지 않는다.

LQ-서보형 PI제어기가 시간영역에서의 설계사양이 고려되어 설계가 되기 위해서 공간모델식 (1)에 외란항을 첨가하여 식(6)으로 나타냈다.

$$\dot{x}(t)=Ax(t)\ +\ Bu(t)\ +B_w w(t) \tag{6}$$

그리고 주어진 설계사양인 오버슈트, 상승시간, 정착시간 등을 만족하면서 동시에 가격함수식 (4)를 최소화하는 입력을 구하며 구한 입력은 포화(saturation)되지 않도록 구속(bound)되어져야 한다. 이를 구체적으로 실현시키기 위해서는 우선 오버슈트에 관련된 출력 $z(t)$의 에너지를 $z_{\max}$로 구속(bound)시키며 구속식은 (7)과 같고 상승시간(rising time)과 정착시간(settling time)을 조정하기 위해 지수가중치를 가격함수에 도입하는 기법[7]을 이용한다. 또한 가격함수식 (4)를 최소화하는 최적값을 구하는 입력 $u(t)$의 에너지가 포화(saturation)되는 것을 막기 위해 입력의 에너지를 $u_{\max}$로 구속시키는 것이 필요하며 구속식은 (8)로 나타낸다

$$\int_0^{\infty} z^T z dt\ \le\ z_{\max} \tag{7}$$

$$\int_0^{\infty} u^T u dt\ \le\ u_{\max} \tag{8}$$

그리고 시간영역에서의 설계사양들을 만족하면서 동시에 최적가격함수식 (4)를 최소화하고 입력 에너지가 포화되지 않도록 하는 입력, $u(t)$,를 구한다는 것은 사실상 두 개의 목적함수(two objective)를 다루는 문제가 된다. 이러한 다목적 문제를 시간영역 및 상태공간에서 효율적으로 다루기 위해서는 구속조건하에서 J를 최소로 하는 입력을 구하는 원(primal)문제를 라그랑지기법[10][11]을 이용하여 변환시켜야 한다. 좀더 구체적으로 서술하면 구속조건식 (7)과 (8)이 라그랑지곱수(Lagrange multiplier)들 즉 λ와 μ에 의해 표현되고 이들이 가격함수와 상관관계를 갖기 위해 가격함수식(4)에 더하여지고 새로운 가격함수인 라그랑지안(Lagrangian)을 형성한다. 또한 상승시간과 정착시간을 효율적으로 조정하기 위해서 라그랑지안에 지수가중치를 도입하는 기법을 이용한다. 그리고 시간영역의 설계사양들을 만족시키기 위한 효율적인 제어를 하기 위해서는 오버슈트를 나타내는 출력 $z(t)$를 가능한 최대화하고 입력 $u(t)$를 포화되지 않는 범위내에서 최대값을 유지하도록 하여야 한다. 또한 새로운 가격함수인 라그랑지안을 최소화하는 입력을 구하여야 한다. 따라서 라그랑지안에 대한 최소-최대(min-max)문제로서 다룰 수 있으나 이러한 최소-최대문제는 입력 $u(t)$을 구할 때 라그랑지곱수들인 λ와 μ가 변수로서 작용하여 현실적으로 계산하는 데 어려움이 있다. 그래서 강한 쌍대성원리(strong duality)를 이용하여 최대-최소(max-min)문제인 쌍대함수로 변환한다면 λ와 μ를 고정시켜 최소입력을 용이하게 구할 수 있고 또한 라그랑지안을 최대로 하는 λ와 μ도 구할 수 있어 최소-최대문제의 계산이 가능하여 진다.

지금까지 언급한 구체적인 설계기법을 좀 더 구체적으로

서술하면 다음과 같다.

라그랑지 곱수를 이용하여 가격함수에 설계사양을 관련되어지게 하기 위해서는 구속조건식 (7)과 (8)을 규준화(normalization)를 하여 식(9)와 (10)으로 나타낸다.

$$\int_0^\infty \frac{z^T z dt}{z_{\max}} - 1 \le 0 \tag{9}$$

$$\int_0^\infty \frac{u^T u dt}{u_{\max}} - 1 \le 0 \tag{10}$$

규준화된 구속식 (9)와 (10)에 음이 아닌(non-negative) 라그랑지 곱수들 즉 μ와 λ를 곱하고 가격함수식 (4)에 더함으로서 새로운 가격함수인 라그랑지안이 식(11)로서 표현될 수 있다.

$$J_L(u,\mu,\lambda) = J + \mu\left(\int_0^\infty \frac{z^T z dt}{z_{\max}} - 1\right) + \lambda\left(\int_0^\infty \frac{u^T u dt}{u_{\max}} - 1\right) \tag{11}$$

식(11)을 정리하여 다시 쓰면 식(12)이 되며

$$J_L(u,\mu,\lambda) = \int_0^\infty (x(t)^T [Q + \mu \frac{1}{z_{\max}} Q] x(t) + u(t)^T [R + \frac{\lambda}{u_{\max}} I] u(t)) dt - \lambda - \mu \tag{12}$$

식(12)에 상승시간과 정착시간을 효율적으로 조절할 수 있는 것으로 알려진 지수가중치기법을 도입하면 식(13)이 된다.

$$J_{LL}(u,\mu,\lambda) = \int_0^\infty e^{2at} (x(t)^T [Q + \mu \frac{1}{z_{\max}} Q] x(t) + u(t)^T [R + \frac{\lambda}{u_{\max}} I] u(t)) dt - \lambda - \mu \tag{13}$$

수식을 간편히 하기위해 $Q(\mu) = Q + \mu \frac{1}{z_{\max}} Q$, $R(\lambda) = R + \frac{\lambda}{u_{\max}} I$ 로 대치하면 식(14)으로 나타낼 수 있다.

$$J_{LA}(u,\mu,\lambda) = \int_0^\infty e^{2at} [x(t)^T Q(\mu) x(t) + u(t)^T R(\lambda) u(t)] dt - \lambda - \mu \tag{14}$$

다음으로는 시간영역에서의 설계사양들을 만족시키며 식(14)를 최소로 하는 입력을 구하는 두 개의 목적함수를 푸는 최소-최대문제를 다루기로 한다.

이를 위해 식(14)의 J_{LA}이 상승시간, 정착시간, 오버슈트와 상관관계가 있으므로 이들을 향상시키기 위해서는 가능한 오버슈트의 최대값을 크게 하여야 하고 명령추종(command following)을 좋게 하거나 외란에 강인하기 위해서는 입력이 가능한 최대가 되도록 유지하여야 한다. 그리고 변환된 가격함수인 라그랑지안을 최소화하는 최소입력을 구하기 위해 J_{LA}를 입력에 관해 최소화하면 두 개의 목적을 갖는 문제인 최소-최대 문제로 변환이 되고 식(15)로 표현될 수 있다.

$$\min_{u(t)} \max_{\lambda \ge 0, \mu \ge 0} J_{LA} \tag{15}$$

식(15)의 최소-최대 문제는 입력 $u(t)$을 구하는 데 라그랑지곱수들이 변수로 작용하여 현실적으로 계산하는 데 어려움이 있으므로 강한 쌍대성원리를 이용하여 J_{LA}에 관한 쌍대 함수로서 표현하면

$$\min_{u(t)} \max_{\lambda \ge 0, \mu \ge 0} J_{LA} = \max_{\lambda \ge 0, \mu \ge 0} \min_{u(t)} J_{LA} \tag{16}$$

식(16)이 성립하고 최대-최소문제로 전환된다. 이 최대-최소문제를 푸는 방법은 λ와 μ를 어떠한 상수로서 고정시킨 후에 $\min_{u \ge 0} J_{LA}(u,\mu,\lambda)$을 구하고(단계 1) 그 다음에 λ와 μ를 변화시켜 J_{LA}의 최대값 즉 $\max_{\lambda \ge 0, \mu \ge 0} J_{LA}(u,\mu,\lambda)$을 구한다(단계 2).

단계 1: 먼저 μ와 λ를 어떠한 상수로 고정시킨 후에 $\min_{u(t)} J_{LA}(u(t),\mu,\lambda)$을 구하는 방법을 좀 더 구체적으로 서술하면, 최소문제를 먼저 풀기 위해서는 식(14)에서 μ와 λ의 합이 제거된 식(17)을 고려하는 문제가 된다.

$$J_{LA1}(u,\mu,\lambda) = \int_0^\infty e^{2at} [x(t)^T Q(\mu) x(t) + u(t)^T R(\lambda) u(t)] dt \tag{17}$$

여기서 $R(\lambda) = R + \frac{\lambda}{u_{\max}} I$, $Q(\mu) = Q(\mu)^T$인 양의 반한정대칭행렬(positive semidefinite)이고 $R(\lambda) = R(\lambda)^T$인 양의 한정대칭행렬로서 전형적인 LQR문제가 되며 이 문제에 대한 가격함수의 최소값은 $B_w^T P B_w$이고 여기서 P는 대수리카티식 (18)를 만족한다.

$$(A + aI)^T P + P(A + aI) - PBR(\lambda)^{-1} BP + Q(\mu) = 0 \tag{18}$$

여기서 A와 B는 식(6)에서 주어진 것이고 $Q(\mu)$와 $R(\lambda)$는 식(14)에서 주어진 것이다. LQR의 해를 LMI로 풀기 위해서는 다음의 정리[10]를 이용해야 한다.

정 리 : 만약 양의 한정행렬 P_1가

$$(A + aI)^T P_1 + P_1(A + aI) - P_1 BR(\lambda)^{-1} BP_1 + Q(\mu) \ge 0$$

을 만족한다면

$P_1 \le P$을 만족한다

따라서 정리에 의해 $\min_{u(t)} J_{LA}(u(t),\mu,\lambda)$의 문제를 변환하면 구속조건식 (19)와 (20)하에서 $B_w^T P_1 B_w$식을 최대화하는 문제로 변환된다.

$$(A + aI)^T P_1 + P_1(A + aI) - P_1 BR(\lambda)^{-1} BP_1 + Q(\mu) \ge 0 \tag{19}$$

$$\mu \ge 0, \lambda \ge 0 \tag{20}$$

식(19)를 LMI를 이용하여 풀기 위해서는 슈르컴플리먼트(Schur complement)[10][11]를 이용해 식(21)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} (A + aI)^T P_1 + P_1(A + aI) + Q(\mu) & P_1 B \\ B^T P_1 & R(\lambda) \end{bmatrix} \ge 0 \tag{21}$$

따라서 $\min_{u(t)} J_{LA}(u(t),\mu,\lambda)$을 구하는 방법은 구속식(20)과 (21)하에서 $B_w^T P_1 B_w$을 최대화하는 문제로 바뀌게 된다.

단계 2: 다음으로는 쌍대함수의 최대문제를 풀기 위해 위에서 구한 최소문제인 $\min_{u(t)} J_{LA}(u(t),\mu,\lambda)$에 라그랑지안을 최대로 하는 μ와 λ를 구해야 한다. 이것은 $\max_{\lambda \ge 0, \mu \ge 0} \min_{u(t)} J_{LA}(u(t),\mu,\lambda)$을 구하는 식이 되고 구속식(20)과 (21)하에서 $B_w^T P_1 B_w - \mu - \lambda$을 최대화하는 문제로 바뀌게 된다. 그리고 가격함수를 최소화하면서 시간영역에서의 설계사양들을 고려한 최적의 이득 K는 $K = -R(\lambda)^{-1} B^T P$를 통해 구해지고 여기서 구한 $K = -[\, G_z \;\; G_y \;\; G_r]$로부터 G_z, G_y, G_r를 구한다.

다음으로는 예제를 통해 LQ-서보형 PI제어기를 설계하도록 한다.

Ⅲ. 예 제

(시스템의 상태 공간 모델식)

$$\dot{x}_p(t) = Ax_p(t) + B_p u(t) \quad , \quad z_p(t) = C_p x_p(t)$$

$$A_p = \begin{bmatrix} -1.4600 & 0.0000 & 2.4276 \\ 0.1643 & -0.4000 & -0.3788 \\ 0.3107 & 0.0000 & -2.2300 \end{bmatrix}$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0.4182 & 5.2026 \\ 0.3921 & -0.1245 \\ 0.5186 & 0.0236 \end{bmatrix}$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$R = \rho \cdot I = 0.001 \cdot I$$

주어진 시스템의 고유값(eigenvalue)의 집합인 스펙트럼(spectrum)은 {0,0,-0.4000,-0.8950,-2.7950}이고 본 논문에서 제안한 단계 1과 단계 2에 의한 설계방법에 의한 스펙트럼은 {-112.5928,-15.5424,-6.0668,-4.0795,-4.1565}가 되어 설계사양을 만족하면서 시스템을 안정화(stabilization)시켰다. 설계파라미터들인 $u_{max} = 10$, $z_{max} = 1.2$, $\alpha = 5$로 선정한 본 논문에 의한 스텝응답은 그림 2에 나타내었다.

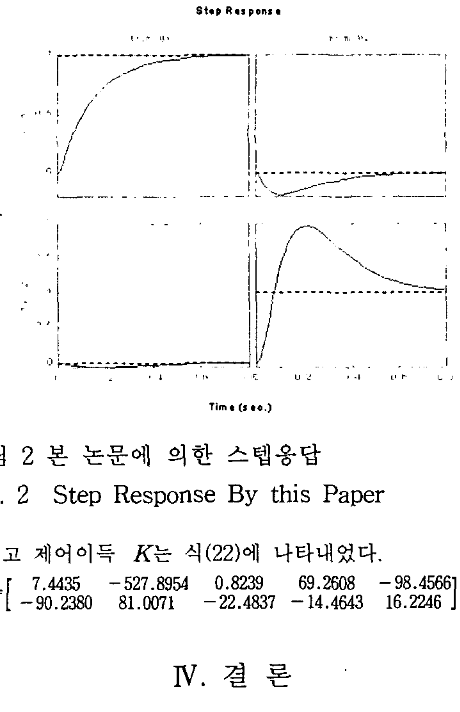

그림 2 본 논문에 의한 스텝응답

Fig. 2 Step Response By this Paper

그리고 제어이득 K는 식(22)에 나타내었다.

$$K = \begin{bmatrix} 7.4435 & -527.8954 & 0.8239 & 69.2608 & -98.4566 \\ -90.2380 & 81.0071 & -22.4837 & -14.4643 & 16.2246 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Ⅳ. 결 론

본 연구에서는 시간영역에서의 설계사양을 만족하면서 입력 외란에 강인한 최적 LQ-서보형 PI제어기를 LMI에 기초한 SDP (semidefinite programming)를 사용하여 설계하였다. 그리고 다목적 함수의 문제를 해결하기 위해 라그랑지기법을 도입하였다. 단계 1과 단계 2의 설계기법에 의해 시간영역에서의 구속조건들인 u_{max}, z_{max}, α를 임의로 설정하여 모의실험(simulation)을 한 결과 설계사양들인 오버슈트, 상승시간, 정착시간등이 만족스럽게 나타났다. 그러나 z_{max}는 출력의 기준값에 대한 변화량에 관해 2-norm의 제곱을 취한 값을 구속시키므로 설계파라미터의 설정값에 따라 오버슈트를 민감하게 조절할 수가 없었다. 따라서 출력의 오버슈트가 설계파라미터에 따라 민감하게 나타낼 수 있는 수학적 표현방법에 관한 연구가 요구된다.

Ⅴ. 참고문헌

[1] 서병설, "다변수 제어 시스템의 동조에 대한 연구," 대한 의용 생체 공학회 논문집, 제 8권 2호, 1987

[2] T. Ham and Y. Kim, "Process Identification and PID Tuning in Multivariable Systems," J. of Japan, Vol.31 No.6 pp941~949, 1998

[3] K. Zhou, J. Dogle and K. Glover, Roust and Optimal Control, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1995

[4] M.Grimble, " H_∞ controllers with a PID structure," J. of Dynamic Syst. Meas. and Contr., Vol 112, pp 325-336, 1990

[5] C. Mattezzoni and P. Rocco, "Robust Tuning of PID Regulators Based on Step-Response Identification," European J. of Contr. Vol 3, pp 125~136, 1997

[6] 서병설, "가중치를 이용한 LQ-Servo형 PI제어기 설계", 한국통신학회 게재 예정중, 1999.

[7] M. Athans, Lecture Note on Multivariable Control Systems, M.I.T. Ref. No.840418/6236., 1984

[8] 이응석, 서병설, "블록형최적화기법을 이용한 LQ-Servo형 PI제어기 설계", 대한전자공학회지 게재예정중, 1999.

[9] 윤성오, 서병설, "명령추종과 출력측 외란제거를 위한 LQ-servo 설계", 제어·자동화·시스템 공학회 논문집 제 3권 5호, 1997

[10] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan,"Computer-aided Control System Design Using Linear Matrix Inequalities",Tutorial Workshop, ACC 1994, Baltimore

[11] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe, Course Reader for EE364, Introduction to Convex Optimization with Engineering Applications, Stanford University, 1998.

[12] S. Boyd and L. Vandenberghe, Lecture Note on for EE364: Introduction to convex optimization with engineering applications, Stanford University, 1998.

[13] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory", SIAM, 1994.

[14] S. Boyd and C. Barratt, "Linear Controller Design, Limits of Performance, Prentice-Hall, 1991.

※ 본 연구는 한국과학재단 핵심전문 연구과제(과제번호 : 981-0911-048-2)로 수행되었습니다.