

Lyapunov 방정식을 이용한 위성체 자세 안정화

천현경, 문종우, 이우승*, 박종국
 경희대학교 전자공학과, * sktelecom
 전화 : (0331) 201-2523 / 팩스 : (0331) 201-4968

Attitude Stability of Satellite using Lyapunov equation

Hyun Kyung Chun, Jong Woo Moon, Woo Seong Lee, Jong Guk Park
 Electronics Engineering Kyunghee University
 E-mail : fierte@unitel.co.kr

Abstract

For that the attitude control performance test of the satellite, dynamic analysis of satellite structure performed in reference with KOREASAT, and the equation of motion of rigid bodies was derived. For attitude stability, Lyapunov's stability theorem and state space expression were applied to dynamic equation of satellite. To prove efficiency of our method, simulations are performed and result are shown.

1. 서론

위성체의 자세는 중력경도, 지구자기장, 태양 복사, 지구 대기에 의한 외부교란 토크 등에 의해 교란되어지므로 위성이 지시된 임무를 수행하기 위해서는 자세를 안정화 시켜야 한다. 일반적으로 위성체의 운동방정식은 많은 비선형적인 요소를 가지고 있어 동작분석과 제어기 설계에 많은 어려움이 수반된다. 따라서 본 논문에서는 비선형 운동방정식을 선형화하여 문제를 단순화시키고 안정도 이론에 기초한 제어기 설계를 다룬다.

선형화된 시스템에 기초하여 설계된 선형제어기는 원래의 비선형 시스템을 안정화시킬 수 있다[3]. 그러나, 선형화된 시스템에 기초하여 설계된 제어기는 한정된 동작범위에서만 시스템의 안정성을 보장하며, 외란에 민감한 문제점을 가지고 있다. 따라서 본 논문에서는 Lyapunov 안정도 이론에 기초한 비선형 제어기를 제안한다. 이러한 비선형 제어기는 보다 넓은 동작범위내에

서 시스템의 안정화를 보장할 수 있다[3]. 따라서 본 논문에서는 Lyapunov 방정식을 이용하여 페루프 시스템의 안정성을 보장하는 이득 계수값을 산출한다. 본 논문에서 제시된 제어기의 유효성을 입증하기 위해 모의 실험을 수행하고 그 결과를 제시한다.

2. 위성체 운동방정식

2.1 운동방정식

위성체를 강체로 가정할 경우, 위성체의 회전운동 방정식은 식(1)과 같은 오일러 모멘트 방정식으로 나타낼 수 있다[1].

$$T = \dot{H} + \omega \times H = I \dot{\omega} + \omega \times (I\omega) \quad (1)$$

여기서 T 는 위성체에 작용하는 외부토크, H 는 위성체의 선형각운동량, ω 는 위성체의 관성좌표계에 대한 각속도 벡터, I 는 관성모멘트를 나타낸다. 위성체의 운동방정식을 유도하기 위한 좌표계는 그림 1과 같다.

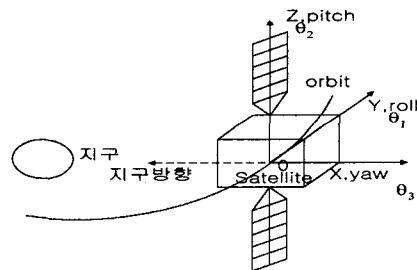


그림1 위성의 LVLH 좌표계

위성체의 관성좌표계에 대한 각속도 ω 는 식(2)와 같다[1].

$$\omega = \begin{bmatrix} S_2 & 0 & 1 \\ C_2C_3 & S_3 & 0 \\ -C_2S_3 & C_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} -S_1C_2 \\ S_1S_2C_3 + S_3C_1 \\ -S_1S_2S_3 + C_3C_1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

식(2)에서 $C \equiv \cos \theta$ 와 $S \equiv \sin \theta$ 이다.

위성체에 작용하는 토크(T)는 중력경도 토크(T_G), 외부교란토크(T_D), 제어토크(T_U)로 구분할 수 있으며, 중력경도 토크는 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_G = \int_{body} r \times \left[-\frac{\mu(R_0+r)}{|R_0+r|^3} \right] dm \quad (3)$$

$$= 3n^2 u \times (I \cdot u)$$

여기서 μ 는 지구의 중력상수, R_0 는 지구중심에서 위성까지의 거리, I 는 위성의 관성텐서, u 는 지구에서 위성체 중심을 가리키는 단위벡터이다.

식(2)와 식(3)을 식(1)에 대입하여 정리하면 복잡한 비선형 운동 방정식이 나오게 되므로, $\theta_j \ll 1$ 이라는 가정하에 운동 방정식을 선형화시킬 수 있다. 따라서 선형화된 위성체의 최종 운동방정식을 나타내면 식(4)와 같으며, 식에서 볼 수 있듯이 피치축은 롤, 요축과 비연계되어 나타내어진다[1].

$$I_y \ddot{\theta}_1 + n(I_x + I_y - I_z) \dot{\theta}_1 - 4n^2(I_x - I_z)\theta_1 = T_y$$

$$I_x \ddot{\theta}_2 - 3n^2(I_x - I_y)\theta_2 = T_x \quad (4)$$

$$I_x \ddot{\theta}_3 - n(I_x + I_y - I_z) \dot{\theta}_1 - n^2(I_y - I_z)\theta_3 = T_x$$

2.2 피치축 제어

피치축 제어를 위해 센서로부터 피치 자세각을 측정하여 모멘텀 휠을 구동하는 입력신호를 결정하는 제어를 설계한다. 위성체의 롤과 요축의 관성 모멘트가 비슷하고($I_x \approx I_y$), 정지궤도 위성의 궤도 각속도($w_0 = 7.272E-5 \text{ rad/s}$)의 제곱항이 무시할 수 있을 정도로 미소한 크기를 갖는다고 가정하면 식(4)의 피치 운동방정식은 다음과 같이 간략화시킬 수 있다.

$$I_y \ddot{\theta} = T \quad (5)$$

입력신호와 출력신호로 모멘텀 휠의 전달함수를 나타내면 다음과 같다.

$$G_{MWA} = \frac{K_{ms}}{T_{ms} + 1} = \frac{T(s)}{U(s)} \quad (6)$$

여기서 T 는 토크 신호, U 는 제어 입력 신호이다. 식(6)을 역 라플라스 변환하면 모멘텀 휠의 미분방정식은

다음과 같다.

$$\dot{\theta} + \frac{1}{T_m} \theta = \frac{K_m}{I_y T_m} u \quad (7)$$

$\theta = x_1$, $\dot{\theta} = x_2$ 로 정의하면 식(7)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T_m} x_2 + \frac{K_m}{I_y T_m} u \quad (8)$$

식(8)을 상태 공간 형태 모델로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{I_y T_m} \end{bmatrix} u$$

$$= Ax + Bu \quad (9)$$

3. 제어기 설계

제어 목적은 식(9)로 표현되는 시스템의 안정화를 보장하는 제어기를 설계하는 것이다. 본 논문에서는 식(10)과 같은 안정화 제어기를 설계한다.

$$u(t) = -Kx(t) \quad (10)$$

식(9)와 식(10)으로부터 페루프 시스템을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) = A_c x(t)$$

따라서 제어 목적은 A_c 를 안정화 시키기 위한 K 를 결정하는 것이며, K 를 결정하기 위해 이때 Lyapunov 방정식을 이용한다. Lyapunov 2차 기법은 시스템에 대한 Lyapunov 함수를 구성하고 이 함수의 시간에 대한 변화율을 조사함으로써 안정도를 검증하는 방법이다[3]. Lyapunov 함수를 다음과 같이 설정한다.

$$V = x^T P x \quad (11)$$

식(11)을 시간에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A_c^T P + P A_c) x = -x^T Q x \quad (12)$$

Lyapunov 방정식은 식(13)과 같이 나타내게 된다.

$$A_c^T P + P A_c = -Q \quad (13)$$

여기서 P 와 Q 는 대칭 정정행렬(symmetric positive-definite matrix)이며 $\dot{x} = A_c x$ 가 안정하기 위한 필요충분조건은 Lyapunov 방정식을 만족하는 대칭 정정행렬 P, Q 가 존재한다는 것이다. 따라서 제어기 설계 목표는

Lyapunov 방정식을 만족하도록 이득 K를 결정하는 것이다. 식 (9)와 식 (10)으로부터 페루프 시스템 A_c 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K_m}{I_z T_m} k1 & -\frac{1}{T_m} - \frac{K_m}{I_z T_m} k2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

이때 대칭 정정행렬 Q를 다음과 같이 설정해주고 식 (13)으로 표현되는 Lyapunov 방정식을 만족하는 K를 설정하고 이에 따른 P가 대칭 정정 행렬임을 확인한다.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, K = [k1 \ k2]$$

이때 P의 각 성분은 다음과 같이 나타난다.

$$b = c = \frac{1}{2gk1} \quad d = \frac{1}{h + gk2} (b + 0.5)$$

$$a = b(h + gk2) + dgk1$$

여기서 $g = \frac{K_m}{I_z T_m}$, $h = \frac{1}{T_m}$ 이다.

4. 모의실험 및 고찰

본 실험에서 사용된 상수값은 KOREASAT의 자료를 참고하였으며, 이득값의 변화에 따른 피치각과 속도의 안정화를 보인다[4].

표 1. 모의실험에 사용된 상수값

I_z	피치축 관성모멘트	3555 in · lb · sec ²
ω_0	궤도 각속도	7.272E-5 rad/sec
T_m	MWA의 시간 상수	1.66 sec
K_m	MWA의 이득	0.0792 in · lb · sec/V
θ_0	초기 피치각	0.175 rad

모의실험은 초기 피치 자세각이 10°인 경우에 대하여 50초 동안 수행하였고, $k1$, $k2$ 이득값의 변화에 따른 응답결과를 보였다.

그림2에서 그림4까지는 $k1$ 을 일정하게 하고 $k2$ 를 변화시켜보았다. 그 결과 이득값이 커질수록 수렴속도는 늦춰지나 피치각의 오버슈트는 작게 생기게 된다.

그림5와 그림6에서 $k2$ 를 일정하게 하고 $k1$ 을 변화시켜보면 이득값이 커질수록 상대적으로 수렴속도가 빨라지고, 오버슈트도 작게 발생한다.

이득값이 감소할 경우 수렴속도는 저하됨을 알 수 있다. 반면에 이득값이 증가할 경우 수렴속도가 향상되지만 입력값이 증가하게 된다.

최종적으로 $k1$ 이 100000이고 $k2$ 가 10000일 때 수렴속도는 상대적으로 신속하게 이루어졌으며 오버슈트도 적게 발생하였다. 모의실험 결과에서 보듯이 페루프 시스템의 응답은 전형적인 지수함수적 안정성을 보임을 알 수 있다.

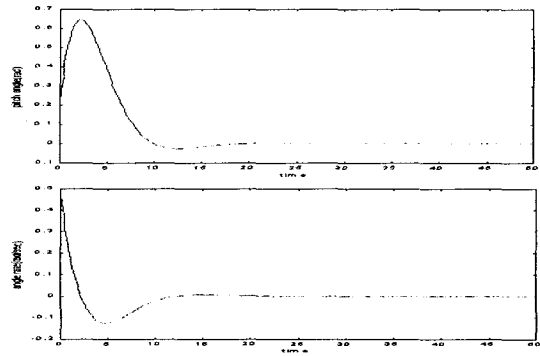


그림2 $k1=14000$, $k2=1000$ 일 때 피치각과 속도의 시간에 대한 응답

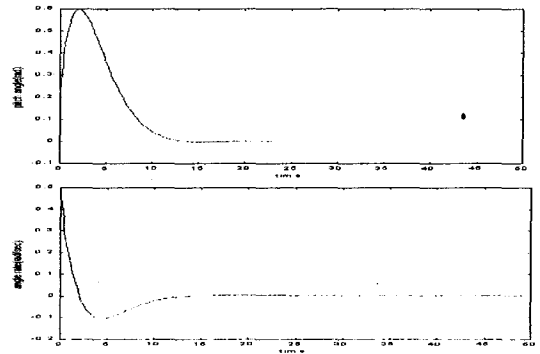


그림3 $k1=14000$, $k2=10000$ 일 때 피치각과 속도의 시간에 대한 응답

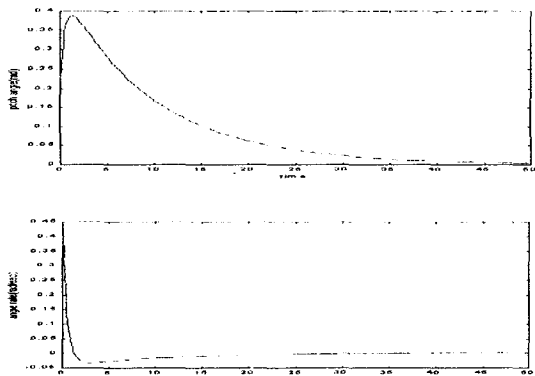


그림4 $k1=14000$, $k2=100000$ 일 때 피치각과 속도의 시간에 대한 응답

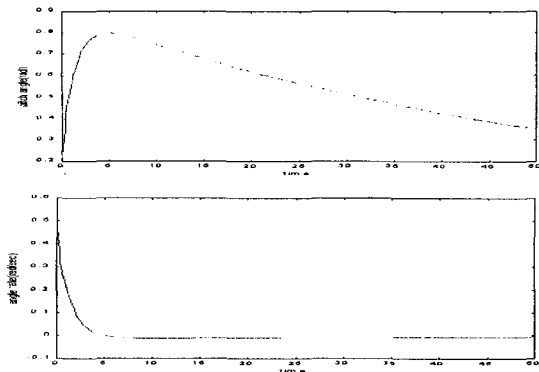


그림5 $k_1=1000$, $k_2=10000$ 일 때 피치각과 속도의 시간에 대한 응답

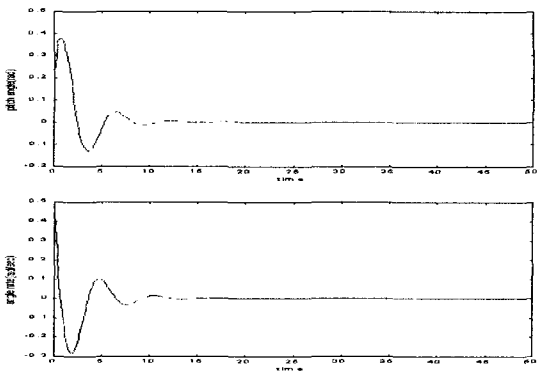


그림6 $k_1=100000$, $k_2=10000$ 일 때 피치각과 속도의 시간에 대한 응답

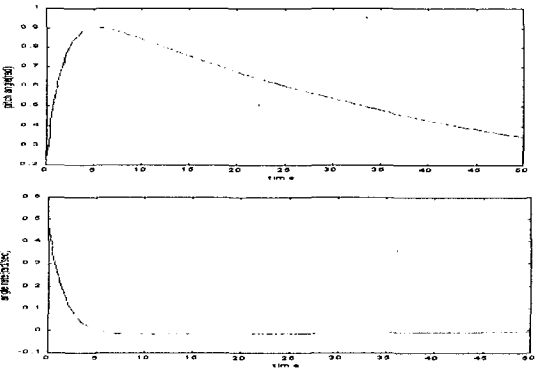


그림7 $k_1=1000$, $k_2=1000$ 일 때의 피치각과 속도의 시간에 대한 응답

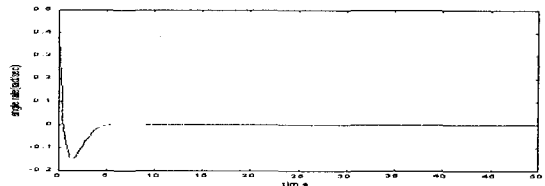
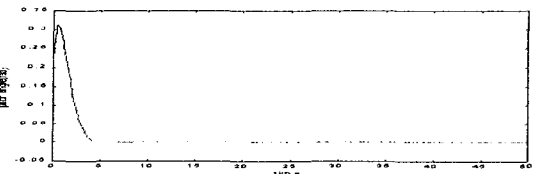


그림8 $k_1=100000$, $k_2=100000$ 일 때 피치각과 속도의 시간에 대한 응답

5. 결론

본 논문에서는 위성체의 안정성 분석과 제어기 설계를 위해 위성체의 비선형 운동 방정식을 타당한 가정하에 선형화하였다. 비선형 제어기는 선형제어기에 비해 상대적으로 넓은 동작범위에서 시스템의 안정화를 보장한다. 본 논문에서는 선형화된 위성체 운동방정식을 유도하고 피치축이 롤, 요축과 비연계된 성질을 이용하여 피치축에 대한 제어기를 독립적으로 설계하였다. 또한 Lyapunov 안정도 이론에 기초하여 시스템의 안정성을 보장하는 제어기 이득을 산출하였다. 이득값의 변화에 따른 위성체의 응답을 모의실험을 통하여 보였다.

참고문헌

1. 한국항공우주연구소 "위성체 구조 및 자세제어계 특성해석 기술개발에 관한 연구," 1992
2. 박종국의 4인, *자동제어*, 형설출판사, 1995
3. 임형철, Momentum bias를 가지는 위성의 3축 자세제어 시뮬레이션, 연세대학교, 석사학위논문, 1995
4. Jean-Jacques E. Slotine, Weiping Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, 1991
5. Lockheed Martin Astro Space "KOREASAT PDR Data Package," Vol.II, Book 1 : Attitude and Orbit Control Subsystem, August 1992.
6. Wertz, J. R., *Spacecraft Attitude Determination and Control*, Reidel Publishing Com, 1986