

Recursive sinusoidal 변환의 최적 fixed-point 연산구조에 관한 연구

Investigation of the performance degradation for different wordlength combinations in fixed-point recursive sinusoidal transform

김재화 · 장태규
중앙대학교 전자전기공학부Jae-Hwa Kim · Tae-Gyu Chang
School of Electrical Engineering, Chun-Ang University

Abstract

This paper investigates the varying characteristics of the performance degradation resulting from the different combination of wordlength in fixed-point implementation of recursive sinusoidal transform. The performance degradation is analytically derived in the form of noise-to-signal power ratio. The best wordlength combination is shown to be the equal length distribution of the given number of bits between the transform coefficients and the data. The analysis results are also verified through the computer simulations.

1. 서론

Sinusoidal transform은 코사인 및 사인 함수를 계수로 하여 시간영역 신호를 주파수 영역으로 변환하는 연산으로, FFT, DFT, DCT 등이 대표적이며 이들은 신호의 분석 및 압축 등의 영역에서 다양하게 적용되고있다. 일반적으로 높은 계산량을 가지는 sinusoidal 변환의 구현 속도를 높이는 방법으로는 전 스텝의 계산 결과를 이용하여 다음 스텝의 결과를 계산하는 순환구현 기법을 들 수 있으며 대표적인 예들이 [1],[2] 등에 제시되어있다. 또한 파이프라인 연산, 병렬 연산 등과 같이 구현 시스템의 구현 구조를 개선하여 연산 속도를 높이는 방식들도 폭넓게 제시되고 있다[3][4].

순환구현 기법들은 속도상의 유용성에 비하여, 구현의 구조상 유한 비트 구현오차에 대한 영향이 과급되는 현상이 있어 블록들에 대하여 독립적으로 연산을 취하는 경우에 비하여 일반적으로 구현 오차 성능이 열악하다. 극단적인 경우는 오차의 영향으로 구현 시스템의 안정성을 보장할 수 없어서 실질응용이 불가능한 경우도 발생한다[5][6]. 따라서 순환알고리즘을 구현하는 경우에 있어서는 안정성 등을 포함한 유한 비트 오차의 영향을 철저히 분석하여야한다.

본 논문에서는 대표적인 순환 sinusoidal 변환인 sliding discrete-Fourier transform (SDFT)을 고정소수점 연산으로 구현 할 경우의 오차 영향을 해석하였다. 오차영향 해석을 위해 sinusoidal 변환의 기본 연산블록 구조를 모델링하고 이를 통하여 계수와 데이터의 최적의 비트 수 분배 구조를 밝혔다. 또한 오차의 절대량을 해석하기 위해 계수 표현 비트 수와 데이터 표현 비트 수 변화에 따른 오차전력과 신호전력 비율(noise-to-signal power ratio : NSR)을 해석적으로 유도하고, 계수와 데이터 비트 수의 최적 분배구조를 확인하였다. 오차영향 해석의 결과로써 NSR을 제시한다는 것은 SDFT를 응용하는데 있어서 성능을 알아보는 궁극적인 지표로서 의미가 있다.

2. Sinusoidal 변환의 순환식과 고정소수점 구현

신호열 $x(l), x(l+1), \dots, x(l+N-1)$ 의 N -point DFT는 (1)과 같이 표현된다.

$$X_k(l) = \sum_{m=0}^{N-1} x(l+m) W_N^{km} \quad (1)$$

여기서, W_N 은 진동계수(twiddle coefficient)로 $\exp[j*2*\pi/N]$ 과 같다. 식 (1)에 $X_k(l)$ 은 l -번째 데이터블록의 k -번째 주파수 성분을 나타내며, 다음 블록의 DFT 값 $X_k(l+1)$ 은 식 (1)의 l 에 $l+1$ 을 대입하고 정리하여 식 (2)와 같이 $X_k(l)$ 에 관한 순환식으로 표현할 수 있다.

$$X_k(l+1) = W_N^k \{ X_k(l) - x(l) + x(l+N) \} \quad (2)$$

$$k=0, 1, \dots, N-1$$

식 (2)의 유한 비트 구현은 다음의 식 (3)과 같이 유한 비트 구현된 DFT 값 $\hat{X}_k(l)$ 에 대하여, 양자화된 진동계수 \hat{W}_N^k 과 반올림오차 $\xi_k(l)$ 을 이용하여 기술할 수 있다.

$$\hat{X}_k(l+1) = \hat{W}_N^k \{ \hat{X}_k(l) - x(l) + x(l+N) \} + \xi_k(l) \quad (3)$$

양자화된 진동계수 \hat{W}_N 는 복소수 평면상에서 단위 원에 위치하는 진동계수들을 유한 비트 레지스터에 저장하여 표현된 값이다.

순환식의 각 주파수 성분들의 구현구조는 그림 1.과 같은 일반적인 sinusoidal transform의 기본적인 순환 구현구조라 할 수 있다.

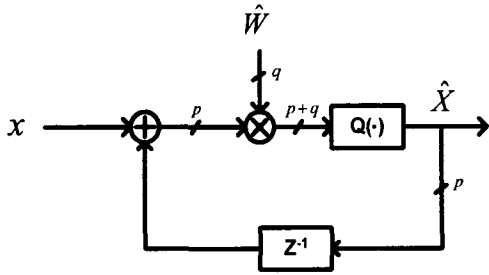


그림 1. Sinusoidal transform의 유한 비트 순환구현 기본구조 모델

곱셈연산의 결과는 데이터 표현의 유한 비트 오차 ΔX 와 계수 표현의 유한 비트 오차 ΔW 를 도입하여 (4)와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} (X + \Delta X) \cdot (W + \Delta W) \\ = X \cdot W + X \cdot \Delta W + \Delta X \cdot W + \Delta X \cdot \Delta W \quad (4) \\ = X \cdot W + E \end{aligned}$$

여기서 참값 $X \cdot W$ 을 제외한 항들은 곱셈기 유한 비트 오차를 나타내며 E 로 표시한다. 곱셈기 오차 E 의 전력은 입력신호가 오차신호들과 비상관되었다는 가정 등을 적용하여 (5)와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{ |E|^2 \} &= \mathcal{E}\{ |X|^2 \cdot |\Delta W|^2 \} + \mathcal{E}\{ |\Delta X|^2 \cdot |W|^2 \} \\ &= \sigma_X^2 \cdot \mathcal{E}\{ |\Delta W|^2 \} + \mathcal{E}\{ |\Delta X|^2 \} \quad (5) \end{aligned}$$

여기서 $\mathcal{E}\{\cdot\}$ 는 앙상블 기대치 연산을 나타낸다. 계수 오차의 전력은 확률분포 등을 고려하여 확률적분을 통해 (6)과 같이 얻어진다.

$$\mathcal{E}\{ |\Delta W|^2 \} = \frac{2}{3} 2^{-2p} \quad (6)$$

DFT 연산 과정 중 오버플로우가 없도록 입력신호가 스케일링되었다고 가정하고, 데이터의 형태가 충분히 랜덤하여 모든 양자화 값들이 균등하게 발생한다고 가정하면, 데이터 오차의 전력 또한 확률분포 등을 고려하여 확률적분을 통해 (7)와 같이 얻어진다.

$$\mathcal{E}\{ |\Delta X|^2 \} = \frac{2}{3} \sigma_X^2 2^{-2q} \quad (7)$$

곱셈기의 주요 자원이 곱셈출력의 비트 수임을 고려하여 데이터 비트와 계수 비트의 합을 일정하게 유지할 때, 오차 전력 측면에서 데이터 비트 수와 계수 비트 수의 최적 조합은, (6)과 (7)의 결과를 (5)에 대입하고 대수적으로 정리하여 (8)과

같이 각 비트 수가 같을 때 임을 알 수 있다.

$$p_{opt} = q_{opt} = L/2, \quad L = p + q \quad (8)$$

여기서 L 은 곱셈기 출력 비트 수. 식 (5)는 시간에 따라 파급되는 오차의 영향을 표현하지는 않지만 곱셈기 출력 자체의 오차를 최소화함으로써 파급되는 오차의 양을 최소화 할 수 있다는 개념을 전달하여준다.

3. 유한 비트 오차 영향 해석

본 절에서는 SDFT의 오차 파급현상에 따른 전체적인 성능 저하를 정량화하기 위해 오차 스펙트럼에 대한 상대방정식을 유도하여 오차 관계식으로 정의하고 이를 토대로 하여 오차의 전력과 신호의 전력비(noise-to-signal power ratio : NSR)를 해석적으로 유도한다.

3.1 오차 관계식

스펙트럼 오차 $E_k(l+1)$ 을 식 (9)와 같이 근사 DFT 값과 실제 DFT 값의 차이로 정의하여,

$$E_k(l+1) = \hat{X}_k(l+1) - X_k(l+1) \quad (9)$$

근사 SDFT 식 (3)을 대입하고 $E_k(l+1)$ 과 $E_k(l)$ 의 관계로 정리하면 (10)과 같은 오차 관계식을 얻는다.

$$E_k(l+1) = \alpha_k W_N^k E_k(l) + \delta_k W_N^k U_k(l) + \xi_k(l) \quad (10)$$

여기서, $\delta_k \triangleq (\hat{W}_N^k - W_N^k) / W_N^k$, $\alpha_k \triangleq \hat{W}_N^k / W_N^k$, 그리고 $U_k(l) \triangleq X_k(l) - x(l) + x(l+N)$.

오차의 영향을 정량화하기 위한 NSR을 (11)과 같이, 각 블록에 대한 오차 $E_k(l)$ 의 평균전력밀도와 $X_k(l)$ 의 평균전력밀도의 기대값 비율로 정의한다.

$$\begin{aligned} \sigma_E^2 &\triangleq \mathcal{E}\left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |E_k(l)|^2 \right\}, \quad \sigma_X^2 \triangleq \mathcal{E}\left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k(l)|^2 \right\} \\ \text{NSR} &\triangleq \frac{\sigma_E^2}{\sigma_X^2} \quad (11) \end{aligned}$$

여기서, $\mathcal{E}\{\cdot\}$ 는 앙상블 기대값 연산을 나타낸다.

오차 전력 σ_E^2 의 유도는 (10)의 양변에 절대값 제곱을 취하고 주파수평균과 앙상블 평균을 취하여 (12)와 같이 나타낼 수 있는데, 이는 입력신호의 stationarity 가정에 따라서 오차가 파급된 정상 상태에서 $\mathcal{E}\left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |E_k(l)|^2 \right\}$ 과 $\mathcal{E}\left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |E_k(l+1)|^2 \right\}$ 이 σ_E^2 으로 같다는 사실에 바탕을 두었다

$$\sigma_E^2 = \frac{A+B+C}{D} \quad (12)$$

$$A = 2 * \mathcal{E}\left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \text{Re}\{ \alpha_k^* \delta_k U_k(l) E_k^*(l) \} \right]$$

$$B = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\delta_k|^2 \quad \varepsilon \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |U_k(l)|^2 \right\} \quad \varepsilon \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |U_k(l)|^2 \right\} = N\sigma_x^2 = \sigma_x^2 \quad (16)$$

$$C = \varepsilon \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\xi_k(l)|^2 \right\}, \quad D = 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\alpha_k|^2$$

NSR 해석식의 유도는 식 (12)의 각 항들을 계수 표현 비트 수, 데이터 표현 비트 수, 그리고 DFT 블록 길이 등의 설계 변수들에 관한 식으로 표현함으로써 완성한다. 각 항들의 유도과정은 다음 3.2, 3.3, 3.4, 그리고 3.5 절에 제시하였다.

3.2 계수오차 항들의 기대값

복소수 진동계수 W_N^k 를 부호를 포함하여 (1+ p) 비트로 표현하면, 계수오차 $\delta_k W_N^k = \widehat{W}_N^k - W_N^k$ 는 실수 축 허수 축이 각각 -2^p 에서 2^p 의 길이를 갖는 정사각형 영역 R 에 균등하게 분포하는 확률 변수라 가정할 수 있다. 그러면, $|\delta_k|^2$ 는 $|\delta_k W_N^k|^2$ 와 같기 때문에 (13)과 같은 확률평균 적분식으로 $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\delta_k|^2$ 을 구할 수 있다.

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\delta_k|^2 = \int \int_R \delta^2 \cdot p_\delta \, dR = \frac{2}{3} \Delta_p^2 \quad (13)$$

여기서, $\Delta_p = 2^{-p}$, $p_\delta = \frac{1}{4\Delta_p^2}$.

계수 오차를 α_k 는 (10)의 정의에 따라 δ_k 와의 관계를 이용하여 (14)와 같이 얻어진다.

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\alpha_k|^2 = \frac{2}{3} \Delta_p^2 - \sqrt{2} \Delta_p + 1 \quad (14)$$

3.3 신호 수정항 $U_k(l)$ 의 평균전력밀도

오차 관계식에 입력 항의 전력 $\varepsilon \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |U_k(l)|^2 \right\}$ 는 (10)의 정의에 따라 $U_k(l) U_k^*(l)$ 를 대수적으로 전개하고 전개한 식에서 입력 신호들의 교차 항들 중 비상관된 항들을 제거해서 얻는다. 이보다 일반적인 경우를 구하기 위해 $U_k(l) U_k^*(l-m)$ 를 (2)의 관계를 이용하여 전개하고 신호 샘플들 간에 중복되지 않은 샘플들의 교차 항들은 신호의 비상관 가정에 따라 '0'이 된다는 사실을 적용하여 $\varepsilon \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} U_k(l) U_k^*(l-m) \right\}$ 을 구하면 (15)와 같이 간단하게 얻는다.

$$\varepsilon \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} U_k(l) U_k^*(l-m) \right\} = (N-m) \sigma_x^2 W_N^{mk} \quad (15)$$

여기서, $\sigma_x^2 = \varepsilon \{ |x(n)|^2 \}$.

오차 관계식에 입력항의 전력 $\varepsilon \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |U_k(l)|^2 \right\}$ 는 (15)의 특수한 경우로 $m=0$ 을 대입하여 (16)과 같이 얻는다.

3.4 교차항의 기대값

교차항의 기대값 $\varepsilon \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \text{Re} \{ \alpha_k^* \delta_k U_k(l) E_k^*(l) \} \right]$ 를 구하기 위해서 $U_k(l) E_k^*(l)$ 을 α_k 와 δ_k 의 항으로 전개한다. 오차 관계식 $U_k(l) E_k^*(l)$ 의 $E_k(l)$ 을 오차 관계식 (10)에 따라 $E_k(l-1)$ 에 관하여 다시 쓰고 이를 계속해서 반복 적용하여 $U_k(l) E_k^*(l)$ 는 무한합 식으로 쓸 수 있고, 이에 기대값 연산을 취하여 (15)의 결과를 대입하면, (17)와 같이 α_k 의 멱급수 합으로 쓸 수 있다.

$$\varepsilon \{ \alpha_k^* \delta_k U_k(l) E_k^*(l) \} = \sigma_x^2 |\delta_k|^2 \sum_{m=1}^{N-1} (N-m) \alpha_k^{m*} \quad (17)$$

멱급수 합 형태로 되어있는 (17)을 closed-form으로 공식화하고 α_k 의 기하학적 특성들을 분석하면 확률적분 등을 통해 교차항의 기대값은 (18)과 같이 근사적으로 얻을 수 있다.

$$\varepsilon \{ \text{Re} \{ \alpha_k^* \delta_k U E_k^* \} \} \approx \frac{\sigma_x^2}{N} \left[\frac{1}{(N+2)\sqrt{2}\Delta_p} \{ 1 - (1-\sqrt{2}\Delta_p)^{N+2} \} - \frac{2}{3} N \Delta_p^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} (N+1) \Delta_p - 1 \right] \quad (18)$$

3.5 반올림오차 전력

반올림오차의 최대 값은 양자화 스텝크기의 1/2이며 평등확률분포로 가정할 수 있다. 즉 DFT 값을 부호를 포함하여 (1+ q) 비트로 표현할 때 반올림오차 양의 범위는 다음의 (19) 구간에서 평등하게 분포한다.

$$-\frac{\Delta_q X_{\max}}{2} \leq \text{Re} \xi_k(l), \text{Im} \xi_k(l) \leq \frac{\Delta_q X_{\max}}{2} \quad (19)$$

여기서, $\Delta_q = 2^{-q}$ 이고 X_{\max} 는 q -비트로 표현 가능한 DFT 최대 값이다.

반올림오차의 전력을 σ_ξ^2 로 정의하고, 확률적분을 통해 구하면 (20)과 같고,

$$\varepsilon \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\xi_k(l)|^2 \right\} = \sigma_\xi^2 = \frac{X_{\max}^2}{6} \Delta_q^2 \quad (20)$$

신호의 평등분포 특성 등과 대수적 관계를 통해 (21)과 같이 반올림오차의 전력을 얻는다.

$$\sigma_\xi^2 = \frac{N}{2} \sigma_x^2 \Delta_q^2 \quad (21)$$

3.6 잡음 대 신호전력 비

NSR 최종 식은 오차의 평균전력밀도 식 (12)에 (13), (14), (16), (18), 그리고 (21)을 대입하여 신호의 평균전력밀도 σ_x^2 으로 나누어 (22)와 같이

얻는다.

$$NSR = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_x^2} \approx \frac{1}{\sqrt{2}A_p - 2/3A_p^2} * \left[\frac{\sqrt{2}}{N(N+2)A_p} \{1 - (1 - \sqrt{2}A_p)^{N+2}\} - \frac{2}{3} A_p^2 + \frac{\sqrt{2}}{N} (N+1)A_p - \frac{2}{N} + \frac{N}{2} A_p^2 \right] \quad (22)$$

NSR 식 (22)는 계수근사 비트 수 p , DFT 표현 비트 수 q , 그리고 DFT 구간길이 N 에 대한 closed-form 방정식이다.

DFT 값의 표현이 정확하고 진동계수만을 양자화할 경우, 즉 q 를 무한대로 하고 p 가 큰 경우($p \gg 1$)의 점근특성을 보기 위해 NSR 식 (22)의 대괄호 안에 첫 번째 항을 이항전개하고 근화하면 (23)과 같은 점근 특성식을 얻을 수 있다.

$$NSR_{\text{asympt}} = \frac{\sqrt{2}}{3} NA_p \quad (23)$$

4. 시뮬레이션 결과

본 논문에서 수행한 해석 기법을 검증하기 위해, 유도한 NSR 식 (22)와 가우스 백색신호에 대한 시뮬레이션 결과를 비교하였다. DFT 표현 비트 수를 12, 14, 16, 18 및 20 비트로 하여 진동계수 표현 비트 수에 따른 시뮬레이션 결과를 해석식과 함께 그림 2.에 나타내었다.

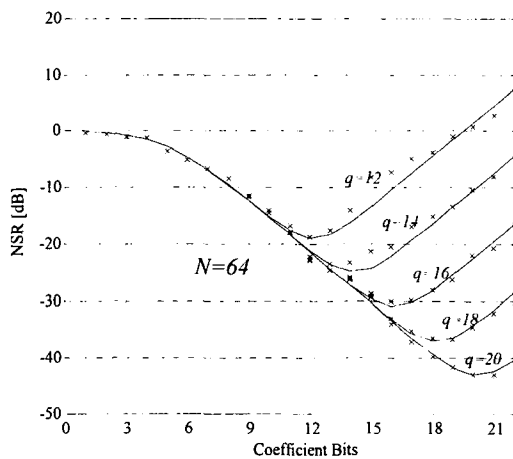


그림 2. 반올림오차를 고려한 시뮬레이션 실험과 해석식을 통해 구한 NSR 비교. 가로축은 진동계수 표현 비트 수. 해석식은 실선으로 나타내었고, 서로 다른 DFT 표현 비트 수 $q = 12, 14, 16, 18$, 그리고 20인 경우의 시뮬레이션 실험 결과를 나타내었다. $N = 64$.

그림 2.에서 보듯이 진동계수의 표현 비트 수를 일정 비트 수까지 증가 시켰을 때는 NSR 개선이 있으나 그 이상의 비트 수로 증가 시켰을 때는 오

히려 NSR이 악화된다. NSR이 반전되는 진동계수 표현의 임계 비트 수는 DFT 표현 비트 수와 같다. 즉 진동계수 표현 비트 수와 DFT 표현 비트 수를 같게 할 때 최대의 SNR을 얻을 수 있음을 확인하여준다.

5. 결론

본 논문에서는 sinusoidal 변환의 순환 구현 시 유한 비트 정밀도에 따른 오차의 영향을 해석하였다. 이를 위해 SDFT를 대상으로 복소수 진동계수와 DFT 표현 값에 따른 오차의 전력과 신호 전력의 비율을 해석적으로 유도하고 시뮬레이션을 통해 해석의 타당성을 확인하였다. 유도과정은 오차의 파급을 기술하는 오차 관계식에 바탕을 두었으며, 계수오차와 반올림오차를 확률변수로 취급하였다. NSR 해석식은 진동계수를 표현한 비트 수 p , DFT 값을 표현하는 비트 수 q , 그리고 DFT 구간길이 N 에 대한 해석식으로 구하였으며, 해석식 및 시뮬레이션 결과를 통해 계수를 표현하는 비트 수와 데이터를 표현하는 비트 수에는 최적의 조합이 존재하는 것을 확인하였다.

참고문헌

- [1] Dulal C. Kar, "A CORDIC-based unified systolic architecture for sliding window applications of discrete transforms," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 44, no. 2, pp. 441-444, Feb. 1996.
- [2] K. J. R. Liu, C.T. Chiu, K.K. Kolagotla, and J.F. Ja' Ja', "Optimal unified architectures for the real-time computation of time-recursive discrete sinusoidal transforms," *IEEE Trans. on Circuits Syst. Video Technol.*, vol. 4, pp. 168-180, Apr. 1994.
- [3] Y. C. Lim, and Bede Liu, "Pipelined Recursive Filter with Minimum Order Augmentation," *IEEE Trans. On Signal Processing*, Vol. 40, No. 7, pp. 1643-1650, July 1992.
- [4] P. M. Kogge, and H. S. Stone, "A parallel algorithm for efficient solution of general class of recurrence equations," *IEEE Trans. On Comput.* Vol. C-22, pp. 786-793, Aug. 1973.
- [5] L. R. Rabiner and B. Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [6] Bede Liu, "Effect of Finite Word Length on the Accuracy of Digital Filters-A review," *IEEE Trans. on Circuit Theory*, Vol. CT-18, No. 6, pp. 670-677, Nov. 1971.