

## **$p$ -Version 유한요소법에 기초한 EPFM 해석법의 정확성** **Accuracy of EPFM Approach Based on the $p$ -Version of F.E.M.**

홍 중 현\*                      우 광 성\*\*                      박 진 환\*\*\*  
Hong, Chong-Hyun      Woo, Kwang-Sung      Park, Jin-Hwan

### ABSTRACT

The best available solution to predict the fatigue life of structural steels is the implementation of EPFM approach based on the principles and techniques of elasto plastic fracture mechanics. To predict the fatigue life, the conventional Paris law has been modified by substituting the range of  $J$ -value denoted by  $\Delta J$  for  $\Delta K$  that is calculated by the proposed  $p$ -version model. The proposed  $p$ -version finite element model is formulated by the incremental theory of plasticity that consists of the constitutive equation for elastic-perfectly plastic materials, Tresca/von-Mises yield criteria, and associated flow rule. The experimental fatigue test is conducted with five CCP(Center Cracked Panels) specimens to validate the accuracy of the  $p$ -version finite element model. Also, the results obtained by LEFM approach have been compared with those by EPFM approach.

### 1. 서 론

탄성이론에 의하면, 균열선단에서는  $r^{-1/2}$ 의 응력특이점이 발생되어 이론적으로 응력이 무한대가 된다. 그러나, 연성재료인 강구조물에서는 응력특이점 부근에 소성역(plastic zone)이 형성되어 외력에 저항할 수 없기 때문에 응력상태는 탄성역(elastic zone)으로 응력재분배(stress redistribution)가 일어나며, 더 높은 수준의 하중을 받을 경우 소성역의 확산과 더불어 균열도 전파되어 파괴에 도달하게 된다. 또한 응력분포도 변형 경화지수  $n$ 을 사용하여  $r^{-1/n+1}$ 에 비례하게 된다. 따라서, 균열선단의 소성역을 무시할 수 없는 강구조물의 경우는 종래의 선형탄성파괴역학(Linear Elastic Fracture Mechanics ; LEFM) 이론으로는 균열선단부의 응력장과 소성역의 확산을 설명할 수 없으며 정확한 피로수명을 예측하는 데에도 문제가 있다. 이러한 이유로 탄소성파괴역학(Elasto-Plastic Fracture Mechanics ; EPFM) 이론을 이용하여 피로설계에 필요한 매개변수들을 결정하려는 시도가 이루어져 왔다.

- 
- \* 탐라대학교 토목환경공학과 전임강사
  - \*\* 정회원, 영남대학교 토목공학과 부교수
  - \*\*\* 영남대학교 토목공학과 박사과정

EPFM 이론에 의한 피로수명 예측은 Srivastava<sup>(1)</sup> 등에 의한 방법과 일부 문헌<sup>(2),(3)</sup>에 소개된 수정 Paris법칙(modified Paris law)에 의한 방법을 꼽을 수 있다. 기존의 Paris법칙이 LEFM 이론에 의한 응력확대계수 범위  $\Delta K$ 를 사용하여 피로수명을 산정하였다면, 수정 Paris법칙은 단위균열진전에 따른 전체포텐셜에너지의 감소량으로 정의되는  $\Delta J$ 을 이용하여 피로수명을 산정하는 것이다. 탄성상태에서는  $\Delta K$ 와  $\Delta J$ 가 동일한 의미를 갖지만 탄소성상태에서는 큰 차이를 보이게 되며  $\Delta J$ 는 피로수명에 직접적인 영향을 미치게 된다. 따라서, 수정 Paris법칙은 얼마나 정확한  $\Delta J$ 를 산정하느냐에 따라 피로수명의 정확도가 좌우된다. 한편, 여러 구조부재에 대한  $\Delta J$ 값이 EPRI 편람이나 문헌<sup>(2)</sup>에 소개되어 있지만 기하학적형상과 하중조건들이 매우 제한적이기 때문에 실무에서 사용하기에는 한계가 있어 실용적인 방법으로 수치해석법이 개발되어 왔다.

유한요소법은 지금까지 개발되어온 수치해석 방법중에서 가장 많이 사용되는 방법이라 하겠다. 그러나 기존의 유한요소법은 균열선단의 응력특이를 표현하기 위해 매우 조밀한 요소분할을 필요로 하고 요소수를 줄이기 위해서는 특별요소나 특이요소를 사용해야 하는데 이 때는 자동요소분할이 곤란한 단점을 가지게 된다. 또한, 수치해의 수렴속도가 동일한 수준의 정확도를 갖는 조건에서  $p$ -Version 유한요소법에 비해 느리다는 단점등이 지적되어 왔다.<sup>(4)</sup> 한편,  $p$ -Version 유한요소법은 이미 LEFM 해석문제에서 요소분할의 단순성, 입력자료에 대한 강건성(robustness), 그리고 빠른 수렴성 등 많은 장점들이 기존의 연구를 통해 입증된 바 있다.<sup>(5),(6)</sup>

그러므로, 본 연구에서는  $p$ -Version 탄소성 유한요소모델을 제안하여 EPFM 해석법에 의한 강구조물의 피로수명을 예측하는 기법을 제안하고자 한다. 사용된 모델은 평면응력/평면변형을 요소로 구분되며, 형상함수로 계층적 성질과 직교성을 갖는 적분형 르장드르 다항식, 수치적분을 위해  $10 \times 10$  가우스적분법, 그리고 비선형 방정식을 풀기 위해 Newton-Raphson법과 초기강성도법이 채택되었다. 소성이론은 증분소성변형이론에 기초를 두었는데 등방경화법칙을 기본가정으로 Tresca와 von-Mises의 항복조건과 결합유동법칙을 사용하여 유한요소 정식화를 수행하였다. 균열판의 피로수명을 산정하기 위해  $p$ -Version 유한요소 해석결과를 이용할 수 있는  $J$ -적분법과 수정 Paris법칙을 결합하였다.

## 2. 피로수명예측 모델

본 연구에서는 초기균열(initial flaw)에서부터 구조물 파괴까지의 수명을 평가하는 LEFM 해석법을 수정 보완하여 재료가 탄소성거동을 할 때에도 사용할 수 있도록 EPFM 해석법을 제안하였다. LEFM 해석법에서 사용하는 균열성장률 공식은 식 (1)과 같이 표현되며 Paris법칙(Paris law)이라 한다. 그러나, 식 (1)에서  $\Delta K$ 는 재료의 연성이나 항복응력 등의 효과를 무시하기 때문에 재료의 소성성분이 무시할 수 없을 만큼 클 때는 실험결과와 잘 일치하지 않는다.

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (1)$$

여기서,  $a$  : 균열크기

$N$  : 반복횟수

$\Delta K$  : 응력확대계수 범위

$C, m$  : 실험적으로 결정되는 재료의 상수

무시할 수 없는 정도의 소성 변형을 성분을 가진 재료의 균열성장률 공식을 유도하기 위해 몇 편의 논문<sup>(1),(7)</sup>들이 발표되었다. 그 중에서 Srivastava<sup>(1)</sup>가 발표한 논문에 의하면 EPFM 영역에서는  $\Delta J$ 를 사용하여 피로해석을 하는 것이 정확도를 높이는 것이라고 주장하였다. LEFM 영역에서  $\Delta K$ 와  $\Delta J$ 의 관계는 평면 응력조건일 때 식 (2)와 같다.

$$\Delta J = \frac{(\Delta K)^2}{E} \quad (2)$$

여기서,  $\Delta J$  :  $J$ -적분값 범위  
 $E$  : 탄성계수  
 $\Delta K$  : 응력확대계수 범위

그러나, 탄성한도내에서는  $\Delta K$  대신에  $\Delta J$ 를 사용할 수 있지만 탄성범위를 넘어선 탄소성상태에 대해서는 식 (2)를 사용할 수 없기 때문에  $\Delta J$ 를 식 (3)과 같이 탄성성분과 소성성분을 합한 값을 사용하여 식 (4)와 같이 탄소성재료의 피로수명을 산정할 수 있으며, 이를 수정 Paris법칙(modified Paris law)이라 한다

$$\Delta J = \Delta J_e + \Delta J_p \quad (3)$$

여기서,  $\Delta J_e$  :  $J$ -적분값 범위의 탄성성분  
 $\Delta J_p$  :  $J$ -적분값 범위의 소성성분

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta J)^m \quad (4)$$

$$N = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{C(\Delta J)^m} \quad (5)$$

여기서,  $N$  : 피로수명  
 $a_i$  : 초기균열길이  
 $a_f$  : 임계균열길이

식 (4)에서  $\Delta J$ 는  $p$ -Version 유한요소법을 이용하여 산정하였다. 따라서, 식 (4)를 사용할 경우에는 재료가 탄성범위 뿐만아니라 탄소성범위에 있더라도 쉽게 피로수명을 예측할 수 있다는 장점이 있다. 초기균열길이의 결정을 위해 어떤 치수를 균열발생의 시작으로 간주할 것인가는 LEFM과 EPFM해석 모두 어려운 문제로 남아있지만, 소형시험편에 대한 실험측정시 균열발생으로 택하는 치수는 0.2-1.0mm 정도이며 구조부재

모형실험에서는 10mm 정도 또는 부재의 판두께 정도의 치수를 균열발생으로 택하는 것이 일반적이다. 임계 균열길이는 균열진행방향의 균열리가먼트(crack ligament)가 완전히 항복할 때까지의 균열길이로 중앙균열평판의 경우 식 (6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$a_f = \frac{W}{2} \left( 1 - \frac{q}{\sigma_o} \right) \quad (6)$$

여기서,  $W$  : 균열판 폭의 절반

$q$  : 작용하중

$\sigma_o$  : 재료의 항복응력

### 3. 피로수명 산정

#### 3.1 실험적 방법

본 연구에서 제안하는  $p$ -Version 탄소성 균열모델에 의한 EPFM 해석법의 정확도를 비교하기 위해 그림 1과 같은 제원을 갖는 5개의 CCP(center cracked panel)시편을 대상으로 피로시험을 직접 수행하였다. 이와 관련된  $p$ -Version 유한요소모델은 CCP시편의 경우 2축 대칭이기 때문에 균열판의 1/4만 모델링하였고,  $J$ -적분값을 계산하기 위해 그림 2와 같이 방사형태로 4개의 요소를 사용하여 요소분할을 하였다. 이 때 형상함수의 차수는 수렴성조사후 8차로 고정하였다.

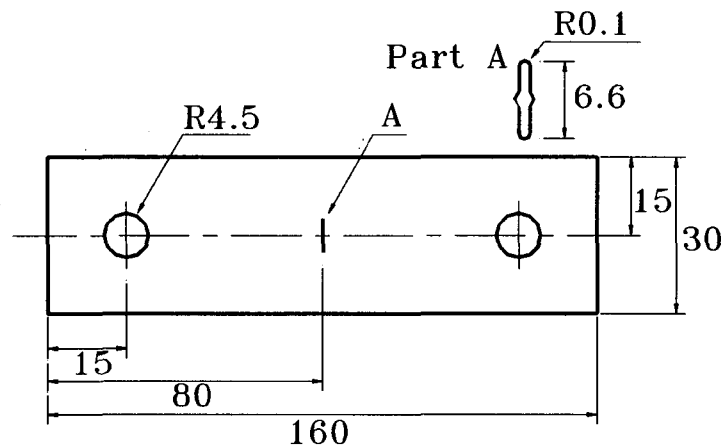
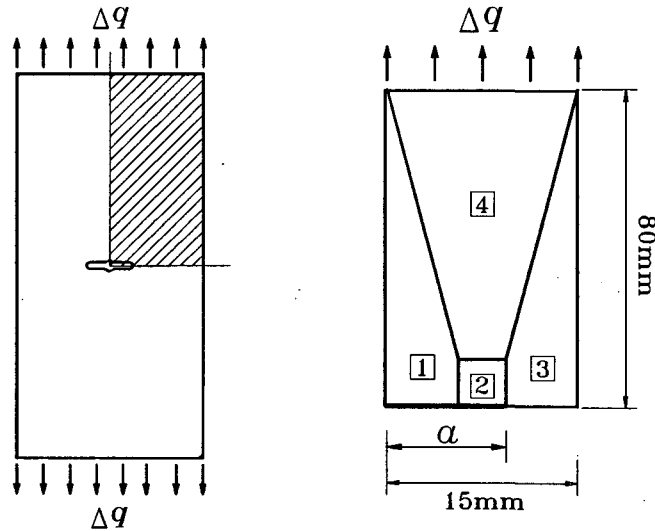


그림 1. 구조용강재 SS400의 피로시험 시편 제원(단위:mm)

표 1에는 CCP시편의 피로시험조건을 나타내었고, 시험결과는 초기균열 3.3mm에서부터 임계균열 11.25mm까지의 하중반복횟수가 422,000회 필요한 것으로 나타났다.

표 1. CCP시편의 피로시험 조건

강종	주파수 (Hz)	응력비	$2a$ (mm)	$P_{max}$ (kg)	$P_{min}$ (kg)	$\Delta\sigma$ kg/mm <sup>2</sup>
SS400	10	0.05	6.49	1005	50	10.46



Center Cracked Panel p-version model

그림 2. 구조용강재 SS400의 피로수명예측을 위한 p-Version 유한요소모델

피로균열성장률(fatigue crack growth rate)  $da/dN$ 과 응력확대계수 범위  $\Delta K$  관계를 실험에 의해 산출한 결과 식 (1)의 Paris법칙을 사용하여 LEFM 해석법에 의한 피로수명을 예측하기 위해 필요한 재료상수  $C$ 와  $m$ 을 각각  $C=6.3 \times 10^{-10}$ 과  $m=3.74$ 로 결정할 수 있었다. 한편, 수정 Paris법칙인 식 (4)를 사용하여 EPFM 해석법에 의한 피로수명을 예측하기 위해서는,  $da/dN$ 과  $\Delta J$  관계로부터  $C=1.55 \times 10^{-5}$ 과  $m=1.79$ 를 얻을 수 있다. 또한, 이 재료상수들은 피로수명을 산정하는데 매우 큰 영향을 미치는 인자인데 비해 국내에서는 구조용강재에 대한 산발적인 실험에 의해 재료상수가 결정되어 왔으므로, 향후 구조용 강종에 따른 체계적인 실험이 요구된다. 외국의 경우는 강재의 강도에 따라 Martensitic Steels, Ferrite-Pearlite Steels와 Austenitic Stainless Steels로 구분하여 그에 따른 재료상수값을 제시하고 있다. 본 연구에서 사용하는 구조용 강재 SS400은 저항복강도를 갖는 재료로 Ferrite-Pearlite Steels의 범주에 속하므로 재료상수는 제시되어 있는 재료상수값  $C=2.18 \times 10^{-13}$ 과  $m=3.0$ 을 사용하도록 한다.

### 3.2 LEFM 해석법

이 방법은 식 (1)의 Paris법칙을 사용하여 구하는 방법으로  $\Delta K$ 는 그림 2의  $p$ -Version 유한요소해석을 통해 구하며, 문제가 되는 재료상수  $C$ 와  $m$ 은 피로시험을 하지 않은 상태에서 가정할 수 있는 경우와 실험에 의해 직접 구한 재료상수를 사용하였을 경우로 표 2와 같이 나누어 해석하였다. 즉, CASE I은 재료상수를 Ferrite-Pearlite Steels로 가정한 경우이고, CASE II의 재료상수는 5개의 CCP시편을 갖고 직접 피로시험을 하여 얻은 경우이다. 초기균열길이  $a_i$ 는 그림 1의 시편으로 부터 결정하였고 임계균열길이는 일반적으로 실험을 통하지 않고는 알 수 없으나, 식 (6)과 같이 균열이 계속진전되는 방향, 즉 균열선(crack line)으로의 균열리가먼트(crack ligament)가 완전항복된 상태를 역학적으로 계산하여 8.75mm로 정하였다. 참고로, 실험에 의한 임계균열길이는 11.25mm이다. 그러나, 임계균열길이에 대한 차이는 일반적인 균열성장곡선에서 보듯이 균열길이가 커짐에 따라 균열은 매우 빠른 속도로 진전되는 까닭에 피로수명에 미치는 영향은 미미하다고 하겠다.

표 2. LEFM 해석을 위한 기본제원

LEFM해석법	$C$	$m$	$a_i(\text{mm})$	$a_f(\text{mm})$	$\Delta K$
CASE I	$2.18 \times 10^{-13}$	3.0	3.3	8.75	$p$ -Version (4 요소, $p=8$ )
CASE II	$6.3 \times 10^{-10}$	3.74	3.3	8.75	$p$ -Version (4 요소, $p=8$ )

$\Delta K$ 는 그림 2의  $p$ -Version 유한요소모델(4개 요소,  $p=8$ )을 사용하여  $\Delta K$ 와  $a$ 와의 관계식을 최소자승법을 통해 유도한 후 이 근사식을 식(1)에 대입한 후 피로수명  $N$ 에 대해 적분하면 구하고자 하는 피로수명을 결정할 수 있다.

### 3.3 EPFM 해석법

본 연구에서 제안하고 있는 EPFM 해석법은 재료상수를 결정하기 위해  $da/dN$ 과  $\Delta J$  관계로 부터  $C=1.55 \times 10^{-5}$ 과  $m=1.79$ 를 산출한다. 초기균열길이와 임계균열길이는 LEFM 해석법의 경우와 동일한 값을 사용하였다. 또한, 인장모우드를 받는  $\Delta J_I$ 의 산정은 LEFM 해석에서 사용한 동일한  $p$ -Version 유한요소모델을 사용하였다. 해석결과에 의하면 LEFM 해석결과와 달리  $\Delta J_I$ 를 나타내는 4개의 점들은 비선형상태를 보이므로 지수함수를 사용하여 근사식을 유도할 수 있다. 이 식을 직접 식 (5)에 대입하면 구하고자 하는 피로수명을 산정할 수 있게 된다.

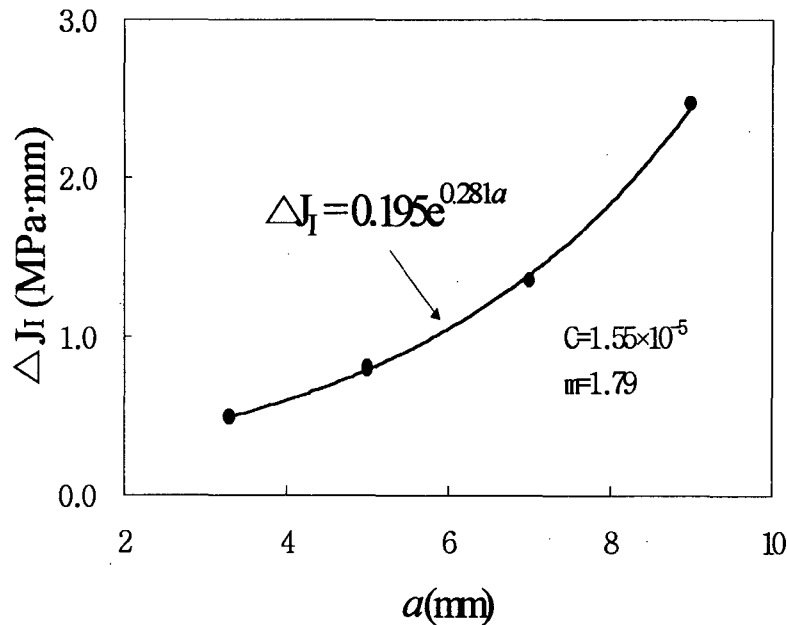


그림 3. EPFM 해석법에 의한  $\Delta J_I$ 와  $a$ 와의 관계

### 3.4 해석결과의 비교

기존의 LEFM 해석법과 새로 제안하는 EPFM 해석법의 결과를 요약하면 표 3과 같이 정리할 수 있다. 통상 재료상수를 가정할 수밖에 없는 LEFM 해석의 CASE I의 경우 실험값과 비교할 때 무려 42%의 오차를 보여주고 있다. 그러나, 사용강재의 재료상수  $C$ 와  $m$ 을 알 수 있으면 LEFM 해석도 실험값과 약 9%의 오차를 보이므로 구조용강재에 대한 재료상수의 중요성을 확인할 수 있다. 반면에 EPFM 해석법은 유연성이 있겠지만 실험값과 거의 일치하는 결과를 보이고 있다. 이 경향은 하중수준이 더 높은 경우, 즉 저싸이클피로문제의 경우 소성역의 영향이 더 커지게 되므로 LEFM 해석과 EPFM 해석에 의한 결과는 더 큰 차이를 보일 것으로 예상된다. 두 결과 모두 피로균열에 큰 영향을 미치는  $\Delta K$ 와  $\Delta J$ 의 정확도는 새로 제안되는  $p$ -Version 모델에 의해 만족할 수준으로 예측할 수 있다고 평가된다.

한편, 표 3에서 LEFM에 의한 피로수명이 EPFM에 의한 피로수명보다 반복횟수가 작은 이유는  $J$ -적분값의 의미를 균열유발에너지(crack driving energy)라 할 때 탄소성해석시 균열진전이 되기 위해서 더 많은 에너지가 필요하기 때문이다. 다른 측면에서 설명하면 Elber<sup>(8)</sup>와 Schmidt<sup>(7)</sup>가 제기한 균열닫힘(crack closure) 현상을 예로 들 수 있다. 이 들은 네가지 경우의 균열닫힘 메커니즘을 지적하고 있는데 본 연구와 관련된 것은 균열선단의 소성역에 의한 균열닫힘 현상인데, 초기의 날카로운 균열(sharp crack) 선단부가 소성역의 확산에 의해 무딘 균열(blunt crack)로 변하게 되어 균열진전속도를 더디게 하는 주된 이유가 되기 때문이다.

표 3. 피로수명 해석결과의 비교

해석방법	실험값	LEFM 해석법		EPFM 해석법
		CASE I	CASE II	
피로수명 N (회)	422,000	245,000	385,000	429,000
정확도 (수치해석값/실험값)	1.0	0.58	0.91	1.01

## 5. 결 론

CCP시편을 대상으로 본 연구에서 제안하는  $p$ -Version 탄소성 균열모델에 의한 EPFM 해석법과 종래의 선형탄성이론에 기초를 둔 LEFM 해석법을 이용하여 시편의 초기균열에서 파단시까지 피로수명을 예측한 결과, EPFM 해석법이 5개의 시편으로 수행한 피로실험결과와 비교하여 높은 정확도를 보여주었다. 한편, LEFM 해석법도 비교적 높은 정확도를 보여주고 있으나 두 경우 모두 재료상수  $C$ 와  $m$ 을 실험에 의해 결정한데 기인한 바가 크다. 재료의 연성이 크고, 소성역이 더욱 크게 형성된다면 해석결과치와 실험결과치는 차이가 커질 것으로 판단된다. 따라서, 향후 강종별에 따른 재료상수의 실험데이터를 구축하여야 실제 강구조물의 피로수명을 유한요소해석에 의해 정확히 예측할 수 있을 것으로 판단된다.

## 6. 참고문헌

- (1) Srivastava, Y. P. and Garg, S. B. L.(1988), "Study on modified J-integral range and its correlation with fatigue crack growth", *Engng. Fracture Mech.*, Vol.30, pp.119-133.
- (2) Anderson, T. L.(1995), *Fracture Mechanics*, Second Edition, CRC Press.
- (3) Gdoutos, E. E.(1990), *Fracture Mechanics Criteria and Applications*, Kluwer Academic Publishers.
- (4) Peano, A. G.(1975), "Hierarchies of Conforming Finite Elements", D.Sc. Dissertation, Sever Institute of Technology, Washington University, St. Louis.
- (5) Holzer, S. M.(1996), "The  $p$ -Version of the Finite Element Method in Incremental Elasto-Plastic Analysis", *Numer. Meth. Engng.*, Vol.39, pp.1859-1878.
- (6) Schmidt, R. A. and Paris, P. C.(1973), "Threshold for Fatigue Crack Propagation and Effects of Load Ratio and Frequency", *Progress in Flaw Growth and Fracture, ASTM STP 536*, p.79.
- (7) Dowling, N. E. and Begley, J. A.(1976), "Fatigue crack growth during gross plasticity and the J-integral. Mechanics of crack growth, cracks and fracture", *ASTM STP 590*, pp.82-103.
- (8) Elber, W.(1971), "The Significance of Crack Closure", *Damage To:erance in Aircraft Structures, ASTM STP 486*, pp.230-241.