

변단면 압축재의 임계하중 Elastic Critical Load of Tapered Columns

김 태 순*
Kim, Tae-Soon

홍 중 국*
Hong, Jong-Kook

김 순 철**
Kim, Soon-Chul

이 수 곤***
Lee, Soo-Gon

ABSTRACT

The elastic critical load of a slender compression member plays an important role when the proper design of that member is required. For the tapered compression members, however, there are cases when the conventional neutral equilibrium or energy method can't be applied to the determination of critical loads of those members. In this paper, finite element method is applied to the approximate determination of the symmetrically tapered bars. Here in this paper, the bars are assumed to take sinusoidally changing shapes along their axes. The parameters considered in this study are taper parameter, α and the sectional property parameter, m . The computed results by finite element method are represented in the forms of algebraic equations. Regression technique is employed to determine the coefficients of algebraic equations. The critical loads estimated by the proposed algebraic equations coincide fairly well with those of finite element method.

1. 서 론

변단면 압축재의 이용 역사는 고대 희랍시대의 신전에 까지 소급되며 우리나라에서도 고찰(古刹)의 기둥등에서 흔히 볼 수 있는 친근한 부재이다. 그러나 이들 변단면 압축재의 안정해석이나 좌굴하중 결정 문제에는 여러가지 난관이 있게 된다. 즉 부재의 좌굴을 지배하는 평형방정식의 해 또는 적분이 불가능하거나 가능해도 대단히 복잡해 질때가 많다는 점이다. 또는 단면의 성질을 지배하는 매개 변수와 경계조건에 따라서는 평형방정식의 적분으로부터 좌굴방정식을 얻을 수 없다는 점이다.

평형방정식으로부터 좌굴방정식을 유도하기가 불가능하거나 복잡할 때에 이용되는 energy원리의 하나인 Rayleigh-Ritz법에서는 압축재의 변형에너지(strain energy)와 축방향력으로 인한 외력 일(external work)의 합 즉 total potential energy가 정류치(stationary value)를 갖는다는 조건으로부터 임계(또는 좌굴)하중을 결정한다. 그러나 Rayleigh-Ritz법 역시 적분이 복잡하여 수치적분에 의존해야하는 등의 불편이 있으므로 현재에는 수치해석법에 의하여 임계하중을 산정함이 보통이다.

* 전남대학교 대학원 석사과정
** 동신대학교 건축공학과 부교수
*** 전남대학교 건축학과 교수

여기서는 수치해석법의 하나인 유한요소법을 이용하여 대칭 변단면의 임계하중을 산정하였다. 일반적으로 수치해석법의 적용으로 얻어진 결과는 어떤 계(system)의 매개변수들이 특정값을 취할 경우에만 유효하다는 단점이 있다. 따라서 본 논문에서는 수치해석 결과를 토대로 하여 간단한 대수식들을 제안하였다. 대수식에 포함되는 몇 개의 상수(constant)들은 회귀법을 이용하여 결정하였다. 또한 제안한 대수식의 적합여부를 판정하기 위한 상관계수 r 은 어느 경우에도 $r \approx 1$ 이었다.

2. 유한요소법의 정식화

그림 1과 같은 대칭 변단면 기둥의 임계하중을 지배하는 평행방정식은 다음식으로 주어진다.

$$EI_x \frac{d^2 v}{dx^2} + Pv = 0 \quad (1-a)$$

또는

$$\frac{d^2}{dx^2} [EI_x \frac{d^2 v}{dx^2}] + P \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (1-b)$$

단면 2차 모멘트가 그림 1에서처럼 정현(sine)함수의 형태로 변하게 되면 식 (1)로 주어지는 미분방정식의 정해는 구할 수 없고 따라서 임계하중 산정도 불가능하게 된다. 이때에는 차분법이나 유한요소법과 같은 수치해석법에 의하여 임계하중을 산정할 수 있는데 이번 연구에서는 유한요소법을 이용하기로 한다.

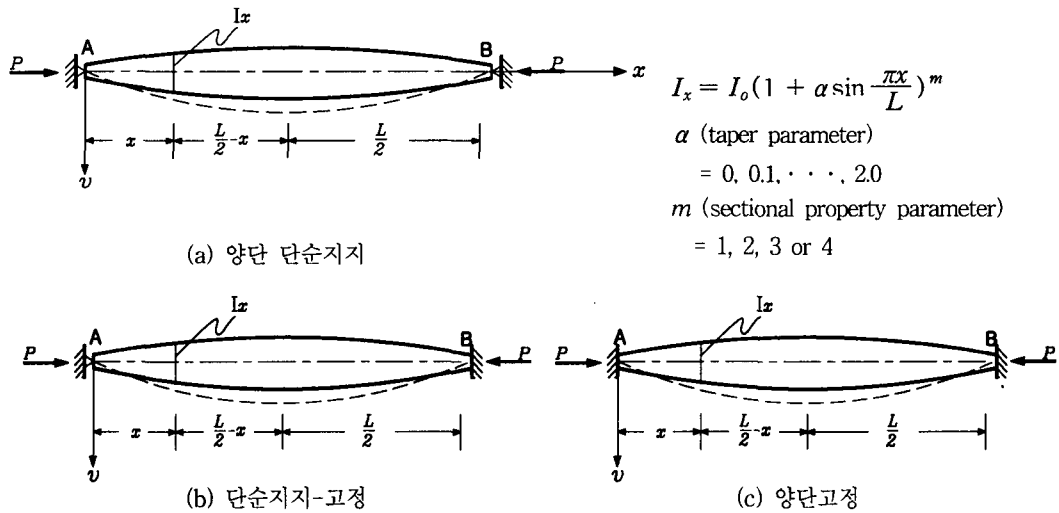


그림 1. 대칭 변단면 압축재

강성행렬법을 이용하여 변단면 압축재의 좌굴하중을 구하기 위하여 먼저 그림 2와 같이 각 절점에서의 자유도(d.o.f)가 2인 선형요소를 택한다. 이때의 변형성분 δ_i 와 절점력 성분 q_i 는 그림과 같이 가정한다. 어떤 요소의 임의점 x 에서의 수직 처짐 함수 v 는

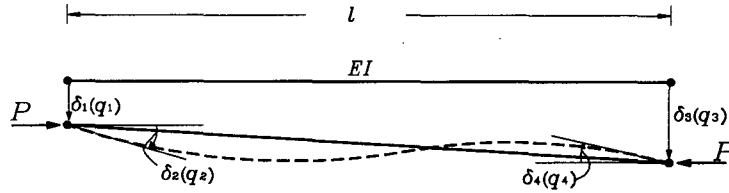


그림 2. 요소의 절점변형 및 절점력

$$v = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = [N]\{\delta\} \quad (2)$$

로 표시할 수 있는데 이 식중의 $[N]$ 은 shape function으로 그 성분 N_i 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N_1 &= -1 + 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, & N_2 &= x\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \\ N_3 &= -3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, & N_4 &= -\frac{x^2}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

또한 식 (2)에서 $\{\delta\}$ 는 절점변형 vector를 의미한다.

요소의 절점력 벡터 $\{a\}$ 와 절점변형 벡터 $\{\delta\}$ 와의 관계는 요소의 강성행렬 $[k]$ 에 의하여 다음식으로 결합된다.

$$\{a\} = [k]\{\delta\} \quad (4)$$

식 (4)에서 요소의 강성행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [k] &= \int_0^l \left[\frac{d^2 N}{dx^2} \right]^T EI_{(x)} \left[\frac{d^2 N}{dx^2} \right] dx - P \int_0^l \left[\frac{dN}{dx} \right]^T \left[\frac{dN}{dx} \right] dx \\ &= [k_b] - P[k_g] \end{aligned} \quad (5)$$

식 (5)에서 $[k_b]$ 는 요소의 휨을 고려한 휨 강성행렬이고 $[k_g]$ 는 휨 강성에 미치는 압축력의 영향을 나타내는 기하 강성행렬이다. 복잡한 계산을 피하기 위하여 요소내에서의 단면 2차 모멘트는 요소 중앙점에서의 값 $I_{(e)}$ 를 택하여 일정하다고 하면 식 (5)를 계산한 결과는 각각 다음과 같이 된다.

$$[k_b] = \frac{EI_{(e)}}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & & & \\ -6l & 4l^2 & & \\ -12 & 6l & 12 & \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{symm} \end{matrix} \quad (6-a)$$

$$[k_g] = \left(\frac{1}{30}\right) \cdot \frac{P}{l} \cdot \begin{bmatrix} 36 & & & \\ -3l & 4l^2 & & \\ -36 & 3l & 36 & \\ -3l & -l^2 & 3l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{symm} \end{matrix} \quad (6-b)$$

실제로 그림 1과 같은 대칭 변단면 압축재를 20등분($L=20l$) 할 경우 $m=2, \alpha=2.0$ 이면, 첫 번째 요소의 휨 강성행렬 중 $(k_{11})_b$ 즉, $\int_0^l [(\frac{d^2 N_1}{dx^2}) \cdot EI_0 \cdot (1 + \alpha \sin \frac{\pi x}{L})^2] dx$ 의 정확한 수치 적분 결과는 $16.22976 \cdot EI_0 / l^3$ 으로된다. 약산에 의한 $(k_{11})_b$ 는 먼저 $I_{(1)} = I_0(1 + 2 \sin \frac{\pi x}{L})^2 |_{x=0.5l} = 1.33846 I_0$ 가 되고, $\int_0^l (\frac{d^2 N_1}{dx^2}) dx = \int_0^l (\frac{144x^2}{l^6} - \frac{144x}{l^6} + \frac{36}{l^6}) dx = \frac{12}{l^3}$ 이므로 $(k_{11})_b$ 는 $16.06152 \cdot EI_0 / l^3$ 가 된다. 수치 적분 결과와 비교했을 때 오차는 약 -1.04%로 할 수 있는 정도이다.

3. 임계하중 산정

요소의 행렬인 식 (6-a)와 식 (6-b)를 전체요소에 대하여 결합하면 압축재 전체의 부재력 vector $\{Q\}$ 과 여기에 대응하는 부재변형 vector $\{\Delta\}$ 은 식 (4)와 비슷한 다음식으로 된다.

$$\{Q\} = [[K_b] - P[K_r]]\{\Delta\} \quad (7)$$

식 (7)에서 $[K_b]$ 와 $[K_r]$ 는 요소의 강성행렬이 조합된 후 양단에서의 경계조건이 처리된 압축재 전체의 강성행렬을 뜻한다. 일반적으로 압축재의 임계하중은 식 (7)의 우측행렬의 행렬식을 0(zero)으로 놓아 산정한다. 이것을 식으로 표시하면

$$\det([K_b] - P[K_r]) = 0 \quad (8)$$

식 (8)은 전형적인 고유치 문제로서 행렬식의 차수(dimension)가 클 때는 computer를 이용한 반복법(iteration method)를 이용하여 임계하중을 산정함이 편리하다. 식 (8)에 그대로 반복법을 적용할 경우 최대 임계하중이 맨 처음 구해지므로 식 (8)을 다음과 같이 변형시켜 최소 임계하중 즉 기본 mode에 대응하는 임계하중을 구한다.

$$\det\left([K_b]^{-1}[K_r] - \frac{1}{P}[I]\right) = 0 \quad (9)$$

식 (9)에서 $[I]$ 는 단위행렬(identity matrix)을 의미한다.

4. 임계하중 계산에

앞의 3절에서 전개한 이론을 그림 1과 같은 대칭 변단면 압축재의 좌굴하중산정에 응용하기로 한다. 일반적으로 요소를 세분할수록, 바꾸어 말하면 부재의 요소수를 증가시킬수록 수치해석법에 의한 결과는 정해치에 더욱 수렴하는 것으로 알려지고 있다. 이와같은 사실은 그림 1과 같은 변단면의 임계하중 산정에서 요소수 증가에 따른 임계하중의 수렴정도를 나타내는 다음의 그림 3으로부터 알 수 있다.

단면형태변화가 그림 1과 같을 때 정확한 임계하중식은 알 수 없으나 $N=16$ 부터는 거의 일정한 값을 유지하므로 여기서는 $N=20$, 즉 변단면 압축재를 20등분 한 다음 $\alpha = 0.1$ 에서 $\alpha = 2.0$ 까지 변할 때의 임계하중치를 산정하였고 그 결과는 표 1 및 표 2와 같다. 표에서 " C_{tem} "이란 열(column)이 유한요소법에 의한 결과이다. 단 양단이 단순지지된 압축재는 본 연구실의 홍종국이 이미 발표하였기 때문에 생략한다.

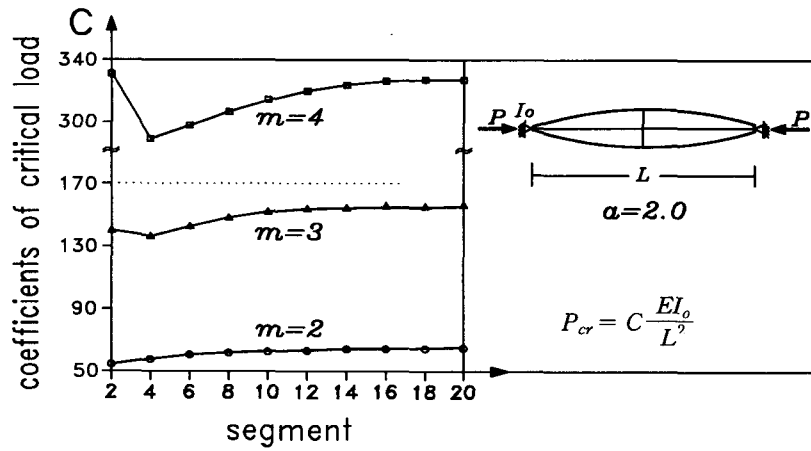


그림 3. 요소수의 증가와 수렴도

표 1. 적단 단순 - 우단 고정 (그림 1(b))

$$P_{cr} = C \cdot \frac{EI_o}{L^2}$$

α	m = 1		m = 2		m = 3		m = 4	
	C_{fem}	$C(\alpha, m)$	C_{fem}	$C(\alpha, m)$	C_{fem}	$C(\alpha, m)$	C_{fem}	$C(\alpha, m)$
0.0	20.1897	20.2762	20.1897	19.9608	20.1897	20.9386	20.1897	23.2096
0.1	21.5368	21.5626	22.9788	22.9015	24.5047	24.7651	26.1440	27.1533
0.2	22.8666	22.8616	25.8958	25.9268	29.3074	29.2376	33.1483	32.7940
0.3	24.1808	24.1734	28.9422	29.0366	34.6053	34.3560	41.3526	40.1316
0.4	25.4763	25.4978	32.1223	32.2309	40.4155	40.1204	50.7873	49.1661
0.5	26.7583	26.8348	35.4111	35.5098	46.7682	46.5308	61.6018	59.8976
0.6	28.0483	28.1845	38.8478	38.8733	53.6506	53.5871	73.8009	72.3260
0.7	29.3228	29.5469	42.4000	42.3212	61.1175	61.2894	87.5929	86.4513
0.8	30.5623	30.9219	46.0627	45.8537	69.1386	69.6376	102.9397	102.2735
0.9	31.8095	32.3096	49.8727	49.4708	77.7706	78.6318	119.8988	119.7927
1.0	33.0432	33.7100	53.7928	53.1724	86.9261	88.2720	138.7224	139.0088
1.1	34.2764	35.1230	57.8335	56.9585	96.7494	98.5581	159.1774	159.9218
1.2	35.4904	36.5486	61.9967	60.8291	107.1290	109.4902	181.3147	182.5317
1.3	36.7216	37.9870	66.2563	64.7843	118.1660	121.0682	205.4279	206.8386
1.4	37.9242	39.4380	70.6446	68.8241	129.8358	133.2922	231.6201	232.8424
1.5	39.1224	40.9016	75.1638	72.9483	142.1767	146.1622	259.2397	260.5431
1.6	40.3371	42.3779	79.7322	77.1571	155.0595	159.6781	289.3610	289.9407
1.7	41.5142	43.8669	84.5199	81.4505	168.6722	173.8400	320.9997	321.0353
1.8	42.7208	45.3685	89.3823	85.8284	182.9839	188.6478	354.6209	353.8268
1.9	43.9082	46.8828	94.3359	90.2908	197.7644	204.1016	390.0978	388.3152
2.0	45.0818	48.4098	99.4296	94.8378	213.3009	220.2014	426.8193	424.5006

표 2. 좌단 고정 - 우단 고정 (그림 1(c)) $P_{cr} = C \cdot \frac{EI_o}{L^2}$

α	m = 1		m = 2		m = 3		m = 4	
	C_{fem}	$C(\alpha, m)$	C_{fem}	$C(\alpha, m)$	C_{fem}	$C(\alpha, m)$	C_{fem}	$C(\alpha, m)$
0.0	39.4759	39.8272	39.4759	38.7499	39.4759	41.3914	39.4759	47.7517
0.1	41.8023	41.9343	44.2653	43.9725	46.8767	47.6358	49.6425	52.9239
0.2	44.0785	44.0576	49.2211	49.2365	54.9652	54.8822	61.3877	60.9946
0.3	46.3113	46.1969	54.3367	54.5417	63.7605	63.1306	74.8594	71.9636
0.4	48.4975	48.3523	59.6005	59.8882	73.2835	72.3811	90.2135	85.8310
0.5	50.6558	50.5238	65.0270	65.2759	83.5902	82.6336	107.6018	102.5968
0.6	52.7986	52.7114	70.6257	70.7049	94.6346	93.8881	127.1732	122.2609
0.7	54.8978	54.9151	76.3658	76.1752	106.5287	106.1446	149.0862	144.8235
0.8	56.9717	57.1349	82.2691	81.6867	119.2531	119.4032	173.5117	170.2884
0.9	59.0281	59.3708	88.3311	87.2394	132.7834	133.6638	200.5416	198.6438
1.0	61.0377	61.6228	94.5473	92.8335	147.1903	148.9264	230.4516	229.9015
1.1	63.0539	63.8908	100.9146	98.4687	162.5439	165.1910	263.2571	264.0575
1.2	65.0382	66.1750	107.4266	104.1453	178.7487	182.4576	298.9847	301.1120
1.3	67.0311	68.4752	114.0774	109.8631	195.9005	200.7263	338.0799	341.0648
1.4	68.9804	70.7915	120.9113	115.6221	214.0015	219.9970	380.7985	383.9161
1.5	70.9064	73.1239	127.8726	121.4224	233.1752	240.2697	426.6034	429.6657
1.6	72.8557	75.4724	134.9844	127.2640	253.1749	261.5444	476.6333	478.3137
1.7	74.7646	77.8370	142.2782	133.1468	274.2566	283.8212	530.3395	529.8600
1.8	76.6778	80.2177	149.7660	139.0709	296.5233	307.0999	587.6689	584.3048
1.9	78.5564	82.6145	157.3145	145.0362	319.5844	331.3807	649.6248	641.6479
2.0	80.4383	85.0274	165.0335	151.0429	343.7418	356.6636	714.3083	701.8895

5. 회귀식

수치해석법에 의한 결과치는 어떤 특정 경우에만 적용할 수 있고 따라서 일반화 할 수 없는 것은 일반적으로 알려진 사실이다. 여기서는 구조설계 실무에 종사하는 기술자가 그림 1과 같은 압축재의 설계에 당면하게 될 때 부재의 내력평가를 보다 신속히 하는데 도움이 되도록 다음과 같은 추정식을 제안하였다.

$$C(\alpha, m) = (A_o + A_1 m + A_2 m^2) + (B_o + B_1 m + B_2 m^2)\alpha + (C_o + C_1 m + C_2 m^2)\alpha^2$$

$$P_{cr} = C(\alpha, m) \cdot \frac{EI_o}{L^2} \quad (10)$$

식(10)의 상수들은 회귀법으로 결정하였으며 표 2는 이들을 정리한 것이다.

표 2. 회귀상수 [eq. 10]

	A_o	A_1	A_2	B_o	B_1	B_2	C_o	C_1	C_2	r
단순-고정	21.8848	-2.2552	0.6466	-13.5163	31.3837	-5.0666	21.5163	-33.1219	12.2386	1.0
고정-고정	44.6233	-6.6555	1.8594	-33.6549	69.4582	-12.8082	46.3259	-68.9113	23.3899	1.0

식 (10)의 추정식 결과가 유한요소법에 의한 임계하중치를 얼마나 충실히 반영하는가를 판정하는 하나의 방법으로 상관계수 r 을 도입하였다. 상관계수 r 은 다음식으로 계산된 값이다.

$$r = \frac{\sum (C_{fem} - \bar{C}_{fem}) \cdot (C(\alpha, m) - \bar{C}(\alpha, m))}{\sqrt{\sum (C_{fem} - \bar{C}_{fem})^2 \cdot \sum (C(\alpha, m) - \bar{C}(\alpha, m))^2}} \quad (12)$$

\bar{C}_{fem} 와 $\bar{C}(\alpha, m)$ 는 각 C_{fem} 과 $C(\alpha, m)$ 의 산술평균값을 의미한다.

다음 그림은 부재축에 따른 형태가 정현함수로 변하는 변단면에서 taper parameter α 와 sectional property parameter m 에 대해 좌굴하중의 변화가 어떻게 변화하는가를 보여주는 하나의 예이다.

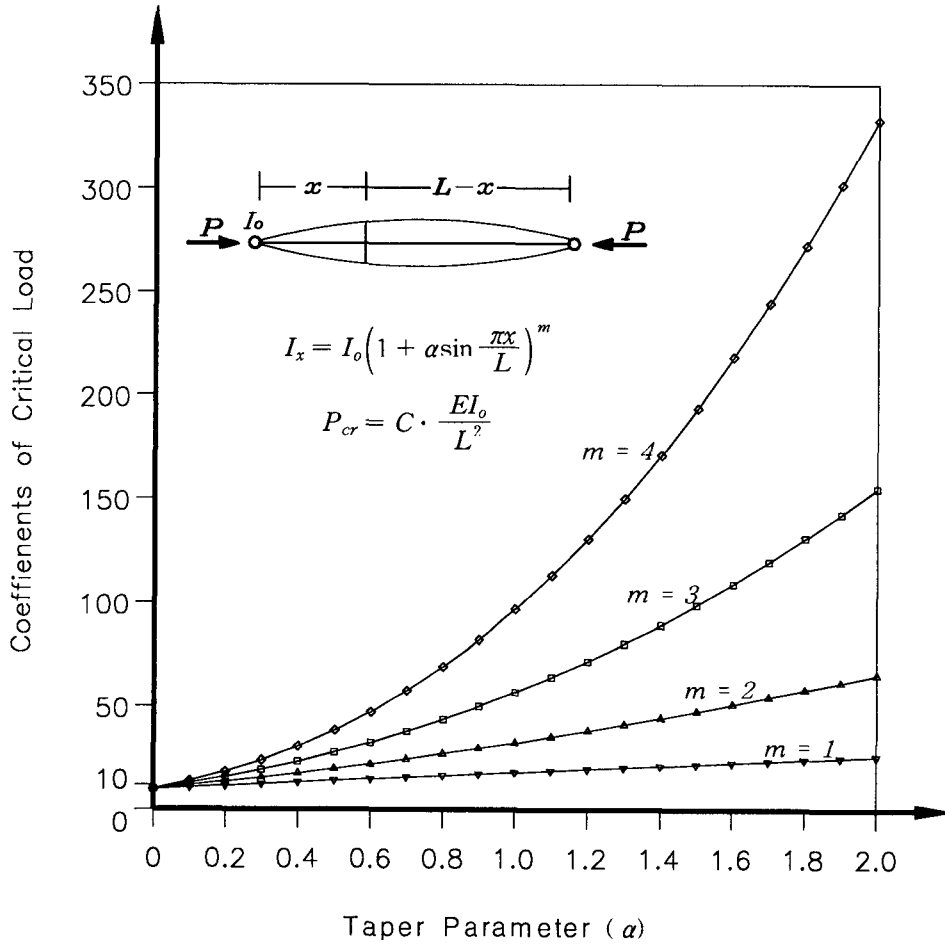


그림 4. 대칭 변단면 기둥의 임계하중 변화에 (양단 단순지지)

6. 결 론

양단이 단순지지된 변단면 압축재의 임계하중의 산정을 수치해석법의 하나인 유한요소법(finite element method)을 이용하여 구하였다. 유한요소법(finite element method)을 이용하여 얻은 좌굴하중의 표준치를 회귀분석법을 이용하여 간단한 2차식으로 제안하였다. 표준치인 유한요소법으로 산정한 임계하중과 제안식을 이용한 임계하중을 비교해 보면,

1. 예상했던 대로 taper parameter a 와 sectional parameter m 이 증가함에 따라 임계하중이 증가함을 알 수 있다.
2. 계수 C 값을 보면 최대 약 4%정도의 오차를 보일 뿐, 거의 모든 경우 1% 미만의 비교적 정확한 수치를 얻을 수 있어 산정된 임계하중 값을 신뢰할 수 있다.
3. 따라서 변단면 기둥의 설계나 구조 검토를 담당하는 구조 실무자들이 위의 제안식을 이용할 경우 쉽게 이용할 수 있고 정확한 결과를 얻을 수 있다.

참 고 문 헌

1. Stephen P. Timoshenko and James M. Gere, "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill Book Co., 1963
2. 이 수 곤, "Eigenvalue Problems of the Tapered Bars with Partially Fixed Ends", 서울대학교 대학원 박사학위 청구논문, 1979
3. Daniel J. Gorman, "Free Vibration Analysis of Beams and Shafts", John Wiley & Sons, Inc., 1975
4. Himat Solanki and Gajanan M. Sabnis, "Buckling Load of Tapered Columns", pp436~442, Structures Congress, 1989
5. Moshe Eisenberger and Yoram Reich, "Buckling of Variable Cross Section Columns", pp443~451, Structures Congress, 1989
6. Frank E. Weisgerber and Khalid Salahuddin, "Elastic Stability of Non-Prismatic Columns", pp410~417, Structures Congress, 1989
7. 이 수 곤, "構造物の 安定理論", 전남대학교 출판부, 1995
8. Alexander Chajes, "Principles of Structural Stability Theory", Prentice-Hall, Inc., 1974
9. 이 상 재, "變斷面 棒의 近似 臨界荷重", 전남대학교 대학원 석사학위 청구논문, 1980
10. 建築構造學大系 編輯委員會, "固有値問題", 彰國社(日本), 1967
11. W.F.Chen and E.M.Lui, "Structural Stability", Elsevier, 1987
12. 사 종 엽, Professor's Numerical Analysis Home Page, Ch.4, 회귀분석, Ch.5, 수치적분,
13. Murray R. Spiegel, "Probability and Statistics", Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Co., 1975
14. 홍 종 국, 김 순 철, 이 수 곤 "단순지지 변단면 압축재의 임계하중", 한국전산구조공학회 춘계 학술발표회 논문집, pp252~259, 1999