

## GA를 이용한 트러스 구조물의 이산최적설계

### Discrete Optimal Design of Truss Structure Using Genetic Algorithm

황 선 일\*  
Hwang, Seon-Il

조 홍 동\*\*  
Cho, Hong-Dong

이 상 근\*\*\*  
Lee, Sang-Kuen

한 상 훈\*\*\*\*  
Han, Sang-Hoon

---

#### ABSTRACT

This paper describes the application of genetic algorithm(GA) in the discrete optimal design of truss structures. Stochastic processes generate an initial population of design and then apply principles of natural selection/survival of the fittest to improve the design. GA is applied to minimum weight of truss subject to stress and displacement constraints under multiple loading conditions. First, optimum solutions obtained from GA are compared to verify the reliability of GA with an well-known transmission tower structure which is referred to by other authors. Then, discrete optimal design is performed in satisfying service conditions of truss structure with commercially available fabricated sizes. From the results, it is found that GA search technique is very effective for discrete optimal design of truss structure and has high robustness.

---

#### 1. 서 론

최근 들어 건설구조물 중 철강제품을 건설 주재료로서 사용하는 경우가 크게 증가하고 있다. 특히 트러스 구조물은 대부분이 강재로 이루어진 가장 일반적이고 대표적인 철강 구조물으로써 컴퓨터의 도움으로 복잡하고 대형화된 트러스 구조물의 해석 및 설계가 가능해지면서 보다 대중적인 구조물로 자리 잡았다. 따라서, 트러스 구조물이 다른 재료를 사용한 타 구조물에 비해 상대적인 우위를 점하면서도 앞으로도 더 많은 수요를 증진시키기 위해서는 경제성 있는 설계, 즉 최적설계가 반드시 뒤따라야만 할 것이다. 그러나, 지금까지의 트러스 최적설계는 사용성이 없는 이론적인 설계에 그치거나 또는 본 설계를 위한 초기설계로서의 역할을 담당하는 것에 불과하였다. 이는 고전적인 수치최적화기법을 적용하여 트러스 최적설계를 수행할 경우 설계 변수를 연속형으로 취급하기 때문에 이로부터 얻어진 최적 값을 실무 설계에 직접적으로 반영할 수 없기 때문이다. 더욱이, 트러스 최적화문제 자체가 다수의 제약조건에 의해 지배를 받는 동시에 최적화 과정동안 선택되어지는 단면의 강종과 세장비 등에 따라 제약조건식(특히, 부재의 허용압축응력 제약식) 자체가 바뀌

---

\* 충북대학교 대학원 토목공학과 석사과정  
\*\* 충북대학교 대학원 토목공학과 박사과정수료  
\*\*\* 충북대학교 건설기술연구소 전임연구원, 정회원  
\*\*\*\* 충북대학교 공과대학 토목공학과 교수, 정회원

게 되므로 매우 복잡한 형태를 지니게 되어 고전적인 수치최적화 방법으로는 이를 해결하기가 매우 어렵기 때문에, 문제 자체를 단순화하여 절점변위제약과 함께 수치적으로 단순하게 주어진 한계응력제약 하에서 트러스 최적설계를 수행하여 온 것이 사실이다. 따라서, 이러한 방법으로 얻어진 설계가 실무에 직접적으로 반영되기가 어려웠다.

본 연구에서는 고전의 확정론적 수치최적화 방법에서 탈피하여 확률론적 최적화 방법인 유전알고리즘(Genetic Algorithm, 이하 GA)을 이용하여 보다 사용성 있는 트러스 최적설계를 수행하였다. 트러스 최적설계에 GA를 적용할 경우, 그 동안 고려하기가 까다로웠던 부재의 강중별, 세장비별, 형강의 폭/두께(b/t)비별로 변화하는 압축부재의 허용압축응력에 관한 제약을 무리 없이 고려할 수 있기 때문에 가능하다.

## 2. 유전알고리즘(GA)

GA는 자연진화의 법칙인 적자생존(survival of fittest)과 자연도태(natural selection)의 원리를 기본 이론으로 하여 정립된 최적화 알고리즘이다. 탐색과정에 있어서, 설계영역에 다수의 설계점을 분포시켜 제약조건의 위배 정도에 따라 각 설계점에 적합도(fitness)를 부여하고, 세대수가 증가함에 따라 적합도가 높은 개체들은 더 많이 복제되면서 전체 설계점들은 좋은 방향으로 탐색이 진행된다.<sup>1)</sup> 탐색과정 중 집단 내에서 가장 적합도가 높은 엘리트 개체는 현 세대의 가장 나쁜 개체와 교체하여 교배나 돌연변이 없이 다음세대로 남기는 Dejong<sup>2)</sup>의 엘리트 보전전략(elitist strategy)이 사용되었다. 여기서, 한 세대는 재생산, 교배, 돌연변이의 한 사이클(cycle)을 일컬으며, 이들에 대한 작용원리는 다음과 같다.

### 2.1 재생산(reproduction)

재생산은 각각의 개체가 가지는 적합도에 따라 그 개체를 복제하는 과정이다. 이 과정은 적합도가 높은 개체일수록 다음 세대에 더 많은 자손을 가질 확률이 높게 되는 자연원리를 구현하게 된다. 이를 위한 개체 선택 도구로는 토너먼트 선택(tournament selection)을 사용하였다. 토너먼트 선택은 집단으로부터 결정된 수의 개체를 무작위로 선택하여, 그 중에서 적합도가 높은 개체를 다음 세대로 남기는 절차를 정해진 수의 개체가 선택될 때까지 반복하는 선택기법이다. 따라서, 재생산 과정을 통해 보다 나은 새로운 개체가 생성된다.

### 2.2 교배(crossover)

재생산 과정은 탐색 방향을 적합도가 가장 높은 개체 쪽으로 향하게 하지만 새로운 개체를 생성하지는 못한다. 자연계에서 자손(offspring)은 부모 세대로부터 유전자를 이어받으면서도 부모와는 전혀 다른 형질을 가지듯이 GA에서도 이 과정을 모방하는 것이 교배과정이다. 교배기법으로는 일정교배(uniform crossover)를 선택하였다. 일정교배는 교배시 매 개체마다 무작위로 생성된 마스크(mask)를 사용하여 그것에 의해 어느 쪽 부모의 유전자(gene)를 받아들일 것인가를 결정하는 기법이다.

### 2.3 돌연변이(mutation)

재생산과 교배과정은 집단의 개체들이 현재 가지고 있는 정보들을 이용해서 결합하고 탐색하는 것에 비해 돌연변이 과정은 현재 집단에 존재하지 않는 새로운 정보를 제공해 줄 수 있다. 이는 아주 낮은 돌연변이 확률(mutation probability)  $P_m$ 으로 문자열의 한 비트를 0에서 1로, 1에서 0으로 간단히 바꿈으로서 돌연변이를 발생시킨다. 이 과정은 과거에 잃어버렸던 중요한 정보를 되찾을 수도 있으며 탐색의 방향이 국부적 극값으로 향할 경우 여기서 벗어날 수 있는 가능성을 부여하게 된다.

### 3. 제약 최적화 문제의 적합도함수 정식화

GA 탐색은 단순히 목적함수의 적합도만을 요하기 때문에 제약 최소화문제(constrained minimization problem)는 먼저 비제약 최대화문제(unconstrained maximization problem)로 전환시킬 필요가 있다. 다음은 일반적인 제약최소화 문제의 형식이다.

$$\text{Minimize } F \quad (1)$$

$$\text{subject to } g_j \leq 0 \quad j=1, 2, \dots, n \quad (2)$$

위의 제약 최소화문제는 외부벌칙함수(exterior penalty function)를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{Minimize } F^* = F + \overline{P} \quad (3)$$

여기서,  $\overline{P}$ 는 벌칙 항이며, 본 연구에서는 이 값을 선택함에 있어 Lim과 Hajela<sup>3)</sup>의 경계화 전략(bounding strategy)을 사용하였다. 가능 설계들(feasible designs)의 평균 적합도를  $F_{av}$ 라 할 때, 벌칙의 극한값  $\overline{L}$ 는 다음과 같다.

$$\overline{L} = k F_{av} \quad (4)$$

식(4)의  $k$ 는 일반적으로 사용되는 2의 값을 사용하였다. 여기서, 비가능 설계에 가해지는 벌칙  $\overline{P}$ 는 다음 값을 사용하였다.

$$\overline{P} = \begin{cases} G, & \text{if } G \leq \overline{L} \\ \overline{L} + \alpha(G - \overline{L}), & \text{if } G > \overline{L} \end{cases} \quad (5)$$

그리고,  $\alpha$ 는 가능범위 0과 1 사이의 값 중 0.2를 사용하였고,  $G$ 는 다음과 같다.

$$G = r \sum_{j=1}^n \langle g_j \rangle^2 \quad (6)$$

식(6)의  $r$ 은 벌칙 매개변수로써 본 연구에선 초기 100에서 시작하여 매 세대마다 100씩 증가시켰다.  $\langle g_j \rangle$ 는 위배제약조건들만을 표현한다. 식(3)의 최소화 문제를 다음과 같이 최대화 문제로 재정식화 함으로써 GA가 요하는 적합도 함수를 얻을 수 있다.

$$\text{Maximize } \text{Fitness} = 1 / F^* \quad (7)$$

### 4. 최적설계 문제의 정식화

트러스 최적설계를 위한 목적함수는 트러스 구조물의 총 중량이며, 제약조건은 부재별 인장 및 압축응력 제약과 절점에서의 변위 제약을 고려하였다. 여기서, 인장 및 압축응력에 대한 제약식은 도로교시방서<sup>4)</sup>에 근거하여 형성하였다. 최적설계 문제 정식화는 다음과 같다.

$$\text{Minimize } W = \sum_{i=1}^n \gamma_i A_i L_i \quad (8)$$

$$\text{subject to } f_{tkl} \leq \overline{f}_t \quad k = 1, \dots, n ; l = 1, \dots, c \quad (9)$$

$$f_{ckl} \leq \overline{f}_c \quad k = 1, \dots, n ; l = 1, \dots, c \quad (10)$$

$$u_{jl} \leq \overline{u}_j \quad j = 1, \dots, f ; l = 1, \dots, c \quad (11)$$

$$a_i \in \mathbf{a}_i \quad (12)$$

여기서,  $W$ 는 트러스 구조물의 총 중량,  $\gamma_i$ 는 강재의 단위 중량,  $A_i$ 는 부재의 단면적,  $L_i$ 는 트러스 부재의 길이, 그리고  $n$ 은 부재의 총 수이다. 식(9)에서 허용축방향인장응력  $\bar{f}_t$ 는 Table 1과 같으며, 식(10)의 허용축방향압축응력  $\bar{f}_c$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{f}_c = f_{cag} \cdot f_{cat} / f_{cao} \quad (13)$$

여기서,  $f_{cag}$ : Table 2에 표시된 국부좌굴을 고려치 않은 허용축방향 압축응력

$f_{cat}$ : Table 3에 규정한 국부좌굴에 대한 허용응력

$f_{cao}$ : Table 2 (a)에 제시된 국부좌굴을 고려치 않은 허용축방향 압축응력의 상한치

Table 1. 허용축방향인장응력( kgf/cm<sup>2</sup>)

강 종	SS 400 SWS 400 SMA 41	SWS 490	SWS 490Y SWS 520 SMA 50	SWS 570 SMA 58
축방향인장응력	1,400	1,900	2,100	2,600

Table 2. 국부좌굴을 고려하지 않은 허용축방향 압축응력( kgf/cm<sup>2</sup>)

강 종	SS 400 SWS 400 SMA 41	SWS 490	SWS 490Y SWS 520 SMA 50	SWS 570 SMA 58
축방향압축응력	(a) $\frac{l}{r} \leq 20$ 1,400	(a) $\frac{l}{r} \leq 15$ 1,900	(a) $\frac{l}{r} \leq 14$ 2,100	(a) $\frac{l}{r} \leq 18$ 2,600
	(b) $20 < \frac{l}{r} \leq 93$ $1,400 - 8.4\left(\frac{l}{r} - 20\right)$	(b) $15 < \frac{l}{r} \leq 80$ $1,900 - 13\left(\frac{l}{r} - 15\right)$	(b) $14 < \frac{l}{r} \leq 76$ $2,100 - 15\left(\frac{l}{r} - 14\right)$	(b) $18 < \frac{l}{r} \leq 67$ $2,600 - 22\left(\frac{l}{r} - 18\right)$
	(c) $93 < \frac{l}{r}$ $\frac{12,000,000}{6,700 + (l/r)^2}$	(c) $80 < \frac{l}{r}$ $\frac{12,000,000}{5,000 + (l/r)^2}$	(c) $76 < \frac{l}{r}$ $\frac{12,000,000}{4,500 + (l/r)^2}$	(c) $67 < \frac{l}{r}$ $\frac{12,000,000}{3,500 + (l/r)^2}$
비고	$l$ : 부재의 유효좌굴길이 (cm) $r$ : 부재의 총단면의 단면2차반지름 (cm)			

Table 3. 자유돌출판의 국부좌굴에 대한 허용응력( kgf/cm<sup>2</sup>)

강 종	국부좌굴에 대한 허용응력	강 종	국부좌굴에 대한 허용응력
SS 400 SWS 400 SMA 41	1,400 : $\frac{b}{13.1} \leq t$ $240,000 \left(\frac{t}{b}\right)^2$ : $\frac{b}{16} \leq t \leq \frac{b}{13.1}$	SWS 490Y SWS 520 SMA 50	2,100 : $\frac{b}{10.7} \leq t$ $240,000 \left(\frac{t}{b}\right)^2$ : $\frac{b}{16} \leq t \leq \frac{b}{10.7}$
SWS 490	1,900 : $\frac{b}{11.2} \leq t$ $240,000 \left(\frac{t}{b}\right)^2$ : $\frac{b}{16} \leq t \leq \frac{b}{11.2}$	SWS 570 SMA 58	2,600 : $\frac{b}{9.6} \leq t$ $240,000 \left(\frac{t}{b}\right)^2$ : $\frac{b}{16} \leq t \leq \frac{b}{9.6}$

## 5. GA의 신뢰성 검증

먼저 GA를 이용하여 트러스의 이산최적설계를 수행하기 이전에, 알고리즘의 신뢰성 및 범용성을 검증하기 위해 25부재 입체 트러스 구조물을 가지고 설계조건을 기존 참고문헌 5)~8)에서 제시한 것과 동일하게 설정한 후, 설계변수를 연속형과 이산형으로 고려하여 최적설계를 수행하였으며 그 결과를 비교·검토하였다. GA 탐색과정에서 필요한 GA 매개변수 값들로서 다음과 같이 집단크기(size of population)는 100, 교배 확률(probability of crossover,  $P_c$ )은 0.8, 그리고 돌연변이 확률(probability of mutation,  $P_m$ )은 0.01로 하였다.

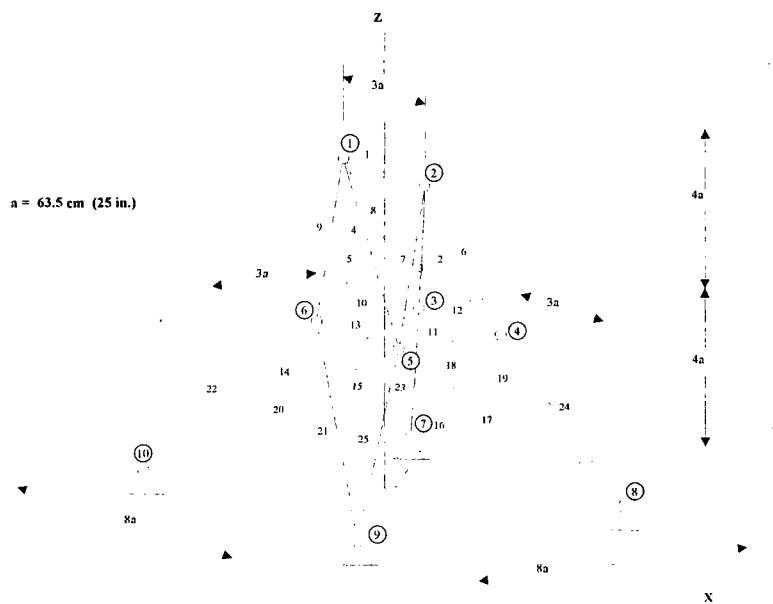


Fig. 1 25 bar space truss

Table 4. Data for 25 bar space truss

Modulus of elasticity:	$10^7$ psi	Minimum area:	$0.01 \text{ in}^2$
Specific weight:	$0.10 \text{ lb/in}^3$	No. of design variable:	8
Displacement limit:	$\pm 0.35 \text{ in.}$	No. of load case:	2

Table 5. Allowable stresses for 25 bar space truss (ksi)

Members	Tension	Compression	Members	Tension	Compression
1	40.0	-35.092	12,13	40.0	-35.092
2-5	40.0	-11.590	14-17	40.0	-6.759
6-9	40.0	-17.305	18-21	40.0	-6.959
10,11	40.0	-35.092	22-25	40.0	-11.082

Table 6. Nodal load components (kips) for 25 bar space truss

Load case	Node	x	y	z
1	1	1.0	10.0	-5.0
	2	0.0	10.0	-5.0
	3	0.5	0.0	0.0
	6	0.5	0.0	0.0
2	1	0.0	20.0	-5.0
	2	0.0	-20.0	-5.0

Table 7. Optimum results for 25 bar space truss

Design variable	Member No.	Ref. <sup>3)</sup> Haftka	Ref. <sup>6)</sup> Arora	GA
1	1	0.010	0.010	0.010
2	2-5	1.987	2.048	1.981
3	6-9	2.991	2.997	2.989
4	10,11	0.010	0.010	0.010
5	12,13	0.012	0.010	0.010
6	14-17	0.683	0.685	0.714
7	18-21	1.679	1.622	1.682
8	22-25	2.664	2.671	2.626
Total weight (lb)		545.22	545.04	545.30

Fig. 1은 25부재를 갖는 입체 트러스 구조물로서 25개의 단면적은 8개의 설계변수로 연계하였으며, 이 구조물에 대한 설계자료와 부재의 허용응력 및 하중조건은 각각 Table 4, 5, 6과 같다. Table 7은 본 연구에 의한 결과와 기존 문헌에 의한 결과를 비교한 것이다. 여기서 알 수 있듯이, GA에 의해 얻은 최소 중량과 최적설계변수 값이 기존 문헌에서 제시한 값들과 비교할 때 신뢰성 있는 값을 나타내고 있음을 알 수 있다.

또한, GA의 이산최적화에 대한 신뢰성을 검증하기 위해 설계변수의 이산 집합으로서  $x_1=(0.01, 0.1, 0.2, 0.3, \dots)$ 과  $x_2=(0.01, 0.4, 0.8, 1.2, \dots)$ 로 고려하여 이산최적화를 수행하였다. 그 결과를 Table 8에서 알 수 있듯이, 두 경우 모두에서 신뢰할 만한 이산 최적해를 얻었다.

Table 8. Optimum results for 25 bar space truss with discrete design variables

Design variable	$x_1=(0.01, 0.1, 0.2, 0.3, \dots)$			$x_2=(0.01, 0.4, 0.8, 1.2, \dots)$		
	Ref. <sup>1)</sup> Schmit	SDR <sup>8)</sup>	GA	Ref. Schmit	SDR	GA
1	0.10	0.01	0.01	0.40	0.01	0.01
2	2.00	2.10	1.90	2.00	2.00	1.60
3	3.00	3.00	3.00	3.20	3.20	3.60
4	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
5	0.10	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
6	0.70	0.60	0.80	0.80	0.80	0.80
7	1.70	1.60	1.80	2.00	1.60	2.00
8	2.70	2.80	2.50	2.40	2.80	2.40
Total weight (lb)	553.00	547.04	549.57	575.41	564.86	568.69

## 6. 적용예

25부재 입체 트러스의 보다 실질적인 최적설계를 위해 부재 선택을 현재 생산중인 Table 9의 등변 L형강의 강재제원표로부터 선택되도록 하였으며, L형강의 강종은 9개의 강종(SS 400, SWS 400, SMA 41, SWS 490, SWS 490Y, SWS 520, SMA 50, SWS 570, SMA 58) 중에서 설계자에 의해 자유롭게 선택할 수 있도록 하였다. 강재의 탄성계수와 단위중량과 같은 물성치는 도로교시방서에서 제시하는 값을 사용하였다.

Table 9. 등변 L 형강에 대한 강재제원표

치수(mm)		단면적 ( $\text{cm}^2$ )	최소회전반경 (cm)	치수(mm)		단면적 ( $\text{cm}^2$ )	최소회전반경 (cm)	치수(mm)		단면적 ( $\text{cm}^2$ )	최소회전반경 (cm)
A×B	t			A×B	t			A×B	t		
25×25	3	1.427	0.483	75×75	9	12.69	1.45	150×150	19	53.38	2.91
30×30	3	1.727	0.585	75×75	12	16.56	1.44	175×175	12	40.52	3.44
40×40	3	2.336	0.79	80×80	6	9.327	1.58	175×175	15	50.21	3.42
40×40	5	3.755	0.77	90×90	6	10.55	1.78	200×200	15	57.75	3.93
45×45	4	3.492	0.88	90×90	7	12.22	1.77	200×200	20	76.00	3.90
45×45	5	4.302	0.874	90×90	10	17.00	1.74	200×200	25	93.75	3.88
50×50	4	3.892	0.98	90×90	13	21.71	1.73	250×250	25	119.4	4.90
50×50	5	4.802	0.976	100×100	7	13.62	1.98	250×250	35	162.6	4.83
50×50	6	5.644	0.963	100×100	10	19.00	1.95				
60×60	4	4.692	1.19	100×100	13	24.31	1.94				
60×60	5	5.802	1.18	120×120	8	18.76	2.38				
65×65	5	6.367	1.28	130×130	9	22.74	2.57				
65×65	6	7.527	1.27	130×130	12	29.76	2.54				
65×65	8	9.761	1.25	130×130	15	36.75	2.53				
70×70	6	8.127	1.37	150×150	12	34.77	2.96				
75×75	6	8.727	1.48	150×150	15	42.74	2.92				

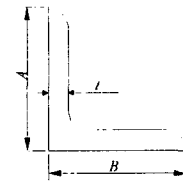


Table 10. Data for 25 bar space truss

Modulus of elasticity:	$2.047 \times 10^6 \text{ kgf/cm}$
Specific weight:	$0.00785 \text{ kgf/cm}^3$
Displacement limit:	$\pm 1.0 \text{ cm}$
No. of design variable:	8
No. of load case:	2

Table 11. Nodal load components (kgf) for 25 bar space truss

Load case	Node	x	y	z
1	1	454.0	4,540.0	-2,270.0
	2	0.0	4,540.0	-2,270.0
	3	227.0	0.0	0.0
	6	227.0	0.0	0.0
2	1	0.0	9,080.00	-2,270.0
	2	0.0	-9,080.0	-2,270.0

Table 12. Optimum results for 25 bar space truss

Design variable	Member No.	SS 400	SWS 490	SWS 520	SWS 570
1	1	1.427	2.336	1.427	1.427
2	2-5	18.760	19.000	19.000	19.000
3	6-9	18.760	19.000	19.000	19.000
4	10,11	1.427	1.427	1.427	1.427
5	12,13	2.336	2.336	3.492	3.492
6	14-17	12.220	12.220	16.560	16.560
7	18-21	22.740	22.740	29.760	29.760
8	22-25	18.760	22.740	19.000	19.000
Total weight (kgf)		1,073.21	1,121.48	1,247.89	1,247.89

## 7. 결 론

본 연구에서는 고전의 확정론적 수치최적화 방법에서 탈피하여 확률론적 최적화 방법인 GA를 이용하여 보다 사용성 있는 트러스의 이산최적설계를 수행하였으며, 이에 대해 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) GA의 신뢰성 및 범용성을 검증하기 위하여 25부재 입체 트러스 구조물의 이산 최적설계를 수행한 결과, 매우 만족할 만한 결과를 얻었다.
- 2) 트러스 최적설계 과정에서 제약조건식 자체가 단면의 강종과 세장비 등에 따라 수시로 변하는 탄력적인 제약조건을 GA는 별다른 변화 없이 해결할 수 있음을 보였다.
- 3) 현행 도로교시방서 기준에 맞는 트러스 최적설계를 도출함으로써 보다 실질적인 설계를 제시하였다.
- 4) 설계자가 임의로 강종을 선택할 수 있도록 함으로써 보다 범용성 있는 설계가 되도록 하였다.

## 참 고 문 헌

1. Goldberg, D. E., "Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1984.
2. Deiong, K., "An Analysis of the Behavior of a Class of Genetic Adaptive Systems", Ph.D. Thesis, University of Michigan, 1975.
3. Lim, C. Y., and Hajela, P., "Genetic Algorithms in Optimization Problems with Discrete and Integer Design Variables", *Engineering Optimization*, Vol. 19, 1992, pp. 309~321.
4. 건설교통부, "도로교표준시방서", 대한토목학회, 1996, pp. 123~155.
5. Raphael T. Haftka and Zafer Gürdal, "Elements of Structural Optimization", Kluwer Academic Publishers, 1992.
6. Haug, E. J. and Arora, J. S., "Applied Optimal Design", John Wiley & Sons, Inc., 1979.
7. L. Schmit and C. Fleury, "Discrete-continuous variable structural synthesis using dual methods", *AIAA J.*, Vol. 18, 1980, pp. 1515~1524.
8. A. A. Groenwold, N. Stander and J. A. snyman, "A pseudo-discrete rounding method for structural optimization", *Struct. Opt.*, Vol. 11, 1996, pp. 218~227.