

## LOVE이론에 근거한 원통형셸의 휨좌굴해석 Bending Buckling Analysis of Circular Cylindrical Shell based on LOVE Type Solution

김성도\*  
Kim. Seong-Do

하지명\*\*  
Ha, Ji-Myung

이시형\*\*\*  
Lee Si-Hyung

### ABSTRACT

The bending buckling behavior of circular cylindrical shell is studied. The classical analysis by Love type solution and the package program LUSAS for the structural analysis are used to estimate the critical stresses of circular cylindrical shells under axial compression and bending loads. In this paper, the Love type of buckling equation is carefully investigated and numerical results are presented for a wide range of radius-to-thickness ( $R/t$ ) ratios and length-to-radius ( $L/R$ ) ratios. These results show that the maximum critical bending stress is about 30~80% greater than the critical compressive stress

### 1. 서 론

셸은 외부 하중에 매우 효과적으로 저항할 수 있으며, 기하학적 및 미적 특성 때문에 대형 공학 구조물들에 널리 적용되고 있다. 이들 공학 구조물에 작용하는 하중 형태는 주로 축압축력, 내·외압, 휨, 비틀 등이며, 이에 대한 연구는 무수히 많이 수행되어 왔었다. 고전적 이론을 바탕으로 한 해석해와 수치해석 특히 유한요소법에 의한 수치해 그리고, 다양한 재료로 만들어진 실물 및 모형들의 실험해들이 여러 가지 종류의 셸, 하중형태, 경계조건들에 대해 제시되고 비교, 검토되었다.

본 연구에서는 휨력을 받는 원통형 셸들의 좌굴 거동을 고전적 이론을 바탕으로 조사하고, 축압축 하의 셸 거동과 비교하며, 이들 고전해들을 범용 구조해석 프로그램인 LUSAS에 의한 수치해들과 비교, 고찰한다.

휨을 받는 원통형 셸들의 좌굴 거동은 축압축 하의 거동과는 조금 다르다. 즉, 휨을 받는 셸의 단면은 일정한 응력 분포를 가진 축압축 하의 셸 단면과는 다르게 변화하는 응력분포를 가지며, 단면의 형태가 타원형으로 되는 경향(Brazier, 1927)을 가진다. Donnell(1934)은 휨 탄성 좌굴 응력이 압축 임계응력보다 다소간 더 큼(1.3~1.5배 정도)을 밝혔으며, Flugge(1932)와 Timoshenko & Gere(1961)도 같은 결론을 얻었다. 그러나, Weingarten & Seide(1961)는 두 임계응력들이 거의 같다는 결론을 이끌어 내었다. 하지만 이들 논의들은 대부분 특정한 재료 및 기하학적 조건 하에서 이루어져 일반적으로 적용하기에는 한계가 있으며, 따라서 현재까지 대부분의 설계에서는 탄성적으로 좌굴하는 원통형 셸의 임계 휨 응력을 직접 계산하기 힘들어, 축 압축 좌굴응력을 대신 적용하고 있는 실정이다.

본 연구에서는 휨 좌굴응력에 대한 고전해를 전개하고, 범용 구조해석 프로그램인 LUSAS를 이용하여 기

\* 경성대학교 건설·환경공학부 부교수  
\*\* 풍림 파이버랩 건설  
\*\*\* 경성대학교 건설·환경공학부 석사과정

하학적 범위(반경-두께 비, 길이-반경 비)를 다양하게 고려한 좌굴해석을 수행하여, 원통형 쉘의 휨 좌굴거동을 살펴본다.

## 2. LOVE이론에 의한 원통형 쉘의 좌굴해석

그림2.1과 같이 평균반경, 길이, 두께가 각각  $a, L, t$ 인 원통형 쉘을 고려한다. 쉘에 대한 좌표계는  $x, \theta, \rho$ 를 적용하며, 각각 길이방향, 원주방향, 반경방향을 나타낸다. 그리고,  $x, \theta, \rho$ 방향으로의 변위들은  $u, v, w$ 이다. 이러한 형태의 원통형 쉘이 축압축력 및 휨모멘트를 받을 때, Love이론을 바탕으로 한 좌굴해를 전개한다.

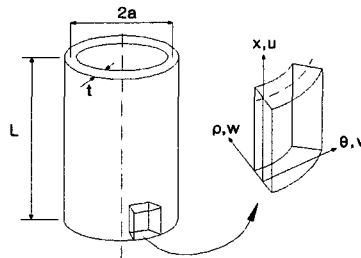


그림 2.1 원통형 쉘의 기하학적 성질 및 좌표계

### 2.1. 변형률-변위관계식

Love의 얇은 쉘 가정에 의하면, 변형전 중면에 대한 법선은 변형후 길이변화 없이 중면에 수직을 유지하며 직선으로 남는다. 이러한 Love의 가정을 적용하면 얇은 쉘 해석이 크게 단순화 될 것이다. 즉, 쉘 두께에 걸친 모든 위치에서의 변위 즉, 변형률, 응력들을 중면에서의 변위항으로 정의할 수가 있으며, 이는 실제로 3차원 문제를 2차원 문제로 할 수가 있다. 이러한 고전적 쉘이론에서 원통형 쉘에 대한 일반적인 변형률 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \rho \\ \epsilon_\theta &= \frac{\partial v}{a \partial \theta} - \frac{w}{a} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{a \partial \theta} + \frac{v}{a} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{a \partial \theta} - \frac{w}{a} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{a \partial \theta} \right)^2 \right] - \left( \frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \theta^2} + \frac{w}{a^2} \right) \rho \dots \dots \dots (2.1.1) \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{a \partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{a \partial \theta} + \frac{v}{a} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{a \partial \theta} - \frac{w}{a} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{a \partial \theta} \\ &\quad - \left( \frac{2}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \rho \end{aligned}$$

여기서, Love의 가정에 따라  $\epsilon_\rho = \gamma_{x\rho} = \gamma_{\theta\rho} = 0$ 이 된다.

원통형 쉘에 대한 좌굴해석을 수행할 때, 위 식과 같이 상대적으로 작은 크기의 미소항들이 많이 나타나게 되는데, 이런 항들을 모두 고려한다면 식들은 매우 복잡하게 되어 실용적으로 활용할 수가 없다. 따라서 (2.1.1)식들에서 비선형 항들을 소거하고, 쉘 중면의 변형조건을 적용하여, 변형률-변위 관계식을 식(2.1.3)와 같이 간단하게 줄인다. 이때, 쉘 중면의 변형조건식들은 (2.1.2)식과 같다.

$$\epsilon^0_\theta = \frac{\partial v_0}{a \partial \theta} - \frac{w}{a} = 0, \quad \gamma^0_{x\theta} = \frac{\partial u_0}{a \partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots (2.1.2)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \rho \\ \epsilon_\theta &= \frac{\partial v_0}{a \partial \theta} - \frac{w}{a} - \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) \rho \dots \dots \dots (2.1.3) \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{\partial u_0}{a \partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{2}{a} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) \rho \end{aligned}$$

여기서, 하첨자 0는 쉘 중면을 의미한다.

식(2.1.3)을 중면에 대한 변형률항 ( $\varepsilon^0$ )과 곡률항 ( $\chi$ )으로 구분하여 표현할 수 있다.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + \rho\{\chi\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{a\partial\theta} - \frac{w}{a} \\ \frac{\partial u_0}{a\partial\theta} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{array} \right\} + \rho \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial v_0}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2} \right) \\ -\frac{2}{a} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\theta} \right) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2.1.4)$$

## 2.2. 구성방정식

2차원 응력상태의 미소요소에 힘-변위 관계식을 설정하기 위해, 요소의 중면에 작용하는 응력들을 두께에 걸쳐 적분하여 단위길이당 합응력 및 모멘트를 다음과 같이 응력들의 항으로 표현한다.

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x d\rho & M_x &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x \rho d\rho \\ N_\theta &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_\theta d\rho & M_\theta &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_\theta \rho d\rho \dots\dots\dots (2.2.1) \\ N_{x\theta} &= N_{\theta x} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{x\theta} d\rho & M_{x\theta} &= M_{\theta x} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{x\theta} \rho d\rho \end{aligned}$$

여기서, 등방성 재료에 대하여 미소요소에 작용하는 응력들을 변형률 항으로 나타내면 다음과 같다.

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{x\theta} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2.2.2)$$

(2.2.2)식에 (2.1.3)식을 대입하여, 쉘 미소요소에서의 응력을 요소 중면에서의 변형률과 곡률의 항으로 나타낸 후 이 식을 (2.2.1)식에 대입하여 두께에 걸쳐 적분을 수행하면 합응력 및 모멘트들을 변형률항들로 나타낼 수 있다. 즉,

$$\left\{ \begin{array}{c} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \end{array} \right\} + \left[ \begin{array}{ccc} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \chi_x \\ \chi_\theta \\ \chi_{x\theta} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2.2.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \end{array} \right\} + \left[ \begin{array}{ccc} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \chi_x \\ \chi_\theta \\ \chi_{x\theta} \end{array} \right\}$$

여기서,  $A_{ij}$ 는 축방향 힘들에 대한 강성도이며,  $B_{ij}$ 는 축력과 휨 모멘트 모두에 관련된 소위, 연성(coupling) 강성도를 의미하고,  $D_{ij}$ 는 휨력에 대한 강성도를 의미한다. 이제, (2.2.3)식의 변형률항 및 곡률항들에 변형률-변위관계식을 대입하면, 소위 원통형 쉘에 대한 구성 방정식 즉, 힘-변위 관계식들이 설정되며, 강성도항들을 전개한 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{matrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{matrix} = \begin{matrix} A_{11} \frac{\partial}{\partial x} + A_{16} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} & A_{12} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} + A_{16} \frac{\partial}{\partial x} - B_{12} \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - B_{16} \frac{2}{a} \frac{\partial}{\partial x} & -A_{12} \frac{1}{a} - B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - B_{12} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - B_{16} \frac{2}{a} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\ A_{12} \frac{\partial}{\partial x} + A_{26} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} & A_{22} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} + A_{26} \frac{\partial}{\partial x} - B_{22} \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - B_{26} \frac{2}{a} \frac{\partial}{\partial x} & -A_{22} \frac{1}{a} - B_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - B_{22} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - B_{26} \frac{2}{a} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\ A_{16} \frac{\partial}{\partial x} + A_{66} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} & A_{26} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} + A_{66} \frac{\partial}{\partial x} - B_{26} \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - B_{66} \frac{2}{a} \frac{\partial}{\partial x} & -A_{26} \frac{1}{a} - B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - B_{26} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - B_{66} \frac{2}{a} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\ B_{11} \frac{\partial}{\partial x} + B_{16} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} & B_{12} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} + B_{16} \frac{\partial}{\partial x} - D_{12} \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - D_{16} \frac{2}{a} \frac{\partial}{\partial x} & -B_{12} \frac{1}{a} - D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - D_{12} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - D_{16} \frac{2}{a} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\ B_{12} \frac{\partial}{\partial x} + B_{26} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} & B_{22} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} + B_{26} \frac{\partial}{\partial x} - D_{22} \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - D_{26} \frac{2}{a} \frac{\partial}{\partial x} & -B_{22} \frac{1}{a} - D_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - D_{22} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - D_{26} \frac{2}{a} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\ B_{16} \frac{\partial}{\partial x} + B_{66} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} & B_{26} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} + B_{66} \frac{\partial}{\partial x} - D_{26} \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - D_{66} \frac{2}{a} \frac{\partial}{\partial x} & -B_{26} \frac{1}{a} - D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - D_{26} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - D_{66} \frac{2}{a} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \end{matrix} \begin{matrix} u_0 \\ v_0 \\ w \end{matrix} \quad (2.2.4)$$

### 2.3. 원통형 쉘 변형에 대한 평형방정식

쉘 미소요소에 작용하는 힘들에 대하여 평형을 고려하고, 원통형 쉘의 좌굴해석에 대한 Love 형태의 평형방정식을 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} x \text{ 축 : } & a \frac{\partial N_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta 1}}{\partial \theta} = 0 \\ \theta \text{ 축 : } & \frac{\partial N_{\theta 1}}{\partial \theta} + a \frac{\partial N_{x\theta 1}}{\partial x} - \frac{\partial M_{x\theta 1}}{\partial x} - \frac{\partial M_{\theta 1}}{a \partial \theta} + a N_{x\theta} \frac{\partial^2 v_{\theta 1}}{\partial x^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.3.1) \\ \rho \text{ 축 : } & a \frac{\partial^2 M_{x1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{x\theta 1}}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 M_{\theta 1}}{a \partial \theta^2} + N_{\theta 1} + a N_{x\theta} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0 \end{aligned}$$

여기서, 첨자들 중 마지막에 나타나는  $o$ 는 좌굴 이전의 값을 의미하며,  $1$ 은 좌굴동안에 발생하는 이들 값의 변화를 의미한다. (2.3.1)식에서 원주방향( $\theta$ )으로의 전단성분 ( $\partial M_{x\theta 1} / \partial x$ ,  $\partial M_{\theta 1} / a \partial \theta$ )과 축방향( $x$ )으로의 곡률 성분 ( $\partial^2 v_{\theta 1} / \partial x^2$ ) 을 무시하면 Donnell 형태의 평형방정식이 된다.

### 2.4. Love의 좌굴지배방정식 전개

원통형 쉘에 대한 좌굴 지배방정식을 전개하기 위해 (2.2.4)식의  $N$ ,  $M$ 항들을 평형방정식(2.3.1)에 대입하여 정리하면, 결국 (2.3.1)식은 ( $u_o, v_o, w$ )를 변수로 하는 선형 대수 방정식으로 표현된다. 이때,  $H_{ij}$  ( $i, j=1,3$ )는 Love이론을 근거로 하여 정의되는 항들이며 미분연산자들과 앞서 정의된 강성도( $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$ )들로 구성 되어 있다.

$$\begin{aligned} x \text{ 축 : } & H_{11}u_o + H_{12}v_o + H_{13}w = 0 \\ \theta \text{ 축 : } & H_{21}u_o + H_{22}v_o + H_{23}w = 0 \quad \dots\dots\dots (2.4.1) \\ \rho \text{ 축 : } & H_{31}u_o + H_{32}v_o + H_{33}w = 0 \end{aligned}$$

위 식을 matrix로 표현하면 결국, Love형태의 좌굴 지배 미분방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_o \\ v_o \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2.4.2)$$

## 3. 축압축력을 받는 원통형 쉘의 좌굴식 전개

### 3.1. 축 하중분포를 고려한 선형대수방정식의 전개

축압축력을 받는 원통형 쉘에서  $u_o, v_o, w$  에 대한 변형모드는 아래 형태로 가정할 수 있으며, 이 변위 함수들은 단순지지 경계조건을 만족한다.

$$u_o = A \cos \frac{m\pi x}{L} \sin n\theta, \quad v_o = B \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\theta, \quad w = C \sin \frac{m\pi x}{L} \sin n\theta \quad \dots\dots\dots (3.1.1)$$

여기서,  $A, B, C$  는 미지상수이며,  $m$  및  $2n$ 는 각각, 쉘의 축방향( $x$ )으로의 반파수, 원주방향( $\theta$ )으로의 반파

수들이다. Love형태의 좌굴 지배 미분방정식(2.4.2)에 가정한 변위식(3.1.1)를 적용하고, Galerkin's Method를 사용하여 주어지는 식들에 적분을 수행하면, 결국 (2.4.2)식은 아래와 같은 선형제차 대수방정식으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} + aN_{x0}\lambda^2 & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} + aN_{x0}\lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.1.2)$$

여기서,  $\lambda = m\pi/L$ ,  $[V_{ij}] (i, j=1, 3)$ 는 강성도를 나타내는  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$ 항들을 포함한 계수행렬이다.

### 3.2. 축하중하의 임계좌굴하중식 전개

축압축하중을 받는 원통형 쉘의 좌굴해는 (3.1.2)식의 무용해 즉, 행렬  $[V'_{ij}] (i, j=1, 3, aN_{x0}\lambda^2$  항 포함)의 행렬식을 0으로 둬으로써 전개되는 2차방정식의 해로서 결정된다.

$$N_{x0} = \frac{1}{a\lambda^2} \left( \frac{-LOVE \pm \sqrt{\{LOVE\}^2 - 4V_{11} Det[V'_{ij}]}}{2V_{11}} \right) \dots\dots\dots (3.1.3)$$

여기서, LOVE와  $Det[V'_{ij}]$ 는 다음과 같다.

$$LOVE = V_{11}V_{22} + V_{11}V_{33} - V_{12}V_{21} - V_{13}V_{31} \dots\dots\dots (3.1.4)$$

$$Det[V'_{ij}] = Det \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.1.5)$$

(3.1.3)식으로 결정되는  $N_{x0}$ 로서 축압축하중을 받는 원통형 쉘의 좌굴하중을 계산할 수 있다.

$$P_{cr} = 2\pi a N_{x0} \dots\dots\dots (3.1.6)$$

## 4. 순수 휨력을 받는 원통형 쉘의 좌굴식 전개

### 4.1. 휨 하중분포를 고려한 선형대수방정식 전개

휨을 받는 원통형 쉘의 하중형태는 축압축하중과는 달리 sine형태의 축방향 하중분포를 고려함으로써 휨의 하중을 재현하게 되며, 쉘에 작용하는 순수 휨모멘트의 하중분포를 아래식으로 나타낼 수 있다.

$$N_b = N_{x0} \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \dots\dots\dots (4.1.1)$$

또한, 휨하에 있는 원통형쉘의 변형모드는 원통형쉘 단면에 일정한 압축력을 받는 축 압축하의 좌굴모드와 다르게 단면내의 서로 다른 인장, 압축좌굴모드로 나뉘어 가정해야 하며 표. 4.1과 같다.

표. 4.1 단순지지조건을 만족하는 변위모드 가정

	인장축( $0 \leq \theta \leq \pi$ )	압축축( $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ )
$u_0$	$(u_0)_t = A \cos\left(\frac{m_t \pi x}{L}\right) \sin n_t \theta$	$(u_0)_c = A \cos\left(\frac{m_c \pi x}{L}\right) \sin n_c \theta$
$v_0$	$(v_0)_t = B \sin\left(\frac{m_t \pi x}{L}\right) \cos n_t \theta$	$(v_0)_c = B \sin\left(\frac{m_c \pi x}{L}\right) \cos n_c \theta$
$w$	$(w)_t = C \sin\left(\frac{m_t \pi x}{L}\right) \sin n_t \theta$	$(w)_c = C \sin\left(\frac{m_c \pi x}{L}\right) \sin n_c \theta$
	$m_t = 1, 2, 3 \dots, n_t = 1, 3, 5 \dots$	$m_c = 1, 2, 3 \dots, n_c = 3, 5, 7 \dots$

표. 4.1 과 같이 쉘단면의 중립축은 원통형 쉘의 기하학적 대칭축을 따라 유지되는 것으로 가정되고 앞의 인장축  $n_t$ 와 압축축  $n_c$ 는  $\theta=0$ 와  $\theta=\pi$ 에서의 연속변위조건을 만족하기 위하여 홀수로 되어야 한다. 축 압

축 좌굴해석에서의 동일하게 휨 좌굴해석 또한 Love형태의 방정식.(2.4.2)에 Galerkin's Method를 적용하고, 휨에 대한 변위모드를 적용하여 적분을 수행하고 정리하면 결국, 아래와 같은 선형제차 대수방정식으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} + aN_{x0}Z_1 & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} + aN_{x0}Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.1.2)$$

여기서,  $[M_{ij}]$  ( $i, j=1, 2, 3$ )는 강성도를 나타내는  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$ 항들을 포함한 계수행렬이며,  $Z_1$ 와  $Z_2$ 는 아래와 같다.

$$Z_1 = \frac{2a}{\pi} \left[ \left( \frac{m_i \pi}{L} \right)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{(1+2n_i)(1-2n_i)} \right\} - \left( \frac{m_c \pi}{L} \right)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{(1+2n_c)(1-2n_c)} \right\} \right] \dots\dots\dots (4.1.3)$$

$$Z_2 = \frac{2a}{\pi} \left[ \left( \frac{m_i \pi}{L} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{1}{(1+2n_i)(1-2n_i)} \right\} - \left( \frac{m_c \pi}{L} \right)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{(1+2n_c)(1-2n_c)} \right\} \right]$$

4.2. 휨하중하의 임계좌굴모멘트식 전개

순수 휨하중을 받는 원통형 쉘의 좌굴해는 (4.1.2)식의 무용해 즉, 행렬  $[M_{ij}]$  ( $i, j=1, 3, M_{22} + aN_{x0}Z_1$ 와  $M_{33} + aN_{x0}Z_2$ 항 포함)의 행렬식을 0으로 둬므로써 전개되는 2차방정식의 해로서 결정된다.

$$N_{x0} = \frac{-MLOVE \pm \sqrt{(MLOVE)^2 - (4M_{11}Z_1Z_2Det[M'_{ij}])}}{2aM_{11}Z_1Z_2} \dots\dots\dots (4.2.1)$$

여기서,  $MLOVE$ 와  $Det[M'_{ij}]$ 는 다음과 같다.

$$MLOVE = M_{11}M_{22}Z_2 + M_{11}M_{33}Z_1 - M_{12}M_{21}Z_2 - M_{13}M_{31}Z_1 \dots\dots\dots (4.2.2)$$

$$Det[M'_{ij}] = Det \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.2.3)$$

(4.2.1)식으로 결정되는  $N_{x0}$ 로서, 순수 휨을 받는 원통형 쉘의 좌굴 휨모멘트를 계산할 수 있다.

$$M_{cr} = \pi a^2 N_{x0} \dots\dots\dots (4.2.4)$$

5. 수치예제를 통한 선형 좌굴해의 비교

표. 5.1 은 해석하려는 등방성 재료로 된 원통형 쉘의 치수 및 재료특성을 나타내었다. 이때 쉘 단면의 반경은 일정하고 두께와 쉘길이를 변화시켜 원통형 쉘 부재의 좌굴하중 및 좌굴응력들을 계산하였다. 이들 수치자료를 토대로 Love형태의 좌굴방정식 및 LUSAS프로그램에 의한 결과들을 비교하여 원통형 쉘의 좌굴거동을 살펴본다.

표. 5.1 원통형 쉘의 기하학적, 재료성질

기하학적인 성질	재료성질
$0.3 \leq L/R \leq 40, 10 \leq R/t \leq 100$	$E = 200Gpa, G = 80Gpa, \nu = 0.3$

5.1. LUSAS PROGRAM에 의한 모델링

LUSAS에 적용된 요소는 8절점을 가지는 semiloof doubly curved thin shell(QSL8)요소이며, 얇은 쉘이론을 바탕으로 하고 있으므로 횡 전단변형은 고려되지 않는다. 원통형 쉘에 대한 요소분할은 효율성과 최적화를 고려하여 비교적 정사각형에 가깝게 분할하였으며, 요소수는 정확도의 수렴성을 고려하여 많은 요소를 생성하여 모델링 하였다. 지지조건은 원통형 쉘의 단순지지조건을 만족하게끔 요소의 자유도를 구속하였으며, 변위에 대해서 길이방향은 구속하지 않았고, 회전에 대해서는 모두 구속을 하지 않았다.

## 5.2. Love해와 LUSAS해의 비교분석

축 압축력 및 순수 휨력이 작용하는 원통형 셸에 대하여, 여러 가지 R/t비 및 L/R비에 따른 좌굴응력값과  $\sigma_b/\sigma_c$ 비가 그림 (a)~(l)에서 LUSAS와 Love, 그리고 Donnell해 들로 비교되었다. 그림 5.1 (a)~(d)에서는 축 압축력을 받는 원통형 셸에 대한 좌굴응력이 R/t비와 L/R비에 따라 나타나 있다. L/R비가 커질수록, 좌굴응력 ( $\sigma_c$ )에 대하여 LUSAS해와 Love해는 거의 동일한 값을 가지며 감소하고 Donnell해는 거의 일정한 값으로 나타났다. 특히, LUSAS해와 Love해에 대한 축 압축력에 대한 좌굴응력이 거의 일치함을 보이고 있

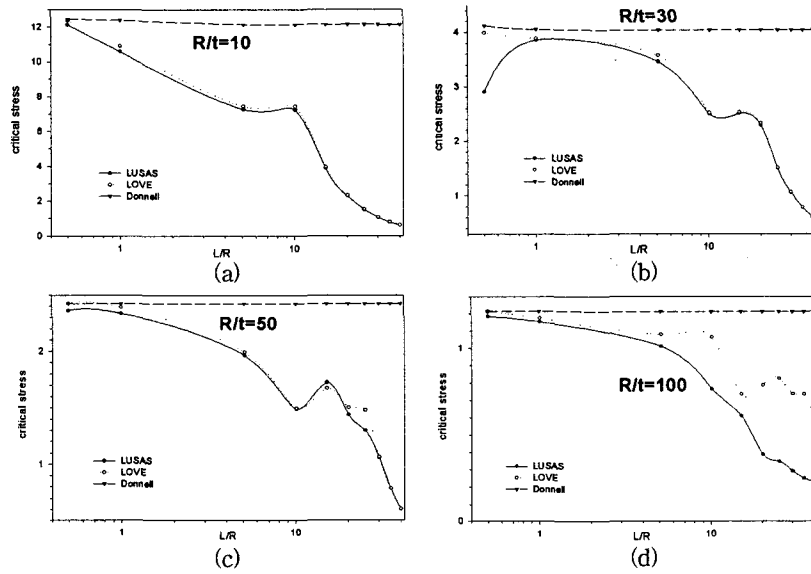


그림 5.1 축 압축력을 받는 원통형 셸의 좌굴응력

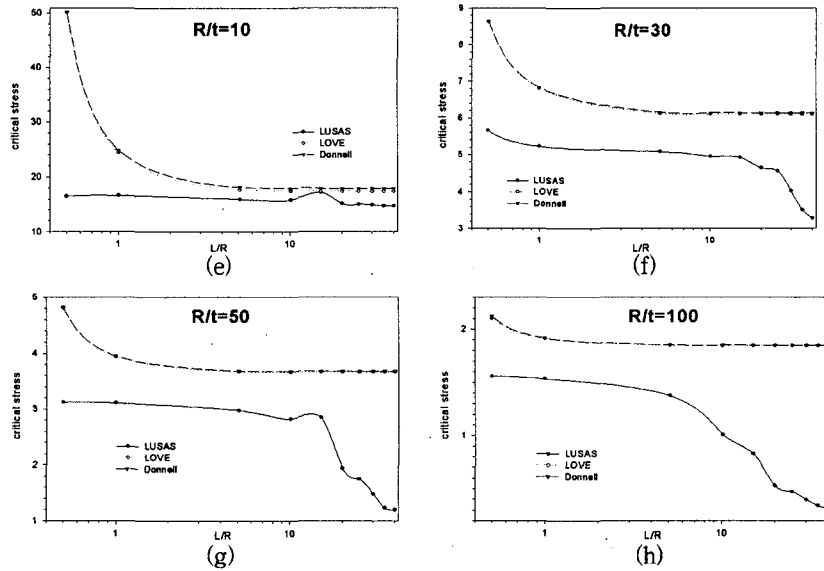


그림 5.2 순수 휨력을 받는 원통형 셸의 좌굴응력

다. 그림 5.2 (e)~(h)에서는 순수 휨력을 받는 원통형 셸에 대한 좌굴응력이 R/t비와 L/R비에 따라 나타나 있다. L/R비가 커질수록, LUSAS해는 감소하고 Love해와 Donnell해는 일정한 값으로 나타났다. 특히, Love 해와 Donnell해에 대한 순수 휨력에 대한 좌굴응력이 거의 일치함을 보이고 있다. 그림 5.3 (i)~(l)에서는 L/R비에 따른  $\sigma_b/\sigma_c$ 비가 나타나 있다. LUSAS해에 대하여 R/t=10,30 인 경우를 제외하고는 순수 휨 좌굴응력이 축 압축 좌굴응력보다 30~80%정도 큼을 보이고 있다.

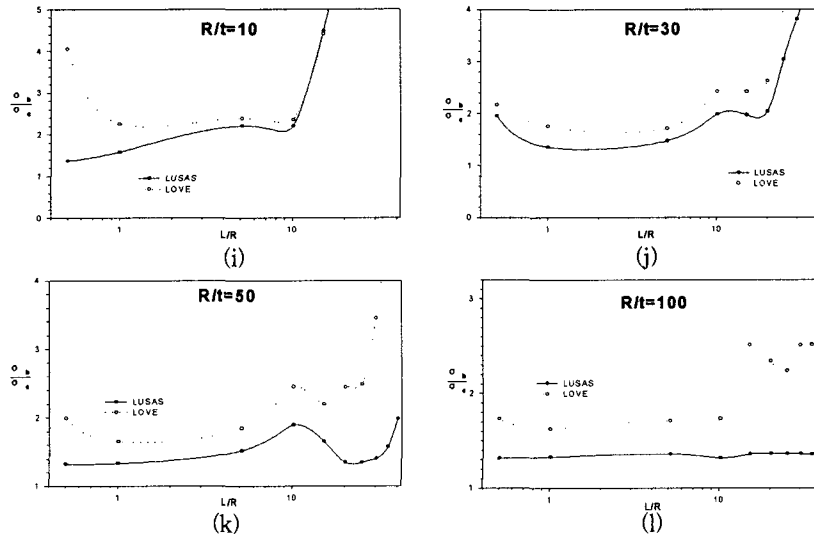


그림 5.3 순수 휨력과 축 압축력에 대한 좌굴응력 비( $\sigma_b/\sigma_c$ )

## 6. 결론

축 압축력을 받는 원통형 셸의 Love이론에 의한 좌굴응력과 유한요소법에 근거한 구조해석 프로그램인 LUSAS에 의한 좌굴응력이 거의 일치하는 결과를 보이므로, 비선형 항을 고려한 Love이론에 의한 축 압축 좌굴해는 정량적으로 타당하다고 판단된다. 순수 휨력의 경우, Love해가 LUSAS해와는 차이를 보이지만, Donnell해와는 거의 일치함을 볼 때, Love이론에 의한 순수 휨 좌굴해는 정성적인 경향은 알 수 있었으나 정량적으로 타당성이 없는 것으로 판단된다. 그리고, LUSAS해에 대하여 축 압축좌굴응력과 순수 휨좌굴응력은 정성적 뿐 아니라 정량적으로도 타당성이 있는 것으로 판단되며, LUSAS를 통하여 여러 좌굴해들과 좌굴모드와의 관계를 검토한다면 더욱더 정확한 해를 얻을 수 있으리라 본다.

## 참 고 문 헌

1. S. P. Timoshenko and James M. Gere, "Theory Of Elastic Stability", McGRAW-HILL, 1961
2. S. P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, "Theory Of Plates And Shell", McGRAW-HILL, 1959
3. K. A. Lou & G. Yaniv "Buckling of Circular Cylindrical Composite Shell under Axial Compression and Bending Loads" 1989
4. A. C. Ugral & S. K. Fenster "Advanced Strength and Applied Elasticity" Prentice Hall, 1995
5. A. Chajes "Principles of Structural Stability Theory" Prentice Hall, 1974
6. L. H. Donnell "Beams, Plates and Shell" McGRAW-HILL, 1976
7. Brazier, L. G., "On the Flexure of Thin Cylindrical Shells and Other "Thin" Sections," Proc. Roy. Soc., ser. A, Vol. 116, pp. 104-114, 1926