

## 탄성스프링으로 지지된 보강판의 좌굴 및 진동 해석에 관한 연구

### A Study on the Buckling and the Vibration Analysis of the Stiffened Plates with Elastic Spring

백 승 목\*      오 숙 경\*\*      김 일 중\*\*\*      이 용 수\*\*\*\*

Baik, seung mok    Oh, Sook Gyeong    Kim, Il-Jung    Lee, Yong-Soo

---

#### ABSTRACT

This study is to analyze the buckling and the vibration of the rectangular stiffened plates with elastic springs by Finite Element Method. Boundary conditions are two types, one is all simply supported edges, another all clamped edges. To validate Finite Element Method, the buckling stresses of the stiffened plates without elastic springs are compared with the existing ones. The natural frequency parameters of the stiffened plates with or without elastic springs by Finite Element Method are also compared with the ones of SAP2000. The natural frequency parameters and the buckling stresses of the stiffened plates with elastic springs by Finite Element Method are calculated for the variation of the stiffness of the elastic springs and aspect ratio.

---

#### 1. 서론

보강판은 비행기나 배, 교량의 데크 뿐만 아니라 건축물의 바닥판으로 널리 사용되고 있는 구조재이다. 이러한 이유로 다양한 지지조건을 갖는 보강판에 대한 좌굴 및 진동해석은 지금까지 상당히 많이 수행되어 왔다.<sup>(6)(8)(9)</sup> 근래들어 지진발생이 잦아지고 강도도 커짐에 따라 건축물 기초와 지반의 상호작용에 대한 관심이 높아지고 있다. 건축물의 매트(mat)기초는 부드러운 지반상에 놓인 판으로 축방향강성을 갖는 판면에 수직인 수많은 스프링에 의해 지지된 판(Winkler지반상<sup>(3)</sup>의 판)으로 이상화 할 수 있다. 그러나 Winkler지반의 판에 대한 연구는 아직 미흡한 실정이다. 본 연구에서는 Winkler지반상의 판을 유한장방형 요소로 나누어진 판의 절점에 유한개의 수직스프링을 두어 이상화 하였다. 수직스프링을 4절점에 위치시킨 장방형 유한요소와 보요소에 대한 강성들을 구하고 조합하여 4변단순지지, 4변고정지지 보강판의 좌굴 및 진동해석을 행하였다. 해석시 다음과 같은 가정을 하였다.

1. Kirchhoff의 가정을 만족한다.
2. 보강재의 중립축은 판의 중립축과 일치한다.
3. 보강재의 비틀림 강성은 무시한다.

---

\* 원광대학교 건축공학과 석사과정

\*\* 원광대학교 건축공학과 박사과정

\*\*\* 정인대학 건축과 전임강사

\*\*\*\* 원광대학교 건축공학과 교수

## 2. 보강판의 자유진동 및 좌굴해석

가상일의 원리를 이용하여 판과 보강재의 자유진동 및 좌굴방정식을 유도하고 판과 보강재의 요소강성 매트릭스, 요소기하강성 매트릭스, 요소질량매트릭스를 조합하여 고유치 방정식을 얻는다.

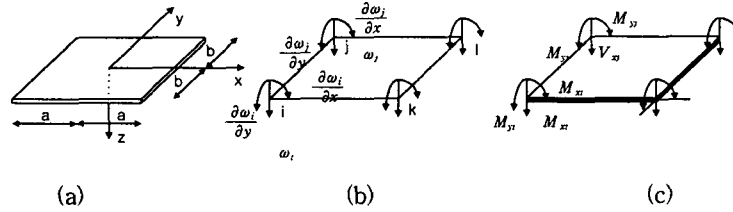


그림 1. 판요소의 좌표축(a), 변위(b), 힘(c)

### 2-1 평판의 강성 매트릭스

$$\int [M]^T \cdot \delta(x) \cdot dA - \int h \cdot \{\theta\}^T [\sigma] \cdot \delta(\theta) \cdot dA - \int \rho h \dot{w} \delta(\dot{w}) dA = 0 \quad (1)$$

여기서  $dA = dx \cdot dy$        $[M]$  : 모멘트       $\delta(x)$  : 곡률변분  
 $\delta(\theta)$  : 처짐각 변분       $h$  : 판 두께       $[\sigma]$  : 응력  
 $\dot{w} = \partial w / \partial t$        $w$  : 판의 수직변위

장방형 4절점 유한요소를 사용하는 경우, 판의 휨에 대한 변위함수는 일반적으로 다음과 같이 가정한다.

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 = [P](a) \quad (2)$$

판의 유한요소에 대한 좌표축, 변위 및 힘은 그림 1과 같다.

판의 변위 벡터  $\{\delta\}$ 는 다음과 같다.

$$\{\delta\} = [w \ \theta_x \ \theta_y]^T = [w \ -\frac{\partial w}{\partial y} \ \frac{\partial w}{\partial x}]^T \quad (3)$$

(3)식에 (2)식을 대입하면 다음과 같다.

$$\{\delta\} = [F](a) \quad (4)$$

(4)식에 유한요소 4절점의 변위값을 적용하면

$$\{\delta^e\} = [[\delta_1^e]^T, [\delta_2^e]^T, [\delta_3^e]^T, [\delta_4^e]^T]^T = [A](a) \quad (5)$$

판의 곡률  $\chi$ 와 모멘트  $M$ 은 (2),(5)식에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{\chi\} = [-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}]^T = [C](a) = [C][A]^{-1}\{\delta^e\} \quad (6)$$

$$[M] = [D] \cdot \{\chi\} = [D][C][A]^{-1}\{\delta^e\} \quad (7)$$

여기서  $[C]$ 는 곡률매트릭스와 계수매트릭스의 관계를 나타내는 매트릭스이고 휨강성매트릭스  $[D]$ 는 다음과 같다.

$$[D] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

판의 처짐각을 나타내는 매트릭스는 (2),(5)식에 의해 다음과 같이 된다.

$$\{\theta\} = [\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}]^T = [G](a) = [G][A]^{-1}\{\delta^e\} \quad (8)$$

여기서  $[G]$ 는 판의 처짐각 매트릭스와 계수매트릭스 사이의 관계를 나타내는 매트릭스이다 따라서 (1)식의 항들은 다음과 같이 유도 된다.

$$\int [M]^T \delta(x) dA = \{\delta^e\}^T [A^{-1}]^T \int [C]^T [D]^T [C] dA [A]^{-1} \delta(\delta^e)$$

$$= \{\delta^e\}^T [K^e] \delta(\delta^e) \quad (9)$$

$$\text{여기서 } [K^e] = [A]^{-1} \int [C]^T [D] [C] dA [A]^{-1}$$

$$\int h(\theta)^T [\sigma] \delta(\theta) dA = \int h(\delta^e)^T [A]^{-1} [G]^T [\sigma] [G] [A]^{-1} \delta(\delta^e) dA$$

$$= \{\delta^e\}^T \int h[A]^{-1} [G]^T [\sigma] [G] [A]^{-1} dA \delta(\delta^e)$$

$$= \{\delta^e\}^T [K_s^e] \delta(\delta^e) \quad (10)$$

$$\text{여기서 } [K_s^e] = h[A]^{-1} \int [G]^T [\sigma] [G] dA [A]^{-1}$$

$$\int \rho h(\dot{\omega})^T \delta(\dot{\omega}) dA = \int \rho h(\dot{\delta}^e)^T [A]^{-1} [P]^T [P] [A]^{-1} \delta(\dot{\delta}^e) dA$$

$$= \{\dot{\delta}^e\}^T [M^e] \delta(\dot{\delta}^e) dA \quad (11)$$

$$\text{여기서 } [M^e] = [A]^{-1} \int \rho h [P]^T [P] dA [A]^{-1}$$

식(9),(10),(11)의  $[K^e]$ ,  $[K_s^e]$ ,  $[M^e]$ 가 각각 평판의 요소강성매트릭스, 요소기하강성매트릭스, 요소질량매트릭스 이다.

## 2-2 보강재요소의 강성매트릭스

휨에 대한 변위함수는 요소당 2절점 2자유도로 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\omega = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 = [P_s]\{a_s\} \quad (12)$$

$x=0$ 일 때  $\omega = \omega_i$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial x} = \dot{\omega}_i$ ,  $x=a$ 일 때  $\omega = \omega_j$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial x} = \dot{\omega}_j$ 를 대입하여 정리하면 변위함수는 다음과 같이 유도된다.

$$\omega = [H_b]\{\omega_s^e\} \quad (13)$$

$$\text{여기서 } [H_b] = \left[ \left(2\frac{x^3}{a^3} - 3\frac{x^2}{a^2} + 1\right), \left(\frac{x^3}{a^2} - 2\frac{x^2}{a} - x\right), \left(3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}\right), \left(\frac{x^3}{a^2} - \frac{x^2}{a}\right) \right]$$

$$\{\omega_s^e\} = [\omega_i, \dot{\omega}_i, \omega_j, \dot{\omega}_j]^T$$

휨에 대한 변형에너지 변분과 외력이 한 일에 대한 변분을 구하면

$$\delta U_b = \int \{M_b\}^T \delta(x_b) dx = \int EI(x_b) \delta(x_b) dx$$

$$= \{\omega_s^e\}^T EI \int [H_b'']^T [H_b''] dx \delta(\omega_s^e) = \{\omega_s^e\}^T [K_s^e] \delta(\omega_s^e) \quad (14)$$

$$\text{여기서 } (x_b) = \left\{ -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right\} = -[H_b'']\{\omega_s^e\}$$

$$\delta V = \int \sigma \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial x} \right\} \delta \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial x} \right\} dV = \{\omega_s^e\} \int \sigma A [H_b']^T [H_b'] dx \delta(\omega_s^e)$$

$$= \{\omega_s^e\}^T [K_{\sigma}] \delta(\omega_s^e) \quad (15)$$

$$\delta T = \int \rho A \dot{\omega} \delta \omega dA$$

$$= \{\dot{\omega}_s^e\}^T \int \rho A [H_b] [H_b] dA \delta(\dot{\omega}_s^e)$$

$$= \{\dot{\omega}_s^e\}^T [M_s^e] \delta(\dot{\omega}_s^e) \quad (16)$$

### 2-3 탄성스프링의 강성

탄성스프링은 그림 2와같이 강성  $\frac{1}{4}k$ 를 갖는 수직 스프링으로 이상화하여 스프링의 축방향 강성  $\frac{1}{4}k$ 를 요소의  $i, j, k, l$ 절점에 대한  $z$ 축방향 강성요소에 추가하여 고려하였다.

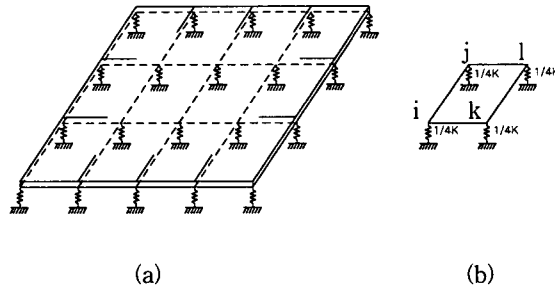


그림 2. 탄성스프링으로 지지된 판(a), 유한요소(b)

### 2-4 고유치 방정식

장방형의 유한요소와 보강재 유한요소를 조합하여 다음과 같은 자유진동 및 좌굴에 대한 고유치 방정식  $[K_s]$ 를 얻을 수 있다.

$$\{([K] + [K_s]) - ([K_o] + [K_{ss}] - \omega^2[M] + [M_s])\} = 0 \quad (17)$$

$[K]$  : 평판의 전체강성매트릭스     $[K_o]$  : 평판의 기하강성매트릭스     $[M]$  : 평판의 전체질량매트릭스  
 $[K_s]$  : 보강재의 전체강성매트릭스     $[K_{ss}]$  : 보강재의 기하강성매트릭스     $[M_s]$  : 보강재의 전체질량매트릭스

#### 2-4-1 보강판의 좌굴응력

(17)식에서 질량매트릭스항을 0으로 놓고 단위 하중에 대한 좌굴하중비를  $\lambda$ 라 하면 다음과 같은 고유치 방정식이 얻어진다.

$$\{[K + K_s] - \lambda[K_o + K_{ss}]\} = 0 \quad (18)$$

(18)식에서 가장 작은  $\lambda$ 가 좌굴응력  $\sigma_c$ 이 된다.

#### 2-4-2 보강판의 고유진동수

보강판의 고유진동수를 구할 경우 (17)식에서 기하강성매트릭스를 0으로 놓고  $\omega^2$ 을 구하면 된다.

$$\{([K] + [K_s]) - \omega^2[M] + [M_s]\} = 0 \quad (19)$$

(19)식에서  $\omega$ 가 보강판의 고유원진동수(Natural Circular Frequency)를 나타낸다.

## 3. 유한요소법의 적용

요소분할수에 따른 장방형 보강판의 좌굴응력 및 고유진동수를 구하여 기존해와 비교하고 탄성스프링위의 보강판에 대해 좌굴응력 및 고유진동수를 구하여 비교 분석한다.

### 3-1 요소분할수에 따른 보강판의 해석

#### 3-1-1 좌굴응력

해석대상 보강판의 조건은 다음과 같다.

1) 탄성 계수  $E=20,390,000,000 \text{ kg/m}^2$     2) 포아송비  $\nu=0.3$     3) 판의 두께  $h=0.001 \text{ m}$

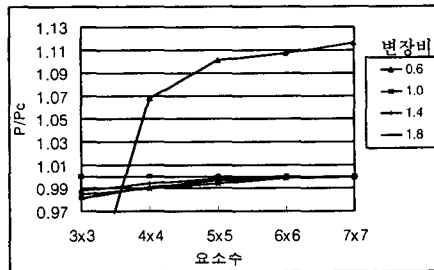
4) 판의 크기 :  $0.6\text{m}\times 1.0\text{m}, 1.0\text{m}\times 1.0\text{m}, 1.4\text{m}\times 1.0\text{m}, 1.8\text{m}\times 1.0\text{m}$  (4-types)

5)보강재의 크기 :  $0.0048\text{m}\times 0.0105\text{m}$     6)보강재의 개수 : 1개 (판중앙)

표 1.에서 일반적으로 요소수가 증가함에 따라 이론해에 수렴하는 것을 볼 수 있으나 변장비  $\phi=0.6$ 인 경우 이론해보다 상당한 오차를 보이고 있다. 변장비  $\phi=1.0$ 이상에서는 오차가 0.06%였다. 보강판의 경우 FEM과 고전적 해석법에 의한 이론해가 변장비  $\phi<1.0$ 일 때 오차가 크고  $\phi\geq 1.0$ 일 때 오차가 적다.<sup>(7)</sup>

표 1. 보강판의 좌굴응력 (1/4판을 기준, 반파수 : 1)

	$\phi$	본 연구					이론해 <sup>(7)</sup>
		3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	
4변 단순지지	0.6	254653	323598	335015	336849	339493	304070
	1.0	217712	218806	219856	220894	221014	221142
	1.4	156876	157922	158600	158626	158793	158853
	1.8	141768	143155	144045	144297	144352	144479



$P_{cr}$  : 이론해  
 $F$  : 유한요소해

그림 3. 단순지지 평판의 좌굴응력 비교

### 3-1-2 고유진동수

해석대상 보강판의 조건은 보강재 춤이  $0.01\text{m}$ 인 것을 제외하고는 3-1-1과 같다.

표 2.는 분할수에 따른 보강판을 본 연구에서 사용한 FEM 프로그램과 SAP2000을 비교한 것이다. 그림 4와 그림 5에서도 요소분할수가 많은 것이 SAP2000의 해에 수렴하는 것을 볼 수 있다. 보강판의 고유진동파라미터도 좌굴응력과 마찬가지로  $7\times 7$ 요소분할에서  $\phi=0.5$ 인 경우가 상대적으로 큰 오차를 보이고 있으나  $\phi\geq 1.0$ 인 경우가 SAP2000과 잘 일치하고 있는 것을 보여준다.

표 2. 보강판의 고유진동파라미터 ( $\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ , 요소분할수 1/4판을 기준, 반파수 : 1)

	$\phi$	본 연구					SAP2000
		3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	
4변 단순지지	0.5	83.30	84.06	84.47	84.71	84.89	84.61
	1.0	32.38	32.47	32.53	32.56	32.57	32.68
	1.5	18.11	18.19	18.23	18.25	18.27	18.29
	2.0	13.46	13.53	13.58	13.60	13.67	13.64
4변 고정지지	0.5	33.84	34.27	34.57	34.69	34.75	34.71
	1.0	17.08	17.15	17.20	17.22	17.25	17.24
	1.5	9.75	9.80	9.83	9.84	9.85	9.87
	2.0	7.10	7.16	7.19	7.20	7.22	7.23

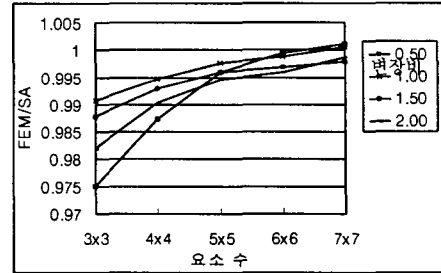
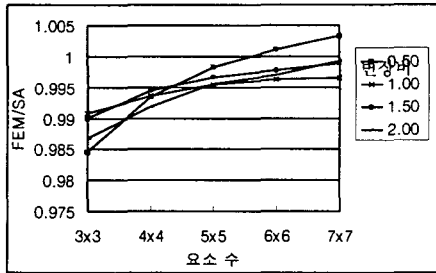


그림 4. 4변단순지지 보강판 고유진동 파라미터비

그림 5. 4변고정지지 보강판의 고유진동 파라미터비

### 3-2 탄성스프링으로 지지된 보강판 해석

해석대상 보강판의 조건은 다음과 같다.

- 1) 탄성 계수  $E = 20,390,000,000 \text{ kg/m}^2$
- 2) 포아송비  $\mu = 0.3$
- 3) 판의 두께  $t = 0.001 \text{ m}$
- 4) 판의 크기 :  $0.5\text{m} \times 1.0\text{m}$ ,  $0.75\text{m} \times 1.0\text{m}$ ,  $1.0\text{m} \times 1.0\text{m}$ ,  $1.25\text{m} \times 1.0\text{m}$ ,  $1.5\text{m} \times 1.0\text{m}$ ,  $1.75\text{m} \times 1.0\text{m}$ ,  $2.0\text{m} \times 1.0\text{m}$  (7-types)
- 5) 스프링 강성변화  $K = 0, 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$
- 6) 보강재의 크기 :  $0.0048\text{m} \times 0.01\text{m}$
- 7) 보강재의 개수 : 1개(판중앙)

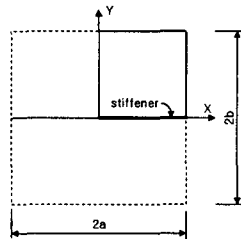


그림 6. 해석 모델

#### 3-2-1 좌굴응력

그림 7과 그림 8은 보강판의 좌굴하중을 나타낸 것이다. 지반상수 K값이 0에서  $1.0E+3$ 까지는 완만한 증가를 보였으나 이후  $1.0E+5$ 까지 급격하게 변화했다. 그러나  $1.0E+5$  이후에는 수렴하는 것을 볼 수 있다.

표 3. 탄성스프링으로 지지된 4변단순지지 보강판의 좌굴응력, ( )는 반파수

$\phi$	지반상수 $k$							
	0	$1.0E+00$	$1.0E+01$	$1.0E+02$	$1.0E+03$	$1.0E+04$	$1.0E+05$	$1.0E+06$
0.5	341713(1)	352781(1)	443741(1)	959444(1)	2055679(1)	6674800(1)	6548015(1)	6479771(1)
0.75	261077(1)	276169(1)	410934(1)	667245(1)	1664045(1)	5605781(1)	8077902(1)	8119322(1)
1.0	198534(1)	218310(1)	394841(1)	622337(1)	1541644(1)	4393736(1)	4720786(1)	4674564(1)
1.25	161005(2)	184726(2)	394474(2)	620993(2)	1339263(2)	3141550(2)	3000980(2)	2999378(2)
1.5	144170(2)	172241(2)	390675(2)	557256(2)	1273808(2)	2136319(2)	2084464(2)	2068754(2)
1.75	138766(2)	171879(2)	326030(2)	527025(2)	1224038(2)	1573804(2)	1549669(2)	1548163(2)
2.0	142668(2)	180467(2)	302435(2)	499583(2)	1094086(2)	1225053(2)	1212126(2)	1212543(2)

표 4. 탄성스프링으로 지지된 4변고정지지 보강판의 좌굴응력, ( )는 반파수

$\phi$	지반상수 $k$							
	0	1.0E+00	1.0E+01	1.0E+02	1.0E+03	1.0E+04	1.0E+05	1.0E+06
0.5	705590(1)	712125(1)	770936(1)	1188306(1)	2225957(1)	6966072(1)	6756041(1)	6478900(1)
0.75	623293(1)	629080(1)	662462(1)	846197(1)	1802850(1)	5459108(1)	7896932(1)	7963972(1)
1.0	521950(1)	525133(1)	553754(1)	736419(1)	1558423(1)	4400899	5136621(2)	5103088(2)
1.25	505807(2)	509130(2)	538169(2)	671223(2)	1421693(2)	3118987(2)	3009656(2)	2992300(2)
1.5	480963(2)	482723(2)	501416(2)	643771(2)	1261368(2)	2170908(2)	2067517(2)	2057070(2)
1.75	456082(2)	461933(2)	486133(2)	606708(2)	1188092(2)	1608075(2)	1516385(2)	1523775(2)
2.0	443972(2)	448980(2)	485830(2)	601700(2)	1119792(3)	1249455(2)	1172096(2)	1170378(2)

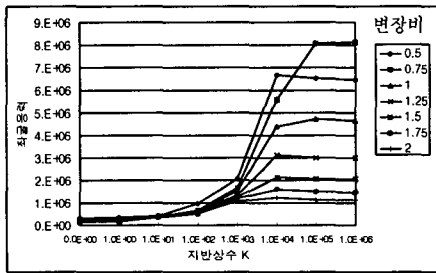


그림 7. 4변단순지지 보강판의 좌굴응력

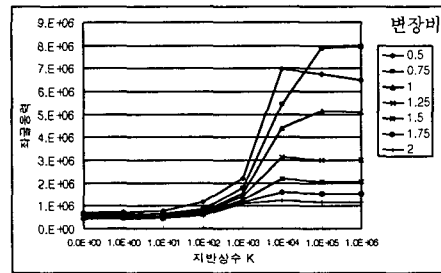


그림 8. 4변고정지지 보강판의 좌굴응력

3-2-2 고유진동수

표 5. 탄성스프링에 지지된 4변단순지지 보강판의 고유진동 파라미터  $\lambda^2$ , ( )은 반파수, FEM/SAP

$\phi$	지반상수 $k$							
	0	1.0E+00	1.0E+01	1.0E+02	1.0E+03	1.0E+04	1.0E+05	1.0E+06
0.5	84.89/84.60	86.10	96.37/96.11	167.89	455.19/450.64	1227.34	2231.08	2221.40
0.75	48.40/49.67	49.75	60.53/60.43	125.21	351.70/350.47	1007.10	2247.41	2216.23
1.0	31.86/32.62	33.35	44.55/45.13	104.15	302.83/300.65	885.27	2310.25	2246.29
1.25	23.10/23.33	24.67	36.05/36.17	91.06	272.36/268.72	799.27	1457.19	1431.94
1.5	18.27/18.30	19.94	31.37/31.23	82.37	250.63/245.71	746.52	1003.89	1000.41
1.75	15.34/15.41	17.03	27.95/28.02	76.03	232.87/227.91	694.01	741.61	740.86
2.0	13.62/13.64	15.27	25.74/25.79	71.10	218.17/213.63	587.07(2)	564.37(2)	563.79(2)

표 6. 탄성스프링에 지지된 4변고정지지 보강판의 고유진동 파라미터  $\lambda^2$ , ( )은 반파수, FEM/SAP

$\phi$	지반상수 $k$							
	0	1.0E+00	1.0E+01	1.0E+02	1.0E+03	1.0E+04	1.0E+05	1.0E+06
0.5	34.90/34.70	35.09	36.74/36.54	50.39	121.47/119.61	326.27	580.96	583.80
0.75	23.81/23.73	23.99	25.56/25.48	38.00	95.85/94.42	256.49	579.80	580.04
1.0	17.25/17.23	17.43	18.98/18.95	30.39	78.50/78.11	222.08	582.26	580.24
1.25	12.17/12.66	12.37	14.00/14.13	25.06	69.21/68.54	199.22	361.85(2)	357.77(2)
1.5	9.65/9.87	9.85	11.51/11.70	22.08	62.96/62.13	186.20(2)	251.58(2)	250.03(2)
1.75	8.12/8.22	8.32	9.97/10.06	20.06	58.43/57.38	172.97	185.66(2)	185.11(2)
2.0	7.17/7.23	7.37	8.98/9.03	18.62	54.77/53.66	151.39(2)	143.15(2)	143.04(2)

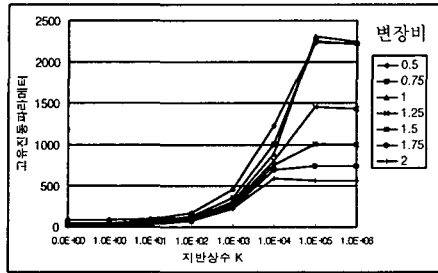


그림 9. 4변단순지지 보강판의 진동파라미터

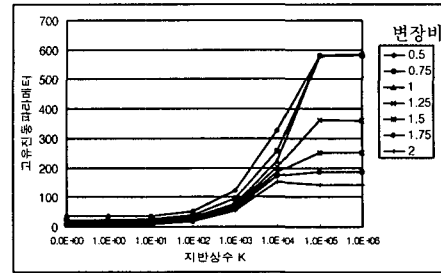


그림 10. 4변고정지지 보강판의 진동파라미터

그림 9와 그림 10은 탄성 지반위의 평판의 자유진동을 해석한 결과로서 지반상수 K가 0에서  $1.0E+2$ 까지 완만하게 증가하다가  $1.0E+5$ 에서 변장비 0.5, 0.75, 1의 경우에서 가장 많은 변화를 보였으며 변장비가 클수록 수렴값이 작아짐을 알 수 있다

#### 4. 결론

탄성스프링으로 지지된 4변고정지지와 4변단순지지 조건의 보강판의 좌굴 하중과 고유진동의 해석 결과는 다음과 같다.

1. 탄성스프링이 없는 4변단순지지, 4변고정지지 보강판의 좌굴하중, 고유진동파라미터를 구한 결과  $\phi < 1.0$ 의 경우를 제외하고는 기존해와 잘 일치하고 있다.
2. 탄성스프링이 있는 4변단순지지, 4변고정지지 보강판의 고유진동파라미터를 구하고 SAP2000의 해와 비교한 결과 잘 일치함을 알 수 있었다.
3. 보강판은 지반상수 K값의 변화에 따라 좌굴하중과 고유파라미터가 0에서부터  $1.0E+2$ 까지는 완만한 증가를 보였으나  $1.0E+4$ 까지 급격히 증가하였으며, 이후의 값에서는 지반상수가 증가하여도 좌굴하중과 고유파라미터는 수렴하였다.
4. 탄성스프링으로 지지된 보강판의 자유진동에서 변장비가 작은 ( $\phi = 0.5, 0.75, 1.0$ ) 경우 지반상수  $1.0E+5$ 에서 다른 변장비에 비해 고유진동파라미터가 크게 증가하여 수렴하였다.

#### 참고문헌

1. A. W. Leissa, "The Free Vibration of Rectangular Plates", vol.31(3), p 257-293, Journal of Sound and Vibration, 1973.
2. A. Mukerjee and M. Mukhopadhyay, "Finite Element Free Vibration of Eccentrically Stiffened Plates", Computer and Structures, vol.30(3), p 1303-1317, 1988.
3. K. N.saha, R. C. Kar and P. K Datta, "Dynamic Stability of a Rectangular Plate on Non-homogeneous Winkler Foundation", vol.63, p 1213-1222, Computer and Structures, 1997.
4. A. Chajes, "Principles of Structural Stability Theory", Prentice-Hall, 1974.
5. C. A Brebbia and A. J. Ferrante, "Computational Methods for The Solution of Engineering Problems", Pentech Press, 1978.
6. S. P. Timoshenko and J. M. Gere, "Theory of Elastic Stability", McGraw-hill, 1961.
7. D. J. Gorman, "Free Vibration Analysis of Rectangular Plates", Elsevier, 1982.
8. 김성용, "고전적 해석법에 의한 보강판의 좌굴해석에 관한 연구" 석사논문 원광대, 1997.
9. 이용수, 김근덕, "보강장방형의 좌굴해석에 관한 연구", 대한건축학회논문집제4권 5호, p 307-315, 1988, 10.