

강상자거더의 뒤틀림해석에 관한 유한요소 정식화 Finite Element Formulation for the Distortion Analysis of Steel Box Girders

최 영준*, 정 래영*, 황 선호**, 강 영종***

Choi YoungJoon*, Jung RaeYoung*, Hwang SunHo**, Kang YoungJong***

ABSTRACT

Steel box girders are popular to the practicing engineers for the its large pure torsional constant. But closed box girders are susceptible to the eccentric loading due to the distortion of the cross section. Distortion of the box girder develops the warping normal stress and transverse flexural stress in the cross section and their magnitudes can be large unless internal diaphragms are installed sufficiently. In this study, stiffness matrix and equivalent nodal force vector are formulated on the basis of displacement method. Shape functions are directly derived from the homogeneous solution of the governing differential equation of the distortion. New finite element formulations were coded into a computer program. Several numerical examples were presented to show the validity of developed program.

1. 서론

강형교의 거더형식은 개단면의 I 형과 폐단면의 상자형으로 대별된다. I 형 거더로 구성된 교량은 교량의 형고가 낮아 미적으로 우수하며 유지보수가 용이하고 현장에서의 가설이 상대적으로 손쉬운 장점을 갖고 있으나 거더 자체의 비틀림 강성이 폐단면의 상자형 거더에 비해 매우 작아 비틀림 하중을 많이 받게 되는 곡선교나 편재하 하중을 크게 받는 교량을 시공할 때는 많이 채택되지 않고 있다. 이에 반해 강상자형 거더교는 거더 자체의 휨강성 뿐 만 아니라 순수 비틀림강성이 매우 커 단면의 효율적인 활용이 가능하여 국내에서 시공되는 강형교의 대부분을 차지하고 있다. 그러나 폐단면의 상자거더에서는 편재하 하중으로 인해 거더 단면이 뒤틀리는 현상이 발생하게 된다. 단면이 변형후에 변형전의 원형을 유지하지 않고 왜곡되는 뒤틀림은 단면에 축방향 뒤틀림응력 뿐만 아니라 거더를 구성하는 개개의 플레이트에 횡방향 휨응력을 유발한다. 뒤틀림에 수반되는 뒤틀림응력과 횡방향 휨응력은 상자거더 내부에 격벽이 적절하게 배치되어 있지 않은 경우 휨에 의한 뒤틀림응력의 크기에 상응하거나 더 큰 크기로 발생한다. 따라서 뒤틀림에 의해 유발되는 응력들을 사용성 이내로 제한하기 위해서는 내부 격벽을 설치해야 하고 내부 격벽의 합리적인 치수 및 간격을 결정하기 위해서는 정확한 뒤틀림기동 해석이 선행되어야 한다. 해석적 방법에 의한 뒤틀림 해석은 내부 격벽의 배치에 의한 경계조건의 처리가 매우 복잡하여 거의 불가능 하며 수치해석적인 방법에 의존해야 한다.

* 고려대학교 토목환경공학과 박사과정

** 고려대학교 토목환경공학과 석사과정

*** 고려대학교 토목환경공학과 부교수

본 연구에서는 Dabrowski 에 의해 제시된 뒤틀림에 관한 지배미분방정식을 이용하여 뒤틀림 거동의 수치해석을 위한 유한요소 정식화를 수행하며 이를 통해 유한요소 프로그램을 개발한다 개발된 프로그램을 다양한 예제를 통해 검증하며 결과는 기존 연구 및 셀요소에 의한 해석치를 통해 다각도로 비교하기로 한다.

2. 상자거더 뒤틀림 유한요소 정식화

2.1 상자거더의 뒤틀림 현상

상사형 거더에서는 편재하에 의한 단면의 뒤틀림으로 인해 그림 1 과 같이 단면이 변형하게 된다. 그림에서 보는 바와 같이 단면의 모서리 부분이 종축방향으로 나오고 들어가는 뒀이 발생하고 단면을 구성하는 각각의 관형에 횡방향 뒀이 발생한 것을 알 수 있다. 이에 수반하여 설계자가 고려하지 않은 뒤틀림 뒀법선응력 및 횡방향 뒀응력이 상당히 큰 값으로 상자거더 단면에 발생할 수 있다.

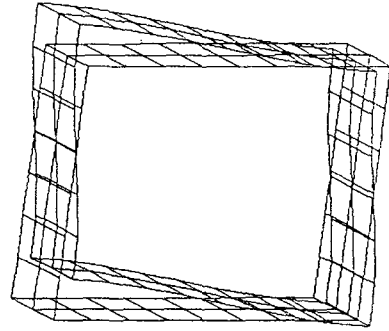


그림 1. 상자거더에서의 뒤틀림 현상

2.2 뒤틀림 지배미분 방정식

Dabrowski 에 의해 제안된 상자형 거더의 뒤틀림에 관한 지배미분방정식은 다음과 같다.

$$EI_{D\omega} \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} + K_{D\omega} \theta = \frac{m_T}{2} \quad (1)$$

위 방정식에서, E , $I_{D\omega}$, 그리고, $K_{D\omega}$ 는 각각, 탄성계수, 뒤틀림 상수, 그리고 뒤틀림 저항성을 나타내고 θ 는 상자거더 모서리 점에서의 뒤틀림에 의한 각변화량을 나타내며 다음과 같이 정의된다.

$$I_{D\omega} = \frac{b^2 h^2}{48(1+\beta)} [A_I \beta + A_w (2\beta - 1)] \quad (2)$$

$$K_{D\omega} = \frac{24EI_w}{\alpha_0 h} \quad (3)$$

위 식에 포함된 각 계수는 다음과 같이 정의된다.

$$\beta = \frac{A_u (1 + 2a/b)^2 + 3A_w}{A_I + 3A_w} \quad (4)$$

$$\alpha_0 = 1 + \frac{2b/h + 3(I_u + I_I)/I_w}{(I_u + I_I)/I_w + (6h/b)(I_u I_I / I_w^2)} \quad (5)$$

여기서, b 와 h 는 상자거더의 폭과 높이를 a 는 플랜지의 캔틸레버부 폭을 나타내며, A_u, A_I , 그리고, A_w 은 각각 상하부 플랜지 및 복부판의 면적을, I_u, I_I , 그리고, I_w 는 각각 상하부 플랜지 및 복부판 관형의 기하학적 관성모멘트를 나타낸다.

식(1)은 그 형태면에서 식(6)에서 보는 바와 같이 탄성지반위의 보에서의 지배미분 방정식과 동일하다.

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + kv = p(z) \quad (6)$$

즉, 뒤틀림에 관한 지배미분방정식이 탄성지반 위의 보의 지배미분방정식과 동일한 형태를 갖는다는 사실에 착안하여 탄성지반 위의 보 해석법(Beams on Elastic Foundation: BEF)을 이용하여 뒤틀림 해석을 수행할 수 있다. 이 유사이론을 근거로 상자형 거더의 뒤틀림과 탄성지반 위의 보와의 상관관계를 비교하면 그림 2 및 표 1 과 같다.

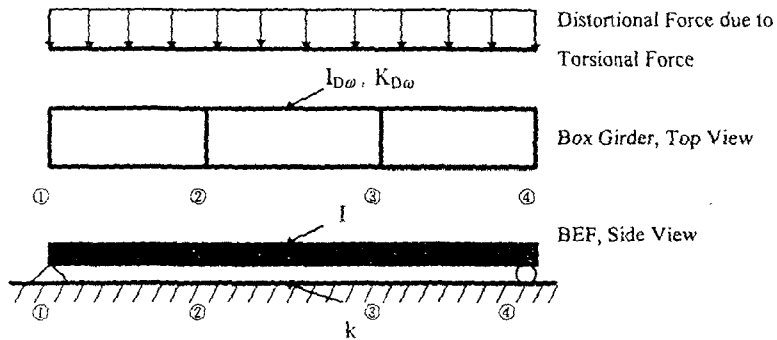


그림 2. 상자거더의 탄성지반 유사해석(BEF)

표 1 탄성지반 위의 보와 상자거더 뒤틀림의 상호관계

탄성지반 위의 보	관계	상자거더 뒤틀림
수직처짐 v	↔	뒤틀림 각 θ
휨 모멘트	↔	뒤틀림 휨모멘트
탄성스프링상수 k	↔	뒤틀림강성 $K_{D\omega}$
단면관성모멘트 I	↔	뒤틀림상수 $I_{D\omega}$
내부 탄성지점	↔	내부 격벽
양단 지점	↔	지점부 격벽

BEF 에서 집중하중은 상자거더에 작용하는 집중 비틀림모멘트에 대응되며, 등분포하중은 상자거더에 작용하는 등분포 비틀림모멘트에 상응한다.

2.3 형상함수

유한요소법에서 변위장을 기술하는 형상함수는 일반적으로 가정을 통해 사용할 수도 있으나 지배미분방정식의 형상함수가 최선의 선택임은 주지의 사실이다. 본 연구에서는 상자거더 뒤틀림에 관한 지배미분방정식의 재차해를 이용하여 형상함수를 구성한다. 식(1)의 재차해는 다음과 같다.

$$\theta = C_1 \sin \lambda \xi \sinh \lambda \xi + C_2 \sin \lambda \xi \cosh \lambda \xi + C_3 \cos \lambda \xi \sinh \lambda \xi + C_4 \cos \lambda \xi \cosh \lambda \xi \quad (7)$$

$$\lambda = l \cdot \sqrt{\frac{K_D \omega}{4EI_D \omega}}, \quad \xi = \frac{z}{l} \quad (8)$$

식(7)에서의 4 개의 상수 $C_{i,i=1,2,3,4}$ 는 양단에서 갖는 자유도로 부터 결정할 수 있다.

뒤틀림 자유도에 관한 절점벡터는 다음과 같으며

$$\mathbf{d} = \left\{ \theta_i, \theta'_i, \theta_j, \theta'_j \right\}^T = \left\{ \theta_{z=0}, \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z=0}, \theta_{z=l}, \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z=l} \right\}^T = d_k \quad (9)$$

식(7)을 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta'_i \\ \theta_j \\ \theta'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & 0 \\ s_1 \sinh \lambda l & s_1 \cosh \lambda l & c_1 \sinh \lambda l & c_1 \cosh \lambda l \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

또는

$$\mathbf{d} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} \quad (11)$$

여기서, $s_1, c_1, sh_1,$ 와 ch_1 은 각각 $\sin \lambda, \cos \lambda, \sinh \lambda,$ 그리고 $\cosh \lambda$ 를 나타내며 $e_1, e_2, e_3,$ 그리고 e_4 는 각각 $\frac{\lambda}{l}(c_1 sh_1 + s_1 ch_1), \frac{\lambda}{l}(c_1 ch_1 + s_1 sh_1), \frac{\lambda}{l}(-s_1 sh_1 + c_1 ch_1),$ 그리고 $\frac{\lambda}{l}(-s_1 ch_1 + c_1 sh_1)$ 로 정의된다.

식(11)로 부터 일반화된 좌표계에 대한 상수 $C_{i,i=1,2,3,4}$ 를 나타내는 벡터 \mathbf{a} 는 절점변위벡터 \mathbf{d} 와 다음의 관계를 갖음을 알 수 있다.

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{d} \quad (12)$$

식(7)로 부터 뒤틀림 변위는 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$\theta = \mathbf{C} \cdot \mathbf{a} \quad (13)$$

여기서,

$$\mathbf{C} = [\sin \lambda \xi \cdot \sinh \lambda \xi \quad \sin \lambda \xi \cdot \cosh \lambda \xi \quad \cos \lambda \xi \cdot \sinh \lambda \xi \quad \cos \lambda \xi \cdot \cosh \lambda \xi] \quad (14)$$

식(12)를 식(13)에 대입하면 다음과 같은 형상함수를 얻게 된다.

$$\theta = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} \quad (15)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (16)$$

$$N_i = b_{1i} \sin \lambda \xi \sinh \lambda \xi + b_{2i} \sin \lambda \xi \cosh \lambda \xi + b_{3i} \cos \lambda \xi \sinh \lambda \xi + b_{4i} \cos \lambda \xi \cosh \lambda \xi \quad (17)$$

2.4 강성행렬

강성행렬은 뒤틀림에 의해 상자거더에 저장되는 변형에너지의 1 차 변분으로 부터 산정할 수 있다. 상자거더에서 뒤틀림에 의해 축적되는 변형에너지는 식(18)과 같으며

$$U = \frac{EI_D \omega}{2} \int (\theta'')^2 dz + \frac{K_D \omega}{2} \int \theta^2 dz \quad (18)$$

변형에너지의 1 차 변분은

$$\delta U = EI_{D\omega} \int \theta'' \delta \theta'' dz + K_{D\omega} \int \theta \delta \theta dz \quad (19)$$

로 표현된다.

식(15)를 식(19)에 대입하면 다음과 같은 강성행렬을 얻게된다.

$$k_{ij} = EI_{D\omega} \int N_i' N_j'' dz + K_{D\omega} \int N_i N_j dz \quad (20)$$

2.5 등가절점하중벡터

등가절점하중벡터 또한 강성행렬의 경우와 같이 작용하중에 의한 퍼텐셜에너지 손실의 1차변분으로 부터 산정할 수 있다. 뒤틀림을 유발하는 편재하 하중에 의한 상자거더의 퍼텐셜에너지 손실은 다음과 같으며

$$V = - \int \frac{m_T}{2} \theta dz \quad (21)$$

퍼텐셜에너지손실의 1차변분을 이용하여 등가하중벡터성분을 구하면 다음과 같다.

$$f_i = \frac{m_T}{2} \int [b_{1i} \sin \lambda \xi \sinh \lambda \xi + b_{2i} \sin \lambda \xi \cosh \lambda \xi + b_{3i} \cos \lambda \xi \sinh \lambda \xi + b_{4i} \cos \lambda \xi \cosh \lambda \xi] dz \quad (22)$$

3. 상자거더 뒤틀림 거동 해석예

앞서 유도된 뒤틀림 자유도에 관한 강성행렬 및 하중벡터를 이용하여 해석프로그램을 개발하였다. 해석프로그램은 내부격벽의 강성을 집중스프링으로 모델링하여 뒤틀림에 대한 내부격벽의 효과를 정확히 반영할 수 있도록 하였다.

3.1 해의 수렴성

개발된 요소정식화의 검증을 위한 첫번째 예제로 요소수에 따른 해의 수렴성을 조사하기로 한다. 요소강성행렬과 등가절점하중벡터를 산정함에 있어서 사용된 형상함수가 뒤틀림 거동에 관한 지배미분방정식의 제차해를 사용하여 구해졌으므로 해의 수렴성은 형상함수를 저차의 다항식을 사용하여 산정하였을 경우보다 우수할 것으로 판단된다. 해석대상은 내부격벽이 배치되지 않은 지간 30m의 단순지지 상자거더 모델로 선정하였으며 세부사항은 다음과 같다.

지간장(L)=30m, 단면폭(B)=200cm, 단면높이(H)=200cm, 플렌지 및 복부판 두께 $t_f=t_w=1$ cm,
 $E=2.04 \times 10^6$ kg/cm², $I_{D\omega}=2.625 \times 10^{10}$ cm⁶, $K_{D\omega}=2.461 \times 10^4$ kg-cm/cm,
 $\omega_{Dmax}=7,500$ cm² $m_T=5000$ kg-cm/cm

내부격벽이 설치되어 있지 않고 양단이 단순지지된 경우에 있어서의 뒤틀림각에 대한 해석해는 다음과 같이 구해지며

$$\theta = A \sin \lambda \xi \sinh \lambda \xi + B \sin \lambda \xi \cosh \lambda \xi + C \cos \lambda \xi \sinh \lambda \xi + D \cos \lambda \xi \cosh \lambda \xi + m_T / 2K_{D\omega} \quad (23)$$

$$A = 0 \quad B = \frac{m_T}{2K_{D\omega}} \frac{\sin \lambda \cos \lambda - \sin \lambda \cosh \lambda}{\cos^2 \lambda \sinh^2 \lambda + \sin^2 \lambda \cosh^2 \lambda}$$

$$C = \frac{m_T}{2K_{D\omega}} \frac{\sinh \lambda \cosh \lambda - \cos \lambda \sinh \lambda}{\cos^2 \lambda \sinh^2 \lambda + \sin^2 \lambda \cosh^2 \lambda} \quad D = -\frac{m_T}{2K_{D\omega}} \quad (24)$$

뒤틀림 뒤틀모멘트 Bi_D 및 단면모서리에서의 뒤틀림 뒤틀법선응력은 다음의 식으로부터 산정할 수 있다.

$$Bi_D = EI_{D\omega} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (25)$$

$$\sigma_{D\omega} = \frac{Bi_D}{I_{D\omega}} \omega_D \quad (26)$$

위의 해석해에 의해 산정된 뒤틀림 뒤틀법선응력과 개발된 본 프로그램에 의한 해석치를 비교하여 해의 수렴성을 조사한다. 개발된 프로그램에서 요소의 개수를 5, 10, 15, 그리고 30 개로 하여 뒤틀림거동에 대한 해석을 수행하여 해석해와 비교한 결과가 그림 3에 도시되어 있다. 그림에서 보는 바와 같이 요소의 길이가 단면폭의 약 2배 이하에서는 상당히 정확한 해를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

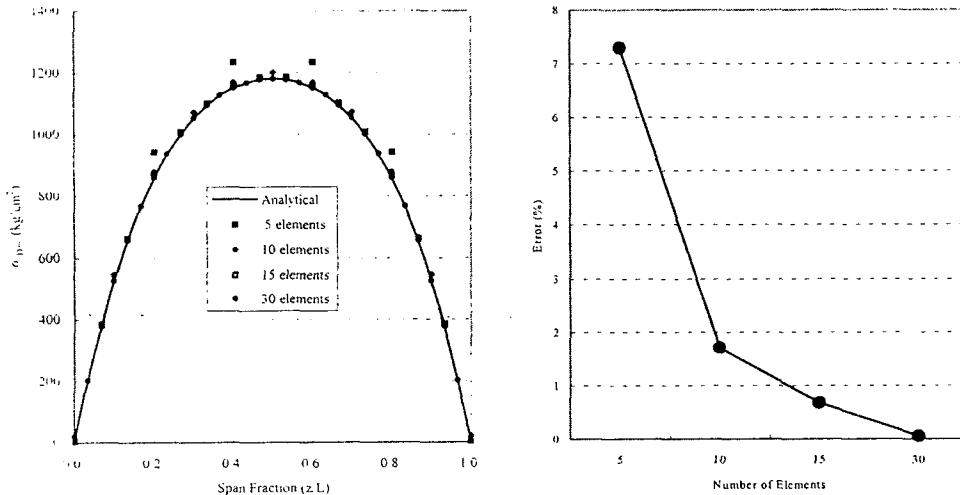


그림 3. 유한요소해의 수렴

3.2 셀 해석결과와의 비교

본 절에서는 내부 격벽이 설치된 상자거더에서의 본 연구에서 개발된 프로그램에 의한 뒤틀림 해석결과치와 셀요소에 의한 3차원 해석을 비교하여 개발된 프로그램의 타당성을 검증하기로 한다. 해석모델의 제원은 다음과 같다.

해석모델	: 지간장(L)=40m, 단순지지, 단면폭(B)=300cm, 단면높이(H)= 200cm,
플랜지 및 복부판 두께	$t_f=t_w=1.4$ cm, 내부격벽간격(L_D)=8m, 격벽두께(t_r)=1.4cm,
작용하중	: 지간중앙 복부판에 집중편재하중 P=100t
개발프로그램	: 요소수=40, 절점수=41
셀요소 해석	: 요소수=1744(8 절점셀요소), 절점수=5158

그림 4와 그림 5는 개발된 프로그램에 의해 산정된 뒤틀림 뒀법선응력과 횡방향 휨응력을 쉘 요소에 의한 해석결과치와 비교하여 축방향에 따라 도시한 것이다. 그림에서 표시된 응력들은 이들 응력값이 가장 크게 발생하는 상지단면의 모서리점에서의 값을 읽은 것이다. 개발된 프로그램에 의한 결과치와 쉘요소 해석에 의한 결과치가 매우 잘 일치함을 알 수 있다.

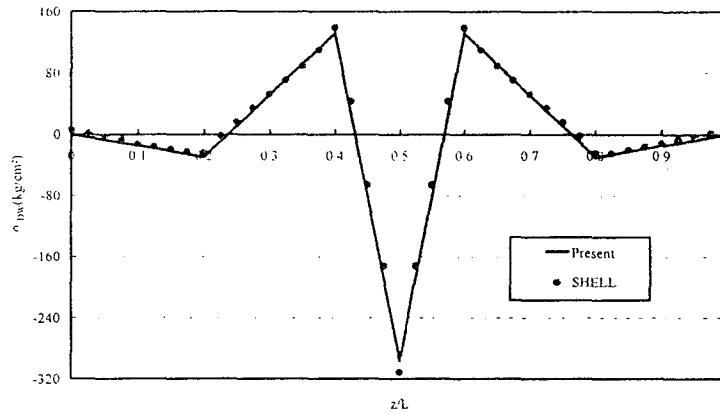


그림 4. 쉘요소에 의한 뒤틀림 뒀법선응력 결과치와의 비교

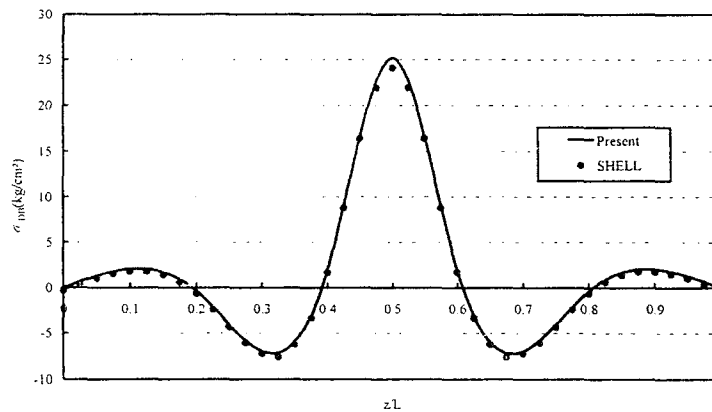


그림 5. 쉘요소에 의한 뒤틀림 횡방향 휨응력 결과치와의 비교

4. 결론 및 요약

본 연구에서는 Dabrowski의 뒤틀림에 관한 지배미분방정식을 이용하여 변위법에 기초한 유한 요소 정식화를 수행하였다. 강성행렬과 하중벡터를 산정함에 있어 형상함수를 지배미분방정식의 제1차항을 사용함으로써 절점에서의 불연속 문제가 발생하지 않을 뿐 아니라 적은 요소수로도 해의 수렴이 우수하다. 정식화된 강성행렬과 하중벡터를 사용하여 변위법에 입각한 해석프로그램을 작성하였으며 몇 가지 수치예를 통해 해석프로그램의 타당성을 검증하였다. 수치예를 통해 개발된 프로그램에 의한 수치해가 해석해와 매우 잘 일치하며 쉘요소에 의한 해석결과와 비교하여서도 매우 정확한 결과를 도출함을 알 수 있었다. 개발된 프로그램을 통해 합리

적인 내부격벽의 설치를 위한 매개변수 연구가 수행될 수 있을 것으로 판단된다. 아울러 도시 고가교 및 고속도로 인터체인지 등에서 많이 쓰이는 상자형 곡선거더에 대한 보다 세밀한 연구가 뒤따라야 할 것으로 판단된다.

참고문헌

1. Hiroshi Nakai, Chai Hong Yoo : “*Analysis and Design of Curved Steel Bridges*”, McGraw Hill, 1988
2. Vlasov, V.Z., “*Thin-Walled Elastic Beams*”, 2nd ed., National Science Foundation, Washington, D.C., 1961
3. Richard N., Right, Sana R, Abdel-Samad and Arthur R. Robinson, “BEF Analogy for Analysis of Box Girders”, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol.94, No. ST7, July, 1968, pp.1719-1743
4. Yao Hsu, C.C. Fu, and David R, Schelling, “EBEF Method for Distortional Analysis of Steel Box Girder Bridges”, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 121, No.3, March, 1995, pp.557-566
5. James C. Olenik and Conrad p. Heins, “Diaphragms for Curved Box Beam Bridges”, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 101, No. ST10, October, 1975, pp.2161-2178
6. Miranda, Constancio, and Nair, Keshavan, “Finite Beams on Elastic Foundaitons”, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol.92, ST2, Proc. Paper 4778, April, 1966, pp.131-142