

장력안정 구조물의 최적초기응력 탐색에 관한 연구

A Study on the Optimal Initial Stress-Finding of Structures Stabilized by Cable-Tension

*최 옥 훈 **한 상 을 ***권 택 진
Choi, Ok-Hun Han, Sang-Eul Kwun, Taek-Jin

ABSTRACT

The tensegrity structure by prestressed cable, which may have large freedom in scale and form and therefore are received much attention from the view points of their light weight and aesthetics, is a very flexible and geometrically unstable structure because the cable material has little initial rigidity. For the stable self-equilibrated state of the usually very deformable structure, the method to find the optimal initial stress by the shape analysis is proposed in this paper.

The proposed procedure is to derive the nonlinear finite element formula of cable and truss members considering geometric nonlinearity and used to modified load incremental method adding to Newton-Raphson method with the proposed condition for optimal initial stress.

The result of the shape analysis for the tensegrity structure with the radius of 30m is shown the almost approximated shape to architectural shape and the changed procedure of initial stress.

1. 서론

케이블과 스트럿으로 구성된 장력안정 복합구조물의 일종인 텐세그리티 구조는 다양한 형상과 규모를 갖는 대공간을 확보할 수 있는 구조시스템으로서 세계 각국에서 지속적으로 연구되고 있다. 이 구조는 미적인 경량지붕을 구성할 수 있다는 점에서 많은 주목을 받고 있으나, 사용되는 케이블 재료가 매우 변형하기 쉬운 성질을 가지므로, 초기에 기하학적으로 불안정형상을 갖는다. 따라서 불안정 구조물의 안정화 상태를 위하여, 형상해석에 의한 결정되는 초기응력이 도입되어야 한다.

본 연구에서는 복합된 수정하중증분법과 Newton-Raphson에 의한 반복적 수치해석과정에 제안된 최적 초기응력 조건식을 적용하여, 자기평형상태를 가질 수 있는 최적한 초기응력을 탐색하는 것을 목적으로 한다.

* 안동정보대학 건축과 교수, ** 인하대학교 건축공학과 교수, *** 성균관대학교 건축공학과 교수

2. 기초방정식 정식화⁽¹⁴⁾

케이블 구조는 일반적으로 변형하기 쉬운 특성을 가진 구조이므로 구조물의 전체적인 형상에 영향을 미친다. 이러한 영향은 구조물의 대변형을 일으키므로, 재료의 유연성에 따른 기하학적 비선형을 고려할 수 있는 유한변위 이론이 사용되어야 한다. 유한변위를 고려한다는 것은 선형이론에서 무시되었던 신장의 고차항과 전단에 대한 회전항을 고려하는 것이다.

구조물 전체적 거동을 지배하는 평형방정식을 정식화하기 위하여 증분내에서 유한요소의 모든 변형도는 미소하다고 가정한다. 그리고 유한변위 이론이 적용된 평형방정식은 변형후의 기하학적 좌표에 의하여 정식화된다. 그림 1에서는 전체좌표계 X, Y, Z와 요소좌표계 x, y, z를 보여주고 있다.

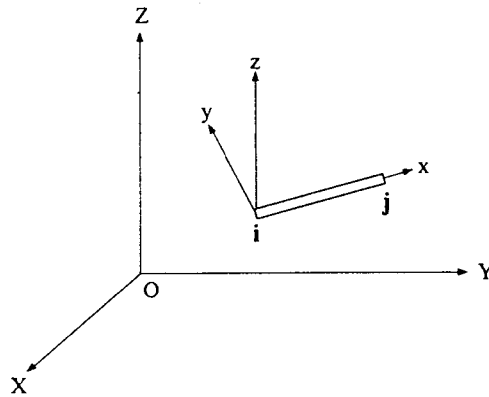


그림 1 전체좌표계와 요소좌표계

트러스-케이블에 대한 변형도-변위 관계식은 식 (1) 과 같다. 여기에서 u, v, w 는 그림 1에서 x, y, z 방향에 관한 변위이다. 앞의 첫 항은 선형성분이고, 나머지 항은 기하학적 비선형성분이다.

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right\} \quad (1)$$

여기서 식(2)와 같은 무차원량 ξ ($0 \leq \xi \leq 1$)을 도입한다. u_i, v_i, w_i 와 u_j, v_j, w_j 는 i 점과 j 점에 관한 요소의 절점변위이고 L_e 는 변형전의 길이이다.

$$x = L_e \xi, \quad u = (1-\xi)u_i + \xi u_j, \quad v = (1-\xi)v_i + \xi v_j, \quad w = (1-\xi)w_i + \xi w_j \quad (2)$$

식(2)를 이용하면 식(1)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\epsilon_x = B_u d + \frac{1}{2} d^T B^T B d \quad (3)$$

여기서,

$$\begin{aligned} d^T &= [u_i \quad v_i \quad w_i \quad u_j \quad v_j \quad w_j] \\ B_u &= \frac{1}{L_e} [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \\ B &= \frac{1}{L_e} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

재료가 선형탄성의 범위 내에 있다는 가정에 의하여, 증분구간에서의 응력도-변형도 관계

식은 다음과 같다.

$$\sigma_x = E \epsilon_x \quad (4)$$

여기서, σ_x 는 증분구간에서의 응력도, E 는 탄성계수, ϵ_x 는 증분구간에서의 변형후 기하학적 비선형성이 포함된 변형도이다.

가상일의 원리를 이용하면 증분구간에 대한 트러스-케이블의 변형도에너지는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\int \int \int_V [(\sigma_x^{(0)} + \sigma_x) \delta \epsilon_x] dV = \{ \mathbf{f}^{(0)} + \mathbf{f} \}^T \delta \mathbf{d} \quad (5)$$

식(5)에서, $\sigma_x^{(0)}$, σ_x 는 기준상태로부터의 초기응력과 현재상태에서의 응력이고, $\mathbf{f}^{(0)}$, \mathbf{f} 는 기준상태로부터의 초기 절점하중과 현재상태에서의 절점하중이다.

식(3)과 식(4)를 식(5)에 대입하여 변위의 고차항을 생략하면 평형방정식은 식(6)과 같다. 여기서, 케이블-트러스의 체적적분은 AL_e 이고 A 는 부재의 단면적이다.

$$\mathbf{f} - \mathbf{r} = \mathbf{k}_E \mathbf{d} + \mathbf{k}_G \mathbf{d} \quad (6)$$

여기서,

$$\mathbf{r} = \int \int \int_V \sigma^{(0)} \mathbf{B}_v^T dV - \{ \mathbf{f}^{(0)} \} \quad (7)$$

$$\mathbf{k}_E = \frac{N^{(0)}}{L_e} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_G = \frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & -\mathbf{I}_1 \\ -\mathbf{I}_1 & \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$N^{(0)} = A \sigma^{(0)}, \quad [\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{I}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

식(7)에서의 \mathbf{r} 은 증분구간에서의 해석 시에 고차항의 생략과 수치해석의 오차에 따른 불평형력이고 식(8)에서 \mathbf{k}_E 와 \mathbf{k}_G 는 탄성강성매트릭스와 기하학적 강성매트릭스이다.

전체좌표계 X, Y, Z 축에 대한 x 축의 방향여현을 k, m, n 이라 하면, 좌표변환매트릭스는 다음과 같다.⁽¹⁾

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} k & m & n \\ -\frac{m}{\sqrt{k^2+m^2}} & \frac{k}{\sqrt{k^2+m^2}} & 0 \\ -\frac{kn}{\sqrt{k^2+m^2}} & -\frac{mn}{\sqrt{k^2+m^2}} & \sqrt{k^2+m^2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

윗 식에서 k, m, n 은 다음과 같다.

$$k = \frac{X_j - X_i}{L_e}, \quad m = \frac{Y_j - Y_i}{L_e}, \quad n = \frac{Z_j - Z_i}{L_e} \quad (11)$$

그림 1에서, 전체좌표계에 대하여 i 점 및 j 점에 대하여 요소절점의 변위가 \mathbf{D} , 절점력이 \mathbf{F} 불평형력은 \mathbf{R} 이라 두고 식(10)의 좌표변환매트릭스를 이용하면 식(6)은 다음과 같이 전체좌표계로 변환할 수 있다.

$$\mathbf{F} - \mathbf{R} = \mathbf{K}_E \mathbf{D} + \mathbf{K}_G \mathbf{D} \quad (12)$$

여기서,

$$K_E = T^T k_E T, \quad K_G = T^T k_G T \quad (13)$$

$$F = T^T f T, \quad R = T^T r T, \quad D = T^T d T \quad (14)$$

식(13)에서 K_E 는 선형해석에 이용되는 탄성강성매트릭스이고, K_G 는 증분구간의 시점에서 기하학적 비선형을 포함하기 때문에 기하강성매트릭스라 한다.

3. 최적 초기응력 조건식⁽¹⁴⁾

형상해석에 의한 초기장력결정은 식(15)와 식(16)과 같은 목적함수에 의한다. 식(15)은 최적 안정화상태의 형상을 갖는 변위에 관한 조건식이다. 식(16)은 구조물의 응력·변형해석시에 기하강성으로 도입되는 최적 초기응력에 대한 조건식이다.

$$\sum_{j=1}^n \{D_p - D_{j,k}\} \rightarrow \text{최소화} \quad (k=1,2, \dots, m) \quad (15)$$

$$\sum_{j=1}^n \{P_k - N_{j,k}\} \rightarrow \text{최소화} \quad (k=1,2, \dots, m) \quad (16)$$

여기서 $D_p, D_{j,k}$ 는 설계가의 요구에 의한 구조물의 형상에 대한 위치와 k 번째 안정화상태의 형상해석에서 j 번째 수렴된 변위들이고 $P_k, N_{j,k}$ 는 k 번째 안정화상태에서의 형상해석에서 도입된 형상초기응력과 부재응력이다.

위의 최적화 조건식을 적용한 반복적 수치기법에 의하여 해석모델의 최적안정화상태와 그 안정화상태를 유지하는데 필요한 초기장력을 탐색한다.

4. 해석결과

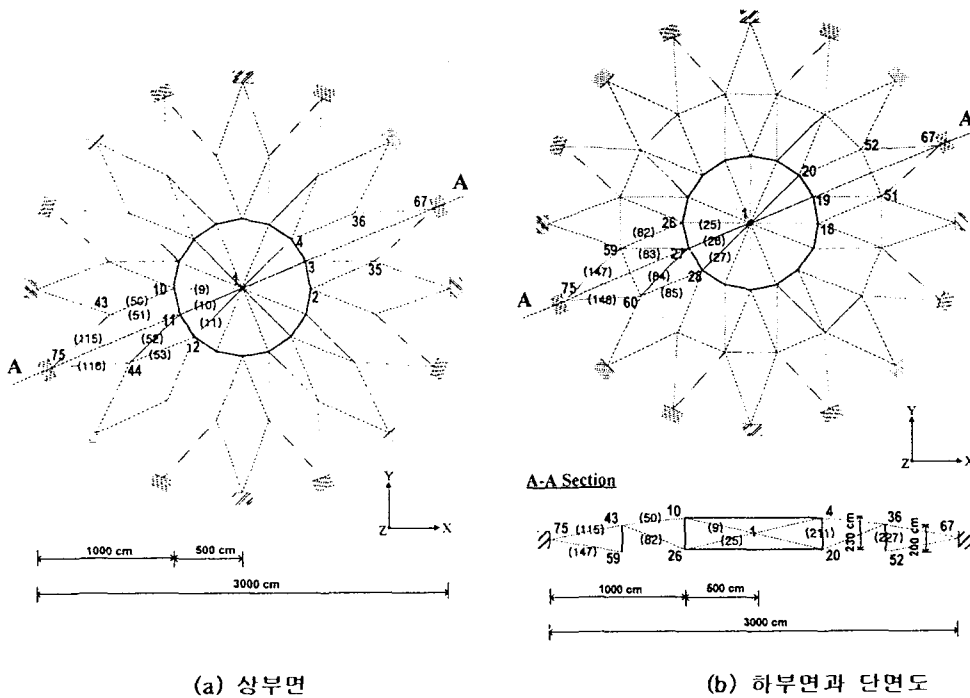


그림 2 해석모델

표 1 부재제원 및 형상초기응력

부재	A (cm ²)	E (Kg/cm ²) × 10 ⁶	형상초기응력 (kg/cm ²)
인	1 ~ 16	4.34	1.863
	17 ~ 32	4.34	1.863
	33 ~ 64	10.60	1.275
장	65 ~ 96	4.34	1.863
	97 ~ 128	11.86	1.275
	129 ~ 160	8.67	1.863
재	인장링	11.86	1.275
압	177 ~ 192	30.87	2.059
	193 ~ 208	30.87	2.059
	209 ~ 224	30.87	2.059
	225 ~ 240	30.87	2.059

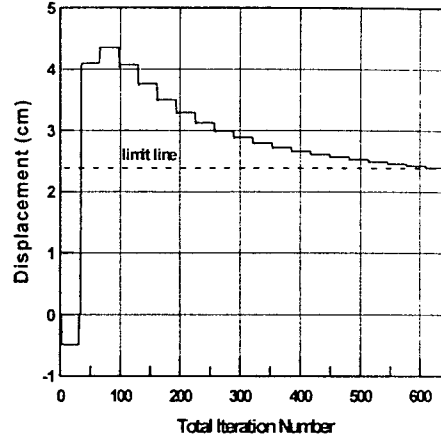


그림 3 안정화상태에 따른 변위 변화

본 절에서는 중앙링 내부에서 케이블이 서로 교차하는 텐세그리티 구조에 대한 형상해석을 수행한다. 해석모델의 설계형상은 그림 2와 같고 (a)는 해석모델의 상부면, (b)는 해석모델의 하부면 및 단면도를 보여주고 있다. 부재제원과 형상초기응력은 표 1에서 주어진다

표 1에서 부재 177~192, 부재 193~208 과 209 ~224는 중앙링의 상현재, 하현재 그리고 그 사이에 위치한 스트럿 부재이다. 부재 1~16 과 부재 17~ 32은 중앙링의 내부에 위치한 상부와 하부케이블이다. 부재 33~64 와 부재 97~128은 두 번째 원주방향에 위치한 상부와 하부케이블이고 부재 129~160 와 부재161 ~ 176은 세 번째 원주방향에 위치하여 지점에 연결되는 상부케이블과 하부케이블이다. 인장링은 절점 50에서 절점 65까지 원주 방향으로 연결되는 부재 (161 ~176) 이다. 부재 225 ~240은 상부와 하부케이블 사이에 놓여 있는 스트럿 부재이다.

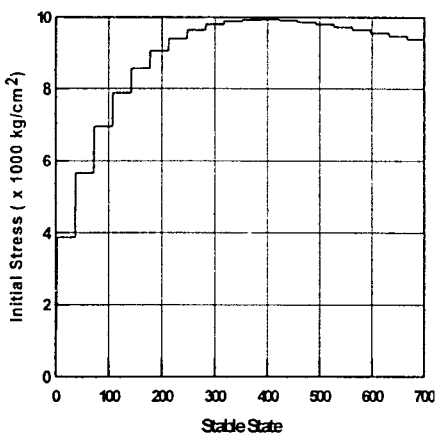


그림 4 안정화상태에 따른 부재응력

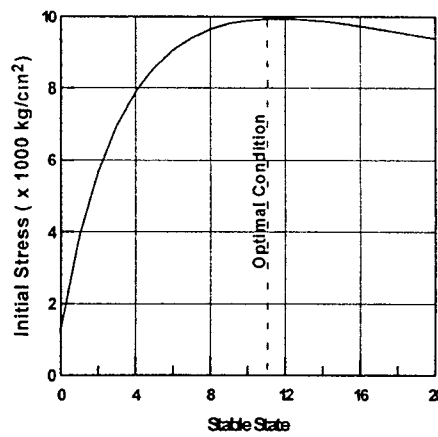


그림 5 안정화상태에 따른 형상초기응력변화

그림 3에서는 각 안정화상태에서 정점에서의 Z축 방향의 변형이 최적평형상태에 수렴해 가는 과정을 보여주고 있다. 이 그림의 특징은 정점에서의 Z축방향의 변위가 설계형상의 위치보다 초기에 주어진 응력에 의하여 하향하고 있으나 두 번째 안정화 상태부터는 상승하여 점차 완만이 흐르고 있음을 보여 주고 있다. 전체 반복회수가 640에서 Z축 방향의 변위가 거의 일정한 값 (limit line)에 수렴하고 있다. 여기서 일정한 값이라 함은 설계형상을 의미한다.

그림 4는 각 안정화 상태의 반복회수를 포함한 전체 반복회수가 대하여 640 회까지 정점과 연결되고 있는 상부케이블에 대한 부재응력이 최적 초기응력에 수렴해 가는 과정을 보여주고 있다. 이 그림상에서 초기의 형상초기응력에 따른 부재응력의 변화가 급격히 상승하고 있으나 각 안정화상태의 반복회수를 포함한 전체 반복회수가 289부터는 변화가 완만해지고 있음을 보여준다. 목적형상을 만족하는 최적 조건식(15)은 400 회 근방에서 만족되고 있음을 알 수 있다.

그림 5에서는 20 번째 안정화상태까지의 형상초기응력의 변화를 보여주고 있다. 여기서 최적화 조건식(16)에 만족하는 안정화상태는 그림상에서 점선(optimal condition)으로 표시된 11 번째이다. 즉 이 때의 형상초기응력 (9.8t/cm²)이 최적안정화상태를 유지하는 장력으로 사용할 수 있다. 이 값은 초기에 도입된 형상초기응력보다 7.61 배이다. 그리고 해석구간의 불균형력은 거의 일어나지 않았다. 이러한 이유는 중앙링의 내부에 있는 상하케이블이 중앙에서 서로 교차되었기 때문에 힘의 흐름이 서로 교류되기 때문이라고 사료된다.

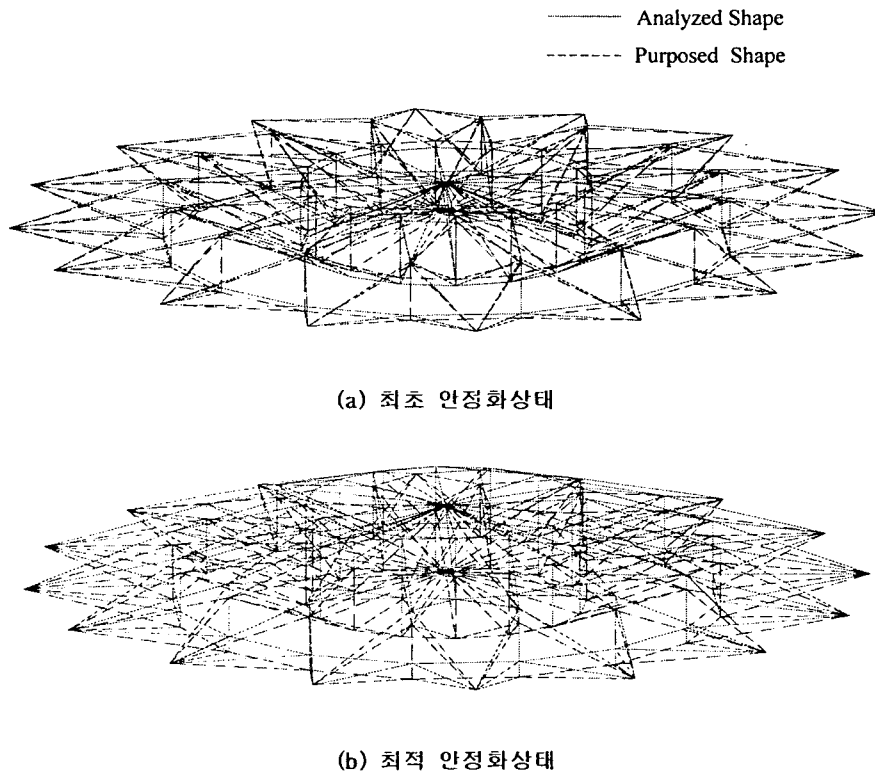


그림 6 초기응력에 따른 안정화상태의 형상 (실제크기의 50배)

그림 6은 두 개의 안정화 상태를 실제크기의 50 배로 확대하여 보여주고 있다. 안정화상태의 위치 변화는 1 회째(a)에서는 목적형상 아래로 하향하고 있으나 2 회째 부터는 목적형상 위쪽으로 상향한 후, 3 회째부터는 점차 아래쪽으로 하향하다가 11 회째 안정화상태 (b)에서 최적조건식 (16)을 만족하고 있다. 실선은 형상해석 결과에 의한 형상, 점선은 설계자에 의하여 제안된 목적형상이다. 표 2는 구조물의 안정화상태의 변화에 따른 부재응력들을 보여주고 있다.

표 2 안정화상태에 따른 초기응력의 변화

(kg / cm²)

반복수	부 재						
	9	25	50	82	115	147	인장링
형상초기 응력	1300.0	1300.0	5810.0	490.0	6440.0	5040.0	24880
1	3885.3	3723.8	4124.3	2912.2	5405.8	7453.0	23611
2	5660.1	5443.3	3818.5	2869.9	5080.1	7279.6	23081
3	6950.1	6692.0	3713.1	2798.5	4943.5	7101.7	22519
4	7894.3	7606.4	3648.8	2748.5	4857.6	6942.4	22014
5	8580.8	8272.5	3596.3	2706.9	4787.1	6803.3	21573
6	9073.1	8751.5	3548.6	2669.1	4723.1	6681.1	21186
7	9418.5	9088.9	3503.9	2633.8	4663.1	6572.0	20840
8	9652.7	9319.2	3461.4	2600.2	4606.1	6473.2	20527
9	9803.1	9468.4	3420.7	2568.1	4551.4	6382.4	20239
10	9890.0	9556.4	3381.4	2537.1	4498.7	6297.8	19970
11	9929.3	9598.1	3343.3	2507.2	4447.6	6218.0	19717

5. 결 론

본 연구에서는 앞에서 제안된 최적한 초기응력 조건식을 적용한 반복적 수치해석과정에 의하여 안정화 상태에 따른 형상과 반복적으로 목적형상에 수렴해 가는 안정화 상태에 따른 초기응력의 변화에 관해 고찰하였다.

주름개폐식과 같은 장치를 할 수 있는 중앙링을 설치한 텐세그러티 구조에 대한 해석결과, 최적화 조건식을 만족하는 최적 안정화상태의 초기응력은 11 번째 안정화상태에서 만족하였고, 이 값은 초기에 불안정 구조물인 텐세그러티의 최적 안정화상태를 유지하는 초기응력으로 사용할 수 있다.

따라서 본 논문에서 제안된 최적 초기응력에 관한 조건식을 적용한 반복적 최적형상해석법은 장력안정구조물의 불안정 문제를 해결할 수 있을 뿐만 아니라, 설계가에 의해 요구되는 형상에 근접한 최적형상을 결정할 수 있다.

감사의 글

본 연구는 초대형구조시스템연구센터(STRESS)의 연구비지원에 의해 수행되었으며 이에 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

1. Martin, H.C., "On the Derivation of Stiffness Matrices for the Analysis of Large Deflection and Stability Problems," Proc. Conf. Matrix Method in Structural Mechanics, AFIT, Oct., 1965
2. Fuller, R. B., Marks, R., *The Dymaxion World of Buckminster Fuller*, Doubleday Anchor Press, 1970.
3. Agyris, J.H., Sharpf, D.W., "Large Deformation Analysis of Prestressed Networks." J. Struct. Div., ASCE 48, pp. 633-654, 1972
4. Pugh A., *An Intruduction to Tensegrity*, University of California Press, 1976
5. Vilnay, O., "Structures Made of Infinite Regular Tensegric Nets", IASS Bulletin No. 63, Vol.XVIII, Apr., 1977, pp. 51 - 57
6. Calladine, C. R., "Buckminster Fuller's Tensegrity" Structures and Clerk Maxwell's Rules for the Constructions of Stiff Frames ", Int. Jour. Solids Structures, 1978,
7. 日本鋼構造協會, 建築構造 ケーブル設計施工指針, 1983.
8. Emmerich, D. G., "*Exercices de Geometrie Constructive Traveaux d'etudiants*", Ecole Nationale Supérieure des Beaux Arts, Paris, Architectures, 1984 pp. 744-749
9. Geiger, D. H., "Membrane Structures", Encyclopedia of Architecture, Design, Engineering, and Construction Vol. 3, John Wiley & Sons, Inc., 1989
10. 권택진, 한상을, 김충한, 최옥훈, "장력안정트러스 구조물의 안정화 기법에 관한 연구," 한국전산 구조공학회 학술발표회 논문집, 제 9 권 제 2 집, 1996
11. 권택진, 한상을, 최옥훈, "장력안정화 트러스의 단위구조 안정화기법에 관한 연구," 한국건축 학회지, 제 13 권 제 7 호, pp. 155 - 162, 1997
12. Han, Sang-Eul and Choi, Ok-Hun, "Determination of Parameters for Stabilization of Truss Structure Stabilized by Cable Tension", Journal of the COSEIK, Vol.10, No3, pp. 195-202, 1997
13. 권택진, 한상을, 최옥훈, "케이블-돔 복합구조의 형상해석에 관한 연구," 한국전산구조공 학회 학술발표회 논문집, 제 11 권 제12집, pp. 93 - 100, 1998
14. 최옥훈, 텐세그리티 구조의 최적형상해석에 관한 연구, 박사학위논문, 성균관대학교, 1998
15. Choi, Ok-Hun and Han, Sang-Eul, "A Study on the Optimization of Shape Analysis for Cable-Dome Structure", International Symposium for the 21th Century Architecture, Architecture Science & Technology Institute Miryang National University, pp. 41-44, 1999