한국전산구조공학회
1999년도 봄학술발표회 논문집

단순지지 변단면보의 고유진동수 산정

Natural Frequencies of Simply Supported Tapered Beams

안 성 기* 김 순 철** 이 수 곤***
Ahn, Seong-Ki Kim, Soon-Chul Lee, Soo-Gon

ABSTRACT

The finite element method was adopted to find out the natural frequencies of a sinusoidally tapered beam with simply supported boundary conditions. The parameters considered in the numerical analysis are the taper parameter, α (α=0.0, 0.1, ~ , 2.0) and the sectional property parameters, m and n [(m,n)=(0,2),(1,3),(2,4)]. It is generally known that the results of the numerical analysis corresponding to each pair of sectional property parameters, (m,n) are represented by second order polynominals of α. The coefficients of α in the polynominals are determined by using the regression technique, which reveals small errors in most cases of given sectional property parameters (m,n).

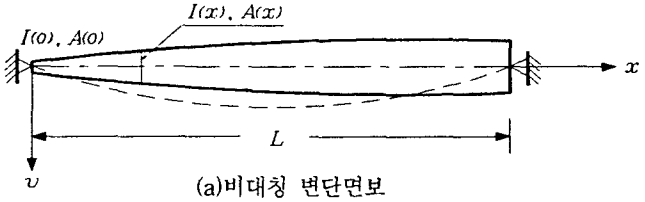
1. 서 론

건축부재 또는 기계의 부품 중에는 부재형태가 변단면으로 되어있어 변단면보로서의 동적 해석 또는 진동해석이 필요할 때가 많다. 이때에는 부재의 고유진동수 결정이 우선 되어야 하겠으나 부재 축에 따른 단면형태 변화가 비선형으로 되면 고전적인 해석법으로는 진동수 산정이 불가능하게 된다. 이때에는 수치해석법인 차분법이나 유한요소법을 이용하여 진동수를 산정할 수 있는데 여기서는 유한요소법을 택하기로 한다. 유한요소법에 의하여 산정한 고유진동수는 변단면보의 동적 구조해석이나 진동해석에 종사하는 기술자들이 쉽게 이용할 수 있도록 간단한 대수식으로 표현하기로 한다. 변단면의 매개변수 α의 전체범위(α=0.0~α=2.0)를 하나의 대수식으로 표시한 후, 이 식에 포함되는 몇 개의 상수들을 회귀분석기법으로 결정하였다. α의 변화에 따른 고유진동수와 회귀분석으로 추정한 상관계수는 어느 경우나 1.0에 가까운 수로 간단한 대수식 이용으로 고유진동수 추정이 가능함을 보여주고 있다.

* 전남대학교 대학원 석사과정
** 동신대학교 건축공학과 부교수
*** 전남대학교 건축학과 교수

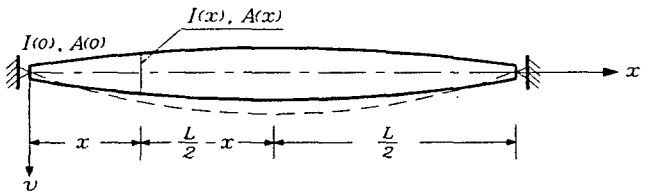
2. 유한 요소의 정식화

그림 1(a)는 비대칭 변단면, 그림 1(b)는 대칭 변단면보를 표시한다. 그림에 표시한 것처럼 단면의 성질은 taper ratio α와 정현(正弦,sine)함수로 표시된다. 여기서 (m,n)의 조합은 식 (1)과 같은 경우에 해당된다.



$$A(x)=A_0\ (1+\alpha\sin\frac{\pi x}{2L})^m$$
$$I(x)=I_0\ \ (1+\alpha\sin\frac{\pi x}{2L})^n$$

(a)비대칭 변단면보



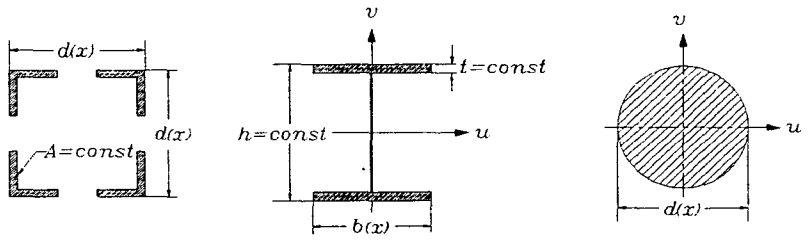
$$A(x)=A_0\ (1+\alpha\sin\frac{\pi x}{L})^m$$
$$I(x)=I_0\ \ (1+\alpha\sin\frac{\pi x}{L})^n$$

(b)대칭 변단면보

그림1. 변단면보의 단면성질

(m,n)의 조합 : (0,2) (1,3) 또는 (2,4) (1)

윗 식의 기하학적 의미는 다음과 같다. 그림 2(a)는 송수신탑(transmission tower)의 평면 약도이다. 단면적이 일정한 ㄱ-자 형강 등이 정사각형 평면의 모서리에 배치되어 있고 위로 올라갈수록 $d(x)$가 $d(x)=d_0(1+\alpha\sin\frac{\pi x}{2L})$로 변할 경우의 단면성질은 (m,n)=(0,2)로 된다. web의 면적을 무시할 수 있고 그 춤이 일정한 H-형강보에서 flange폭 $b(x)$가 $b(x)=b_0(1+\alpha\sin\frac{\pi x}{2L})$로 변할 때, (m,n)=(1,3)은 그림 2(b)의 v-축에 관한 단면의 성질을 표시한다. 끝으로 그림 2(c)와 같이 직경 $d(x)$가 $d(x)=d_0(1+\alpha\times\sin\frac{\pi x}{2L})$로 변할 때 원형단면의 성질은 (m,n) = (2,4)로 나타낼 수 있다.



(a) (b) (c)

그림 2. 단면의 형태

그림 1(a)와 같은 비대칭 보의 고유진동수 ω_0는 다음과 같은 미분방정식에 의하여 지배된다.

$$EI_0\frac{d^2}{dx^2}[(1+\alpha\sin\frac{\pi x}{2L})^n\cdot\frac{d^2v}{dx^2}]-\frac{\rho}{g}A_0{\omega_0}^2(1+\alpha\sin\frac{\pi x}{2L})^m\cdot v \tag{2}$$

식 (2)에서 ρ는 단위체적당 중량이고 g는 중력 가속도이다. 그러나 이와 같은 미분방정식의 정해는 거의 알 수 없으므로, 따라서 해석적 방법에 의한 진동수 방정식의 유도는 불가능하다. 이때에는 차분법을 이용하여 고유진동수를 산정할 수도 있으나 대단히 복잡한 계산을 거쳐야 한다.

여기에서는 유한요소법을 이용하여 고유진동수를 산정키로 하는데 그림 3은 유한요소법에 사용될 선형요소, 선형요소의 변형성분 δ_i 및 절점력 성분 q_i 를 표시하고 있다.

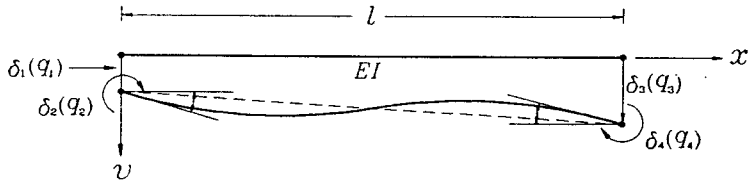


그림 3. 요소의 절점변형과 절점력

그림 3과 같이 절점의 자유도가 2인 선형요소에서의 처짐함수 v는 다음의 식 (3)과 같이 절점변형 vector $\{\delta\}$와 형상함수 $[N]$으로 표시할 수 있다.

$$v=[\ N_1\ \ N_2\ \ N_3\ \ N_4\ ]\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\\ \delta_4\end{Bmatrix}=[N]\{\delta\} \tag{3}$$

식 (3)에서 형상함수의 성분 N_i는 각각

$$N_1=-1+3(\frac{x}{l})^2-2(\frac{x}{l})^3\quad,\quad N_2=x(1-\frac{x}{l})^2$$

$$N_3=-3(\frac{x}{l})^2+2(\frac{x}{l})^3\quad,\quad N_4=\frac{x^2}{l}(\frac{x}{l}-1) \tag{4}$$

요소의 절점력 vector, $\{q\}$와 절점변형 vector, $\{\delta\}$는 다음과 같은 식으로 결합된다.

$$\{q\}=([k_b]-\omega_0^2[m_c])\{\delta\} \tag{5}$$

윗 식에서 w_0는 구하고자 하는 고유진동수이다. 요소의 휨 강성행렬 $[k_b]$와 consistent mass matrix $[m_c]$는 각각 다음 식으로 주어진다.

$$[k_b]=\int_0^l[[\frac{d^2N}{dx^2}]^T\{EI(x)\}[\frac{d^2N}{dx^2}]]d_x$$

$$=\frac{EI(e)}{l^3}\begin{vmatrix}12 & & & symm\\ -6l & 4l^2 & & \\ -12 & 6l & 12 & \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2\end{vmatrix} \tag{6}$$

$$[m_c]=\int_0^l[[N]^T\{\rho A(x)\}[N]]d_x$$

$$=\frac{\rho A(e)l}{420}\begin{vmatrix}156 & & & symm\\ -22l & 4l^2 & & \\ 54 & -13l & 156 & \\ 13l & -3l^2 & 22l & 4l^2\end{vmatrix} \tag{7}$$

식 (6)과 식 (7)의 유도에서는 단면 2차모멘트 $I(x)$와 단면적 $A(x)$가 상수가 아니므로 그 계산이 대단히 복잡하게 된다. 여기에서는 계산의 복잡성을 피하기 위하여 요소의 중앙부에서 산정한 값 즉, 상수값들을 $I(e)$ 및 $A(e)$라 놓고 구한 것이다. 실제로 식 (6)이나 식 (7)의 경우 정확한 수치적분 결과는 $I(e)$또는 $A(e)$로 표시해 구한 값과 거의 일치한다. 예를 들어 그림 1(b)의 대칭 변단면보를 20등분($L=20l$) 할 경우 m=2, $\alpha=2.0$이면, 휨 강성행렬 중 $(k_{11})_b$ 즉, $\int_0^l[(\frac{d^2N_1}{dx^2})^2 \cdot EI_0 \cdot (1+\alpha\sin\frac{\pi x}{L})^2]dx$의 수치적분 결과는 $16.24305 \cdot EI_0/l^3$ 가 된다. 약산에 의한 $(k_{11})_b$는 먼저 $I(1)=I_0(1+2\sin\frac{\pi x}{L})^2 |_{x=0.5l} \fallingdotseq 1.33846I_0$가 되고, $\int_0^l(\frac{d^2N_1}{dx^2})^2dx=\int_0^l(\frac{144x^2}{l^6}-\frac{144x}{l^5}+\frac{36}{l^4})dx=\frac{12}{l^3}$ 이므로 $(k_{11})_b$는 $16.06152 \cdot EI_0/l^3$가 된다. 같은 방법으로 그림 1(a)의 비대칭 변단변보에서 n=1일 때, 마지막 요소의 consistent mass matrix 중 $(m_{11})_b$의 수치적분은 $\int_0^l[N_1^2 \cdot \rho A_0\{1+\alpha\sin\frac{\pi(x+19)}{2L}\}]dx=1.11287 \cdot \rho A_0 l$ 이다. 또한 $A(20)=A_0(1+2\sin\frac{\pi x}{2L}) |_{x=19.5l} \fallingdotseq 2.99846A_0$ 이고, $\int_0^l N_1^2\,dx=\int_0^l(\frac{4}{l^6}x^6-\frac{12}{l^5}x^5+\frac{9}{l^4}x^4+\frac{4}{l^3}x^3-\frac{6}{l^2}x^2+1)dx=0.37143l$이므로 $(m_{11})_b$의 약산 치는 $1.11371 \cdot \rho A_0 l$이 되는데, 수치적분 결과와 비교했을 때 오차는 약 0.08%로 무시되어질 수 있다.

3. 고유진동수 산정

식 (5)로 주어지는 요소의 절점력 vector와 절점변형 vector와의 관계식을 보 전체의 모든 요소에 관하여 조합한 후 경계조건을 처리하면 보의 외력 vector $\{Q\}$와 변형 vector $\{\Delta\}$는 다음 식의 형태를 취한다.

$$\{Q\}=([K_b]-\omega_0^2[M_c])\{\Delta\} \tag{8}$$

자유진동에서는 $\{Q\}=\{0\}$이고 따라서 고유진동수 산정을 위한 식 (8)은 다음과 같이된다.

$$([K_b]-\omega_0^2[M_c])\{\Delta\}=\{0\} \tag{9}$$

식 (9)는 경계조건이 처리된 강성행렬 및 외부변형으로 고유진동수 산정은 $\{\Delta\}$의 계수행렬(premultiplied matrix)이 행렬식으로 0이 되어야 한다는 식으로부터 구하여 진다. 즉,

$$det([K_b]-\omega_0^2[M_c])=0 \tag{10}$$

computer를 이용한 반복법으로 기본진동수를 구하기 위하여 식 (10)을 다음과 같이 변형시킨다.

$$det([K_b]^{-1}[M_c]-\frac{1}{\omega_0^2}[I])=0 \tag{11}$$

위에서 $[I]$는 단위행렬(identity matrix)을 의미한다.

식 (5)의 조합으로 얻어진 식 (10)이 변형된 식 (11)을 그림 1과 같은 변단면보에 적용한다. 다음은 동일한 부재를 같은 길이의 요소로 등분할 때, 요소수가 증가할수록 그 결과 얻어지는 값들이 어떤 일정 값에 수렴하고 있음을 보여주는 그림이다.

단면형태변화가 그림 1과 같을 때 정확한 자유진동수는 알 수 없으나 N=16부터는 거의 일정 값을 유지하므

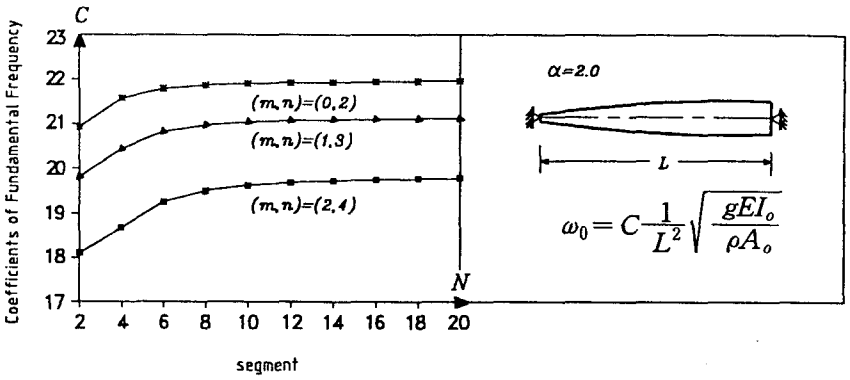


그림 4. 요소수의 증가와 수렴도

로 여기서의 고유진동수는 N=20, 즉 변단면보를 20등분 한 다음 $\alpha = 0.0$에서 $\alpha = 2.0$까지 변할 때 산정 하였고 그 결과는 다음의 표 1 및 표 2와 같다. 이들 두 표에서 C_{fem}이란 열(column)은 유한요소법에 의한 결과이다.

4. 회귀식

수치해석법에 의한 결과치는 어떤 특정 경우에만 적용할 수 있고 따라서 일반화 할 수 없는 것이 알려진 사실이다. 여기서는 구조설계 실무에 종사하는 기술자가 그림 1과 같은 변단면보의 설계에 당면하게 될 때 부재의 내력평가를 보다 정확히 하는데 도움이 되도록 진동수 ω_0를 구하는 다음과 같은 추정식을 제안하였다.

$$C(\alpha) = A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^2 \quad , \quad \left(\omega_0 = C(\alpha)\frac{1}{L^2}\sqrt{\frac{gEI_0}{\rho A_0}}\right) \tag{12}$$

위의 추정식중 상수 A_0, A_1 및 A_2는 표 1과 2의 수치해석 결과 즉 C_{fem}을 기본으로한 회귀분석법으로 구하였으며 그 판정결과는 표 3과 같다.

식 (12)에 표 3의 값을 대입하면 그림 1의 각 경우에 해당하는 무차원 고유 진동수를 추정할 수 있는데 표 1과 2의 C_{est}가 이들 값이며, 그림 4와 같이 된다. 단면의 성질이 변함에 따라 C_{fem}이 일정하게 변하므로, 모든 단면의 형태 변화에 적용할 수 있는 다음과 같은 n과 α에 관한 추정식을 제안할 수 있다. 그 판정결과는 표 4와 같다.

$$C(\alpha, n) = (A_0 + A_1 n + A_2 n^2) + (B_0 + B_1 n + B_2 n^2)\alpha + (C_0 + C_1 n + C_2 n^2)\alpha^2$$

$$\left(\omega_0 = C(\alpha, n)\frac{1}{L^2}\sqrt{\frac{gEI_0}{\rho A_0}}\right) \tag{13}$$

식 (12), (13)의 추정식이 유한요소법에 의한 고유 진동수를 얼마나 오차 없이 반영하는가를 나타내는 상관계수가 표 3, 4의 r 이다. 상관계수 r 은 식 (14)로 계산된 값이다. 여기에서 $\overline{C}_{fem}$과 $\overline{C}_{est}$는 각각 C_{fem}과 C_{est}의 산술 평균값이다.

$$r = \frac{\sum\{(C_{fem} - \overline{C}_{fem}) \cdot (C_{est} - \overline{C}_{est})\}}{\sqrt{\{\sum(C_{fem} - \overline{C}_{fem})^2\}\{\sum(C_{est} - \overline{C}_{est})^2\}}} \tag{14}$$

표 1. 비대칭 변단면 보의 고유진동수 (그림 1(a))

$$w_0 = C(\alpha)\frac{1}{L^2}\sqrt{\frac{gEI_0}{\rho A_0}}$$

α	(m,n)=(0,2)		(m,n)=(1,3)		(m,n)=(2,4)	
	C_{fem}	C_{est}	C_{fem}	C_{est}	C_{fem}	C_{est}
0.0	9.8695	10.0624	9.8695	10.3028	9.8695	10.2915
0.1	10.5314	10.6835	10.5292	10.8792	10.5246	10.8492
0.2	11.1845	11.3018	11.1705	11.4520	11.1549	11.3980
0.3	11.8321	11.9173	11.8028	12.0212	11.7576	11.9380
0.4	12.4665	12.5301	12.4149	12.5868	12.3356	12.4692
0.5	13.0945	13.1401	13.0176	13.1488	12.8981	12.9915
0.6	13.7165	13.7474	13.6160	13.7072	13.4435	13.5050
0.7	14.3278	14.3519	14.1955	14.2620	13.9735	14.0097
0.8	14.9399	14.9536	14.7647	14.8132	14.4855	14.5056
0.9	15.5473	15.5526	15.3343	15.3608	14.9804	14.9926
1.0	16.1440	16.1488	15.8883	15.9048	15.4623	15.4708
1.1	16.7443	16.7422	16.4344	16.4452	15.9376	15.9401
1.2	17.3348	17.3329	16.9859	16.9820	16.4007	16.4007
1.3	17.9158	17.9208	17.5250	17.5153	16.8590	16.8524
1.4	18.5043	18.5060	18.0516	18.0449	17.2959	17.2952
1.5	19.0857	19.0884	18.5689	18.5709	17.7246	17.7293
1.6	19.6705	19.6680	19.0955	19.0934	18.1522	18.1545
1.7	20.2475	20.2449	19.6101	19.6122	18.5698	18.5709
1.8	20.8280	20.8190	20.1166	20.1274	18.9845	18.9784
1.9	21.3798	21.3903	20.6264	20.6391	19.3733	19.3771
2.0	21.9607	21.9589	21.1631	21.1471	19.7681	19.7670

표 2. 대칭 변단면 보의 고유진동수 (그림 1(b))

$$w_0 = C(\alpha)\frac{1}{L^2}\sqrt{\frac{gEI_0}{\rho A_0}}$$

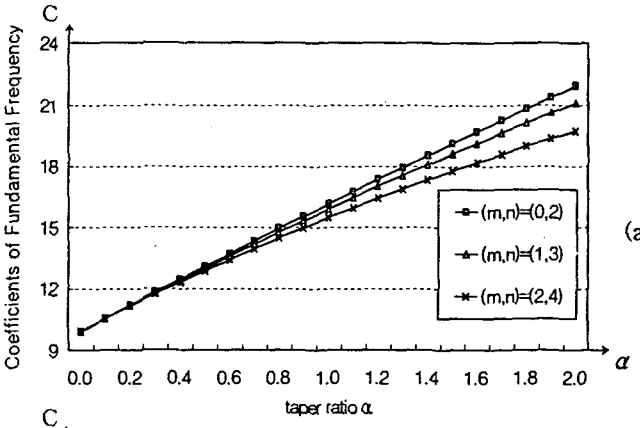
α	m=0 , n=2		m=1 , n=3		m=2 , n=4	
	C_{fem}	C_{est}	C_{fem}	C_{est}	C_{fem}	C_{est}
0.0	9.8695	10.0599	9.8695	10.0603	9.8695	10.1292
0.1	10.7042	10.8555	10.6994	10.8439	10.6974	10.8849
0.2	11.5278	11.6494	11.5149	11.6220	11.4898	11.6292
0.3	12.3479	12.4414	12.3175	12.3946	12.2696	12.3623
0.4	13.1587	13.2318	13.1047	13.1618	13.0223	13.0841
0.5	13.9604	14.0203	13.8847	13.9235	13.7569	13.7946
0.6	14.7654	14.8071	14.6520	14.6798	14.4640	14.4938
0.7	15.5636	15.5921	15.4153	15.4305	15.1709	15.1817
0.8	16.3511	16.3754	16.1665	16.1758	15.8565	15.8584
0.9	17.1457	17.1569	16.9171	16.9157	16.5208	16.5238
1.0	17.9303	17.9367	17.6470	17.6501	17.1893	17.1779
1.1	18.7124	18.7147	18.3821	18.3790	17.8296	17.8208
1.2	19.4931	19.4909	19.0993	19.1024	18.4467	18.4523
1.3	20.2667	20.2654	19.8202	19.8204	19.0648	19.0726
1.4	21.0383	21.0381	20.5303	20.5329	19.6870	19.6816
1.5	21.8122	21.8090	21.2426	21.2399	20.2677	20.2793
1.6	22.5688	22.5782	21.9386	21.9415	20.8698	20.8658
1.7	23.3486	23.3456	22.6368	22.6376	21.4431	21.4409
1.8	24.1152	24.1113	23.3373	23.3282	22.0119	22.0048
1.9	24.8722	24.8752	24.0091	24.0134	22.5661	22.5574
2.0	25.6382	25.6373	24.6921	24.6931	23.0875	23.0987

표 3. 회귀상수 I

		A_0	A_1	A_2	r
Non-symm.	(m,n)=(0,2)	9.8958	6.4812	-0.2297	≒1.0
	(m,n)=(1,3)	9.9117	6.3587	-0.3797	≒1.0
	(m,n)=(2,4)	9.9348	6.1793	-0.6427	≒1.0
Symm.	(m,n)=(0,2)	9.8897	8.2151	-0.1746	≒1.0
	(m,n)=(1,3)	9.9015	8.1150	-0.3648	≒1.0
	(m,n)=(2,4)	9.9220	7.9552	-0.6913	≒1.0

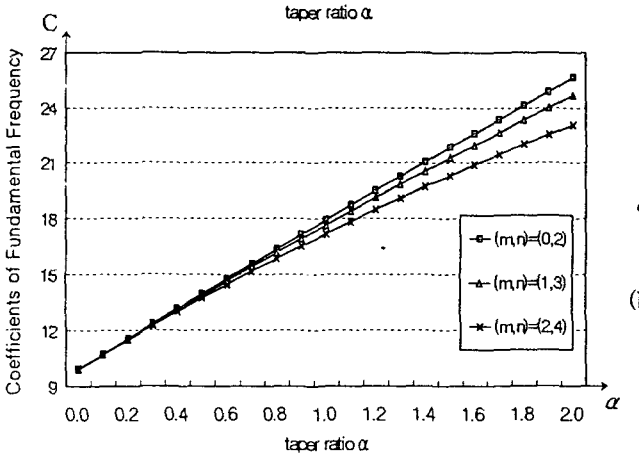
표4. 회귀상수 II

Non-symm.	(m,n)=(0,2)	A_0=9.8856	A_1=-0.0021	A_2=0.0036	r≒1.0
	(m,n)=(1,3)	B_0=6.5555	B_1=0.0197	B_2=-0.0284	
	(m,n)=(2,4)	C_0=-0.2687	C_1=0.1325	C_2=-0.0565	
Symm.	(m,n)=(0,2)	A_0=9.8922	A_1=-0.0099	A_2=0.0043	r≒1.0
	(m,n)=(1,3)	B_0=8.2362	B_1=0.0492	B_2=-0.0299	
	(m,n)=(2,4)	C_0=-0.2031	C_1=0.1505	C_2=-0.0681	



$$\omega_0 = C(\alpha)\frac{1}{L^2}\sqrt{\frac{gEI_0}{\rho A_0}}$$

(a)단순지지 비대칭 변단면 보



$$\omega_0 = C(\alpha)\frac{1}{L^2}\sqrt{\frac{gEI_0}{\rho A_0}}$$

(b)단순지지 대칭 변단면 보

그림 4. taper ratio의 변화에 따른 고유진동수 계수

5. 결 론

단순지지 변단면보에 있어서 고유진동수 산정을 위해, 본 연구에서는 유한요소법을 사용하여 단면 형태 변화에 따른 고유 진동수 값을 구하였다. 그러나 이와 같은 유한요소법이나 수치해석법의 하나인 차분법에 의한 진동수 산정은 그 과정이 복잡하여 실무에 적용하기가 곤란하다. 여기서는 유한요소법에 의한 결과를 회귀분석하여 구조물의 동적 해석 종사자들이 간단히 이용할 수 있는 이차식을 제안했다. 이상의 결과를 종합하면 다음과 같다.

1) 일반적으로 taper parameter α가 같을 때 대칭 변단면과 비대칭 변단면 부재의 체적도 같으므로, 같은 부재를 사용한다면 고유 진동수가 큰 대칭 변단면 부재를 사용함이 진동에 유리하다.
2) 단면의 변화가 없는 경우(본문에서 sectional property parameter(m,n)=(0,2)인 송전탑의 평면)일 때, 다른 성질의 단면에서보다 α의 증가에 따라 고유진동수 값이 크게 나타났다.
3) 실제로 제안된 식과 유한요소법에 의한 결과와의 상관계수는 거의 1.0에 가까웠다. 이것은 제안된 식을 이용하더라도 유한요소법에 의해 구한 진동수와 비교하여 오차가 거의 없으면서도 간단한 방법으로 변단면 부재의 고유진동수를 구할 수 있음을 보여준다.
4) taper parameter α 와 sectional property parameter n을 변수로하는 또 하나의 제안식으로 단순지지일때 단면의 성질이 변하더라도 한가지 대수식으로 부재의 고유진동수를 간단히 구할 수 있다.

참고문헌

(1) Demeter G. Fertis, *Dynamics and Vibration of Structures*, John Wiley & Sons, 1973.
(2) Daniel J. Gorman, *Free Vibration Analysis of Beams and Shafts*, John Wiley & Sons, 1975.
(3) Mario Paz, *Structural Dynamics; Theory and Application*, Van Nostrand Reinhold, 1991.
(4) W.C. Hurty and M.F. Rubinstein, *Dynamics of Structures*, Prentice Hall, 1964.
(5) Cyril M. Harris, *Shock and Vibration Handbook*, McGraw-Hill, 1961.
(6) Maurice Petyt, *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*, Cambridge University, 1990.
(7) Anil K. Chopra, *Dynamics of Structures*, Prentice Hall, 1995.
(8) M. A. De Rosa and N. M. Auciello, "Free Vibration of Taperd Beams with Flexible Ends" , *Comp -uters & Structures*, Vol. 60. No. 2, pp. 197~202, 1995.
(9) R. O. Grossi and R. B. Bhat, "A Note on Vibrating Taperd Beams" , *Journal of Sound and Vibrati -on*, No. 147, pp. 174~178, 1991.
(10) S. K. Jang and C. W. Bert, "Free Vibration of Stepped Beams; Exact and Numerical Solutions" , *J -ournal of Sound and Vibration*, No. 130, pp. 342~346, 1989.
(11) M. Gürgöze, K. Özgur and H. Erol, "On the Eigenfrequencies of a Cantilevered Beam with a Tip Mass and In-span Support" , *Computers*, Vol. 56. No. 1, pp. 85~92, 1994.
(12) 사종엽, Professor's Analysis Home Page, ch.4 회귀분석. ch.5 수치적분, 1998.