

$p$ -Version 유한요소법에 의한  
균열판의 소성역 형상과  $J$ -적분값 산정

The Values of  $J$ -integral and Shapes of Plastic Zone Near a  
Crack Tip of Cracked Panels by the  $p$ -Version of F.E.M.

홍 종 현\*      우 광 성\*\*

Hong, Chong-Hyun      Woo, Kwang-Sung

ABSTRACT

Because the linear elastic fracture analysis has been proved to be insufficient in predicting the failure of cracked bodies, in recent years, a number of fracture concepts have been studied which remain applicable in the presence of large-scale plasticity near a crack tip. This work thereby presents a new finite element model, as accurate as possible, to analyze plane problems of ductile fracture under large-scale yielding conditions. Based on the incremental theory of plasticity, the  $p$ -version finite element analysis is employed to account for the values of  $J$ -integral, the most dominant fracture parameter, and the shape of plastic zone near a crack tip by using the  $J$ -integral method and equivalent domain integral method. The numerical results by the proposed model are compared with the theoretical solutions in literatures and the numerical solutions by the  $h$ -version of F.E.M..

1. 서론

종래의 선형탄성파괴역학(Linear Elastic Fracture Mechanics; 이하 LEFM) 이론은 균열을 갖는 연성재료의 파괴거동을 규명하는데는 한계가 있다. 왜냐하면, 강재와 같은 연성재료는 균열선단부근에서 무시할 수 없는 정도의 크기로 소성역(plastic zone)이 확장되어 응력재분배(stress redistribution) 현상이 발생될 뿐만 아니라 균열의 진전양상도 초기의 날카로운 균열선단면(sharp crack)이 점차 무딘 균열선단면(blunted crack)으로 변하여 균열진전속도를 더디게 하며 종국에는 Elber[1]가 지적한 균열닫힘(crack closure)현상을 유발할 수도 있다. 따라서, 구조용강재와 같은 연성재료의 파괴거동을 규명하기 위해서는 탄소성파괴역학(Elasto Plastic Fracture Mechanics; 이하 EPFM)이론이 사용되어야 하고 LEFM과 EPFM의 궁극적 차이점은 균열 선단면에서 발생하는 소성역의 영향을 무시할 것인가 또는 고려할 것인가가 근본적인 차이점으로 지적되고 있다. 따라서, 본 연구에서는 균열선단에 발생하는 소성역의 크기와 형상이 하중수준에 따라 어떻게 변화되는지 연구하였으며 EPFM해석의 지배적인 파괴매개변수인  $J$ -적분값에 대해 연구하였다. 즉, Rice[2]에 의해 주장된  $J$ -적분값의 경로독립성(path-independence) 학설이 Sivaneri[3]의 모아레실험(Moire interferometer)에 의해  $J$ -적분값이 경로에 유관함을 주장한바 있으며 Kuang[4]의 후속 연구에서도 입증된 바 있는 경로독립성(path-dependence) 문제를 연구하였다.

\*\* 탐라대학교 공학부 토목환경공학전공 전임강사

\*\* 영남대학교 토목공학과 부교수

따라서, 본 연구에서는 앞에서 설명된 연구과제를 위해  $p$ -version 탄소성 균열모델이 제안되었으며 소성이론은 증분소성변형이론(incremental theory of plasticity)을 사용하였고 Tresca 또는 von-Mises 항복기준을 각각 사용할 수 있도록 하였다. 유동법칙으로는 결합유동법칙(associated flow rule)을 사용하고, 탄성-완전소성재료(elastic-perfectly plastic materials), 탄성-선형경화 소성재료(elastic-linear strain hardening materials), 그리고 탄성-변형경화 소성재료(elastic-strain hardening materials)를 해석할 수 있도록 일-경화재료의 정식화가 가능하도록 하였다. 비선형 방정식을 풀기 위한 알고리즘은 초기강성도법(initial stiffness method)과 접선강성도법(tangential stiffness method)을 사용하여 수렴속도와 해의 안정성 등에서 서로의 장단점을 비교하였다. 한편, EPFM해석의 지배적인 파괴매개변수인  $J$ -적분값 산정을 위해  $J$ -적분법과 동가영역적분법(Equivalent Domain Integral Method; 이하 EDI법)을 사용하였다. 또한,  $p$ -version 유한요소법은  $C^0$  계층요소를 사용하고 적분형 르장드르 형상함수(integrals of Legendre polynomials)를 사용하며,  $10 \times 10$  가우스적분법을 사용하였다. 해석예제로는 면내력을 받는 2차원 중앙균열판으로 해석결과는 Owen[5]의 8절점의 Serendipity 형의 등매개변수요소를 사용한  $h$ -version 유한요소 프로그램의 결과 및 범용 유한요소 프로그램인 ADINA의 결과, 그리고 기존 연구자들의 결과와 정확도, 신뢰성 및 효율성 측면에서 비교 검증되었다.

## 2. 소성역의 형상

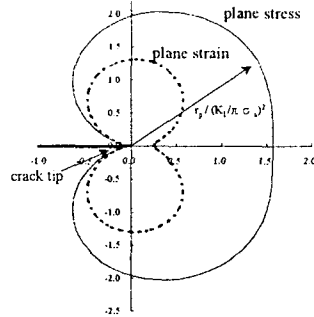
균열선단의 소성역 크기와 형상은 최초 Irwin과 Dugdale에 의해 연구되었는데 이들 두 학자에 의한 소성역 크기는 LEFM에서 사용하는 응력확대계수  $K$ 를 이용하여 도출 하였기 때문에 소규모 항복 상태 즉, 소성역의 크기가 작은 경우를 대상으로 하고 있다. 따라서, 소성역의 크기가 클 경우에는 적용하기가 부적당하다는 것을 알 수 있다. 한편, Irwin과 Dugdale이 제시한  $x$  축 상에서의 소성역의 크기 개념을 확대하여  $\theta$ 가 0이 아닌 경우에 확장하면 식(1) 그리고 식(2)와 같이 나타낼 수 있고 소성역의 형상을  $r_p / (K_I / \pi \sigma_0)^2$ 로 무차원화 시켜 도시하면 그림 1과 같다.

[ von-Mises 항복기준 적용 ]

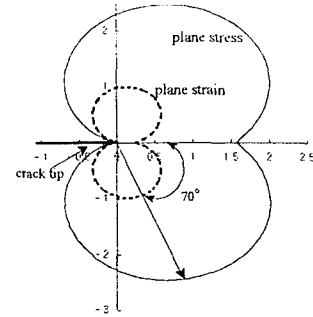
$$\begin{aligned} \text{평면변형} : r_p(\theta) &= \frac{K_I^2}{4\pi\sigma_0^2} \left[ \frac{3}{2} \sin^2\theta + (1-2\nu)^2(1+\cos\theta) \right] \\ \text{평면응력} : r_p(\theta) &= \frac{K_I^2}{4\pi\sigma_0^2} \left[ 1 + \frac{3}{2} \sin^2\theta + \cos\theta \right] \end{aligned} \quad (1)$$

[ Tresca 항복기준 적용 ]

$$\begin{aligned} \text{평면변형} : r_p(\theta) &= \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_0^2} \cos^2\frac{\theta}{2} \left[ 1 - 2\nu + \sin\frac{\theta}{2} \right]^2 \\ \text{평면응력} : r_p(\theta) &= \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_0^2} \left[ \cos\frac{\theta}{2} (1 + \sin\frac{\theta}{2}) \right]^2 \end{aligned} \quad (2)$$



(a) von-Mises 항복조건



(b) Tresca 항복조건

그림 1 항복조건에 따른 소성역의 형상

### 3. *p*-version 유한요소법

*p*-version 유한요소법을 위한 계층적 형상함수(hierarchic shape function)는 최초 Peano[6]에 의해 제안되었는데 본 연구에서 사용하는 형상함수는 Peano가 사용한 것과는 달리 르장드르다항식(Legendre polynomials)에 기초하기 때문에 강성도매트릭스가 대각선화(diagonalized)되고 반올림오차가 대폭 줄어들게 된다. 표준사각형요소(standard quadrilateral element)에서 계층적 형상함수는 편위상 3개의 그룹으로 분리되며 제 1그룹은 형상함수의 차수 *p*가 1차일 때 사각형요소의 꼭지점에서 정의되는 모서리모우드(corner mode)이다. 통상 *h*-version 유한요소법에서 이용되는 4절점 사각형요소와 동일하며 식(3)과 같다.

$$N_k = \frac{(1 + \xi\xi_k)(1 + \eta\eta_k)}{4} \quad (3)$$

여기서, 첨자 *k*는 표준사각형요소의 4개의 꼭지점을 나타낸다. 두 번째 그룹은 주변모우드(side mode)로 정의되며 형상함수의 차수 *p*가 2차 이상에서부터 사각형요소의 각 변에 생성되는 변위장을 의미한다. 즉, 차수  $p \geq 2$ 에서부터  $4(p-1)$ 개의 형상함수가 각 변에 생성된다. 주변1(side 1)에 해당하는 주변모우드는 식(4)와 같이 정의된다.

$$N_i^{(1)} = \frac{1}{2}(1-\eta)\Phi_i(\xi), \quad i = 2, \dots, p \quad (4)$$

여기서,  $\Phi_i(\xi)$ 는 식(5)와 같이 정의되는데 식(5)는 형상함수를 쉽게 유도하기 위해 르장드르다항식의 성질을 이용하여 표현하였다.

$$\Phi_i(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2(2i-1)}} (P_i(\xi) - P_{i-2}(\xi)) \quad (5)$$

한편, 식(5)의  $P_i(\xi)$ 는 르장드르 다항식을 나타낸다. 식(4)와 유사하게 주변2(side 2)와 관계된 주변모우드는 식(6)과 같이 정의되고 주변3(side 3), 그리고 주변4(side 4)도 동일한 형태로 정의된다.

$$N_i^{(1)} = \frac{1}{2}(1+\xi) \Phi_i(\xi), \quad i = 2, \dots, p \quad (6)$$

세 번째 그룹은 내부모우드(internal mode)로 정의되며 형상함수의 차수  $p$ 가 4차 이상에서부터 사각형요소의 내부에 생성되는 변위장으로 정의된다. 즉, 차수  $p \geq 4$ 에서부터  $(p-2)(p-3)/2$ 개의 내부 형상함수가 생성된다. 또는 다음과 같이 표현할 수 있는데  $p, q \geq 2$ 이면,  $(p-1)(q-1)$ 개의 내부 모우드가 생성된다. 형상함수는 식(7)과 같이 정의된다.

$$N_k^{(0)} = \Phi_i(\xi) \Phi_j(\eta), \quad i = 2, 3, \dots, p, \quad j = 2, 3, \dots, q. \quad (7)$$

여기서,  $k$ 는 번호규약지수(numbering convention index)이다.

#### 4. 프로그램구조와 흐름도

본 논문에서 제안하는 탄소성  $p$ -version 유한요소모델의 컴퓨터 연산을 위해서 수치해석 프로그램 FAPP(Fracture Analysis Program by P-version of F.E.M.)를 개발하였다. FAPP는 1개의 주프로그램과 전체 24개의 부프로그램으로 구성되어 있고 전체적인 구성은 그림 2의 순서도와 같다. 형상함수는  $p$ -level이 8차까지 사용할 수 있고, 10-point Gauss 적분을 이용할 수 있으며 2차원 탄소성 문제를 해석할 수 있다. 곡선경계를 가진 요소를 모델링하기 위해 초유한 사상(transfinite mapping)이 적용되었고 유한요소 해석과정을 거친 뒤 곧바로 해석결과[OUTPUT]를 이용하여 Rice[2]가 제안한  $J$ -적분법과 EDI-법을 이용하는 과정[JEVAL]이 이어진다. 연립방정식의 해를 구하기 위해서는 Iron에 의해 제안된 Frontal Solver[FRONT]가 사용되었다. 그러므로, 유한요소 해석과정에서 고려하는 하중의 경우의 수만큼 하중 벡터의 일부를 구하고 그에 대응하는 방정식의 일부를 조립과 동시에 풀어가는 과정이 반복 수행된다. 한편,  $p$ -version 프로그램은 Owen[5]의  $h$ -version 프로그램을 수정하였는데 프로그램 구성상 기존의  $h$ -version 프로그램과 상당한 차이가 있는 부프로그램은 점선을 이용하여 표시하였다.

#### 5. 예제 해석

##### 5.1 탄성-완전소성재료를 갖는 중앙균열판의 탄소성해석

수치해석 예제는 그림 3과 같이 인장력을 받는 중앙균열판으로 탄소성해석이 수행되었다. 해석 예제는 Owen이 해석한 모델[5]을 본 연구에서 개발된  $p$ -version 프로그램과 상용유한요소프로그램 ADINA를 이용하여 비교 검증하였다. 해석예제 평판의 폭은  $2W$ , 높이  $2H$ , 균열의 길이  $2a$ , 그리고 변장비( $H/W$ )는 2.5이다. 균열길이  $a$ 가  $0.4W$ 인 균열판의 유한요소체눈이 그림 3에 도시되었다.

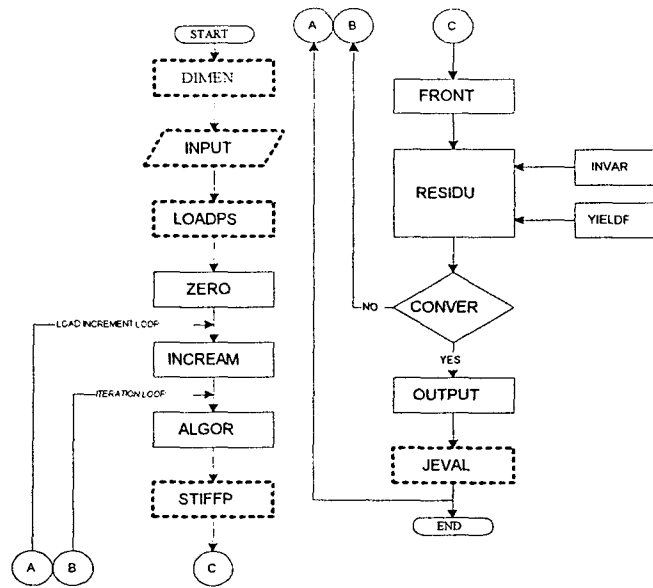
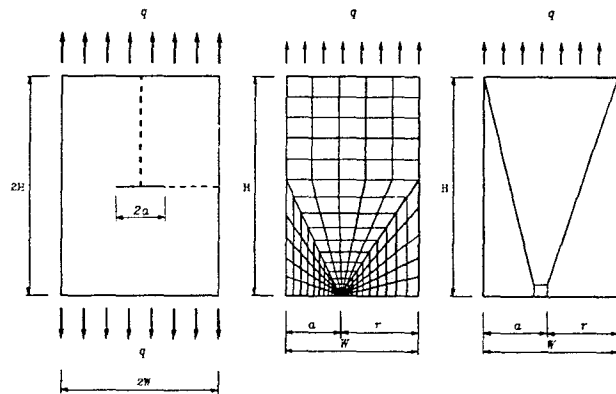


그림 2 탄소성 *p*-version 유한요소프로그램의 순서도

재료의 성질은  $E=2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ , 포아슨비  $\nu=0.3$ , 항복응력  $\sigma_0=2,400 \text{kg/cm}^2$ , 그리고 변형경화 계수  $H=0$ 인 탄성-완전소성재료이다. 인장력은  $200 \text{kg/cm}^2$ 에서부터  $1,400 \text{kg/cm}^2$ 까지 증가시켰다. 그림 4에서는 하중계수 증가에 따른 *J*-적분값을 비교하였는데 LEFM과 EPFM을 이용한 *J*-적분값 비교가 주관심 대상이 된다. EPFM을 이용한 *J*-적분값 계산의 경우 균열선단의 소성역이 증가할수록 LEFM의 결과와 상당한 차이를 보이고 있다. 따라서, 응력수준(stress level)이 높은 경우 소성역을 고려한 EPFM을 이용한 해석이 필수적이라 하겠다.



ADINA 250요소 *p*-version 4요소

그림 3 중앙균열판의 ADINA 와 *p*-version 유한요소모델

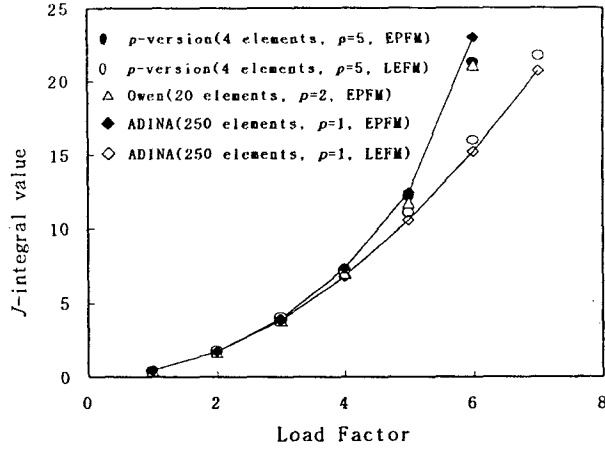
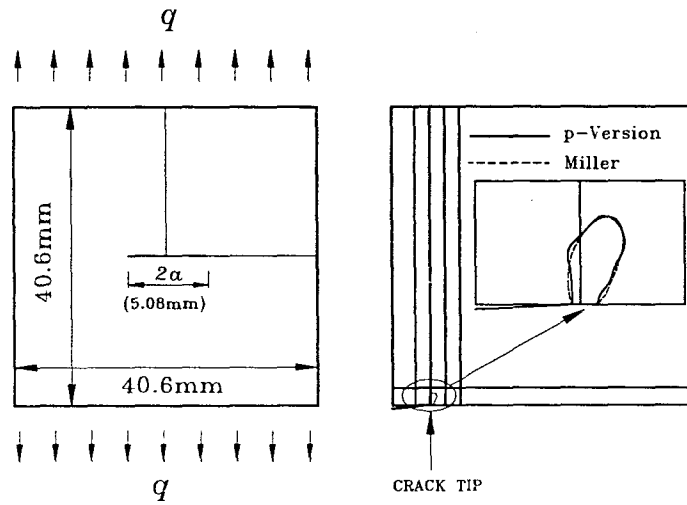


그림 4 하중계수 증가에 따른  $J$ -적분값 비교

## 5.2 탄성-선형경화 소성재료를 갖는 중앙균열판의 소성역 형상



(a) 인장력을 받는 중앙균열판 (b)  $p$ -version 유한요소모델에 의한 소성역의 형상

그림 5 탄성-선형경화 소성재료의 평면변형하에서의 소성역 형상(L.F.=5.704)

균열선단에서 소성역의 크기 및 형상을 더욱 정확히 파악하기 위해 Miller[7]가 제시한 소성역의 형상과 비교하여  $p$ -version 모델의 정확도를 입증하고자 하였다. Miller는 그림 5와 같은 기하형상을 갖는 중앙균열판을 99개의 등매개변수요소(isoparametric quadrilateral element)를 사용하여 균열선단의 소성역 형상을 추정하였는데 재료의 거동은 탄성-선형경화 소성재료를 사용하였고, 평면변형조건하에서 von-Mises 항복기준을 사용하였다. 그 밖의 재료상수는 탄성계수  $E = 206.85 \text{KN/mm}^2$ , 접선탄성계수  $E_T = 965.3 \text{N/mm}^2$ , 경화계수  $H' = 969.8 \text{N/mm}^2$ , 포아송비  $\nu = 0.3$ , 일축응력변형률곡선에서 항복응력  $\sigma_0 = 310.26 \text{N/mm}^2$ , 그리고 하중

$a = 177 \text{ N/mm}^2$  를 사용하였다.

그림 5(b)와 같이  $p$ -version 유한요소모델은 10개의 요소에 형상함수의 차수  $p$ 는 5차를 사용하였고 요소당  $10 \times 10$  가우스적분법을 이용하여 가우스 적분점에서 소성변형률이 발생되는지 여부를 확인하였다. 균열선단부위에 소성역의 형상을 정확히 파악할 수 있도록 체눈형상을 균열부위에서 조밀하게 그리고 단순하게 하였다. 본 연구를 통해 제안하는  $p$ -version 유한요소모델의 결과와 Miller가 제시한 모델의 결과가 거의 일치하는 것을 알 수 있다.

### 5.3 탄성-변형경화 소성재료를 갖는 중앙균열판의 소성역 형상

탄성-변형경화 소성재료의 균열선단부에서 소성역 형상의 정확도를 비교하기 위해 Gdoutos[8]가 제시한 중앙균열판 문제를 해석하였다. 수치해석에 사용된 재료는 그림 6과 같이 일축인장시험에서  $\sigma - \epsilon$  곡선과 같이 탄성-변형경화 소성재료를 사용했고, 상관관계는 그림 7에 도시하였다. Gdoutos는 평면변형조건하에서 von-Mises 항복조건과 증분소성변형이론에 기초한  $h$ -version 유한요소모델로 체눈설계를 구축하여 균열문제를 해석하였는데, 균열선단부에는 특이요소(singular element)를 사용하여 해석에 소요되는 시간을 줄이고자 하였다. 한편, 본 연구에서 제안하는 모델은 그림 7(b)에서 나타난 바와 같이 10개의 요소를 사용하고 형상함수의 차수  $p$ 는 5차를 사용하였는데 소성역의 형상을 정확히 도시하기 위해 앞의 예제와 같이 균열선단부위에서 요소의 배치를 조밀하게 하였고  $10 \times 10$  가우스적분법을 사용하였다. 그 밖의 제원은 Gdoutos의 중앙균열판 문제와 동일하게 설정하였다. 그림 7(b)와 같이 탄성-변형경화 소성재료의 소성역 형상은 하중증가에 관계없이 거의 일치되는 결과를 얻을 수 있었다.

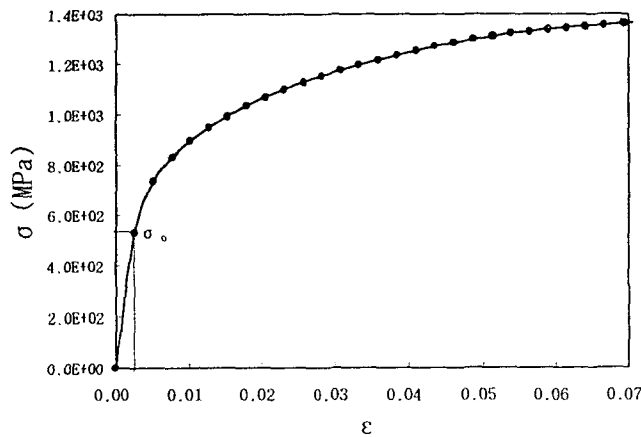
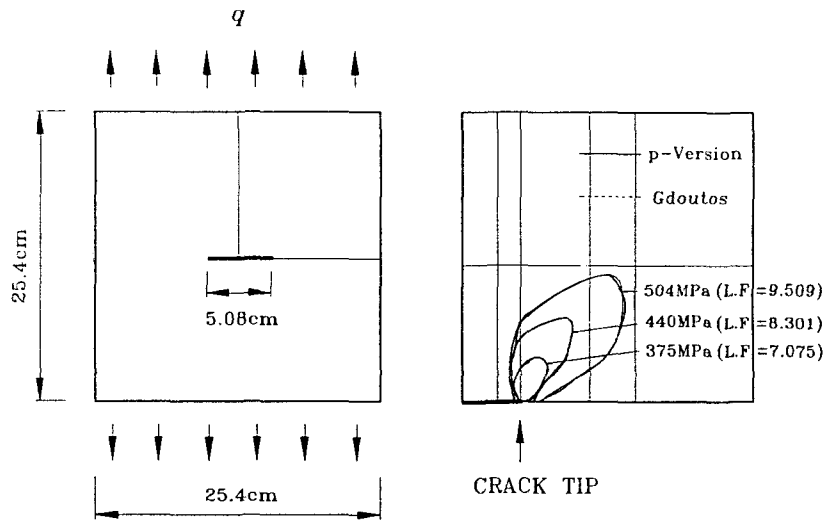


그림 6 일축인장시험에서  $\sigma - \epsilon$  곡선

## 6. 결론

본 논문을 통해 얻은 결론은 첫째, 탄소성 균열판의 경우  $J$ -값이 적분경로에 유관하다는 것을 알 수 있고 둘째, 응력재분배에 따른 소성역의 정확한 형상과 크기를 파악하였다. 셋째, 소성역이 클수록 EPFM에 의한  $J$ -값이 LEFM에 의한  $J$ -값보다 훨씬 큰 것으로 관찰 되었다.



(a) 인장력을 받는 중앙균열판 (b)  $p$ -version 유한요소모델과 소성역의 형상  
 그림 7 탄성-변형경화 소성재료의 평면변형 조건하에서 소성역 형상

## 7. 참고문헌

- [1] Elber, W., "The Significance of Fatigue Crack Closure", in *Damage Tolerance in Aircraft Structures*, ASTM STP 486, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, pp.230-242 (1971)
- [2] Rice, J. R., "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks", *ASME Appl. Mech.* Vol.35, pp.76-386 (1968)
- [3] Sivaneri, N. T., Xie, Y. P. and Kang, B. S. J., "Elastic-plastic crack-tip-field numerical analysis integrated with Moire interferometry", *Engng. Fracture Mech.*, Vol.49, pp.291-303 (1991)
- [4] Kuang, J. H. and Chen, Y. C., "The values of  $J$ -integral within the plastic zone", *An International Journal of Engineering Fracture Mechanics*, Vol.55, No.6, pp.869-881 (1996)
- [5] Owen, D. R. and Fawkes, A. J., *Engineering fracture mechanics : Numerical Methods and Applications*, Pineridge Press Ltd. Swansea, U.K. (1983)
- [6] Peano, A. G., Hierarchies of Conforming Finite Elements, *D.Sc.Dissertation*, Sever Institute of Technology, Washington University, St. Louis, (1975)
- [7] Miller, K. J. and Kfoury, A. P., "An elastic-plastic finite element analysis of crack tip fields under biaxial loading conditions", *International Journal of Fracture*, Vol.10, pp.393-404 (1974)
- [8] Gdoutos, E. E. and Papakaliatakis, G., "The effect of load biaxiality on crack growth in non-linear materials", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol.5, pp.141-156 (1986)