

## 불규칙 단면을 갖는 유공 탄성 평판의 해석에 관한 연구

### A Study on the Analysis for Perforated Plate

#### with Irregular Section

이 성 용\*    장 명 호\*\*    김 재 열\*\*\*    권 택 진\*\*\*\*  
Lee, Sung-Yong    Jang, Myung-Ho    Kim, Jae-Yeol    Kwun, Teak-Jin

#### ABSTRACT

This paper is focused on numerical analysis for perforated plate with irregular section based on Kirchhoff's fundamental equations of a circular plate. The dimensions of analysis model are as following: 1) radius:100cm, 2) hole in center:20cm, 3)thickness: 10cm and variable and have a simple support in boundary. The theoretical results are compared with data obtained by the F.E.M analysis. Both data have good agreement with each other.

#### 1. 서 론

19세기 이후 산업문명의 발달과 함께 출현된 로케트, 항공기, 자동차, 선박 및 현대 건축물에서 평판의 사용은 필수적인 것이다. 산업 문명의 급격한 발달은 구조체로서의 평판, 특히 유공평판의 사용 용도의 다양성과 전문성을 요구하고 있다.

이런 원형 유공 평판의 다양하고 전문적인 사용용도와 필요성에 의해 여러 가지 이론들이 제시되고 있다. 기존에 제안된 유공평판에 대한 여러 가지 이론들중에서 Ugural[1]은 중간에 원형 구멍이 있는 원형평판에 대하여 원형크기를 변수로하는 최대 처짐과 최대 응력을 구하는 식과 중앙에 변단면을 갖는 원형평판의 처짐 및 응력을 구하는 식을 제안하였고, 권택진[2]은 유한요소법과 이론해를 병용하여 유공판의 해석을 시도하였다. 유한요소법을 이용한 유공판의 등가 탄성정수의 결정법을 제안함과 동시에 이를 탄성정수의 값을 계산하고 다공평판의 구멍크기에 따른 등가탄성계수, 응력 집중계수등을 구하였다. 박대철[3]등은 다공평판의 단순화된 응력해석 방법을 제시하고 있다. 金在烈[4]등은 집축면을 갖는 유공평판의 구조거동을 집축압을 고려해 구하는 법을 제시하고 있다. 그러나 변단면을 갖는 유공평판에 관한 연구는 많지 않다.

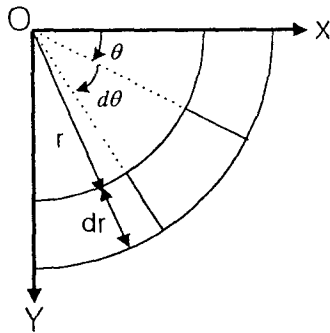
본 논문에서는 원형 평판의 중앙에 일정 크기의 구멍이 있고 중간에 두께가 다른 변단면 유공평판에 대한 구조적 거동을 Kirchhoff에 의해 제안된 원형 평판의 이론을 이용하여 변단면 유공평판의 기초방정식을 구성하여 이론해를 구하였다. 또한 Kirchhoff의 가정에 기초한 얇은 판 이론에서 유도한 절점당 5개의 자유도를 갖는 4절점 장방형 판 요소를 이용한 유한요소 해석을 수행하여 이론치와 해석치를 비교하고 타당성을 검토하였다.

- \* 성균관대학교 건축공학과 석사과정
- \*\* 정희원, 성균관대학교 건축공학과 박사과정
- \*\*\* 정희원, 성균관대학교 과학기술연구소 특별연구원, 공학박사
- \*\*\*\* 정희원, 성균관대학교 건축공학과 교수, 공학박사

## 2. 기초 방정식의 유도

### 2.1. 좌표계 변환

극좌표계내에서 하중을 받는 원형 평판의 기초 방정식을 유도하기 위해서는 우선 직각 좌표계에서 극좌표계로의 좌표 변환이 필요하다. 극좌표계  $(\theta, \gamma)$  와 직각 좌표계  $(x, y)$ 의 관계식은 그림 1을 참고하여 다음과 같이 정의된다.



$$\begin{aligned} x &= \gamma \cos \theta & \gamma^2 &= x^2 + y^2 \\ y &= \gamma \sin \theta & \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

그림 1 직교좌표계와 극좌표계

### 2.2. 원형 평판의 기초 방정식

Kirchhoff 이론에 기초한 원형 평판의 기초 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla^4 w = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{p}{D} \quad (2)$$

$$M_r = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (3)$$

$$M_\theta = -D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \quad (4)$$

$$M_{r\theta} = -(1-\nu)D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (5)$$

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) \quad (6)$$

$$Q_\theta = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 w) \quad (7)$$

다만,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (8)$$

### 3. 해석모델

해석모델은 그림 2에 나타내었다. 중앙에 반경 20 cm의 원공을 지닌 반경 100 cm 원판이다. 변단면의 두께와 폭을 변수로 처리하였다. 하중은 등분포 하중  $1 \text{ kg/cm}^2$ 가 작용하는 것으로 하였다.

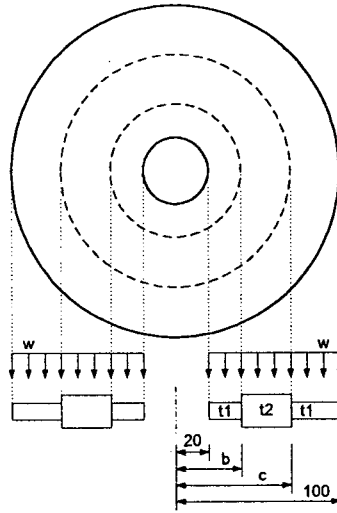


그림 2 해석모델

### 4. 이론해석

#### 4.1. 기초방정식

해석모델을 이론적으로 풀기 위해 우선 각 부분의 기초방정식과 이들을 풀기 위한 경계조건을 도입하였다. 기초방정식을 표현함에 있어 무차원량(無次元量)  $\rho = r/a$  ( $0 \leq \rho \leq 1$ )을 도입하면 아래 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_r = -\frac{D}{a^2} \left( \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) \quad (9)$$

$$Q_r = -\frac{D}{a^3} \left( \frac{d^3 w}{d\rho^3} - \frac{1}{\rho^2} \frac{dw}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2 w}{d\rho^2} \right) \quad (10)$$

$$w_1 = \frac{p_0 a^4}{64D} \rho^4 + A_1 \ln \rho + A_2 \rho^2 \ln \rho + A_3 \rho^2 + A_4 \quad (\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2) \quad (11)$$

$$w_2 = \frac{p_0 a^4}{64D} \rho^4 + B_1 \ln \rho + B_2 \rho^2 \ln \rho + B_3 \rho^2 + B_4 \quad (\rho_2 \leq \rho \leq \rho_3) \quad (12)$$

$$w_3 = \frac{p_0 a^4}{64D} \rho^4 + C_1 \ln \rho + C_2 \rho^2 \ln \rho + C_3 \rho^2 + C_4 \quad (\rho_3 \leq \rho \leq 1) \quad (13)$$

#### 4.2. 경계조건

12개의 미정계수를 구하기 위한 경계조건은 다음과 같다.

$$\rho = \rho_1 : \quad M_r(\rho_1) = 0, Q_r(\rho_1) = 0 \quad (14)$$

$$\rho = \rho_2 : \quad \begin{aligned} w_1(\rho_1) &= w_2(\rho_2), M_r(\rho_1) = M_r(\rho_2), \\ w_1'(\rho_1) &= w_2'(\rho_2), Q_r(\rho_1) = Q_r(\rho_2) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\rho = \rho_3 : \quad \begin{aligned} w_1(\rho_2) &= w_2(\rho_3), M_r(\rho_2) = M_r(\rho_3), \\ w_1'(\rho_2) &= w_2'(\rho_3), Q_r(\rho_2) = Q_r(\rho_3) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\rho = \rho_4 : \quad M_r(\rho_4) = 0, w(\rho_4) = 0 \quad (17)$$

#### 4.3. 해석법

먼저 식(11)~식(13)으로부터 12개의 미정계수( $A_1 \sim C_4$ )를 풀기 위해, 12개의 경계조건식(식(13)~식(16)을 도입한다. 도입된 경계조건으로부터 연립하여 미정계수를 구한다. 이때  $12 \times 12$  매트릭스를 푸는 문제가 된다. 구해진 미정계수를 식(9)~식(13)에 대입하여 처짐, 모멘트, 전단력등을 구한다.

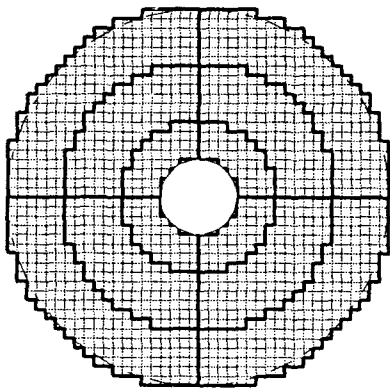


그림 3 해석모델

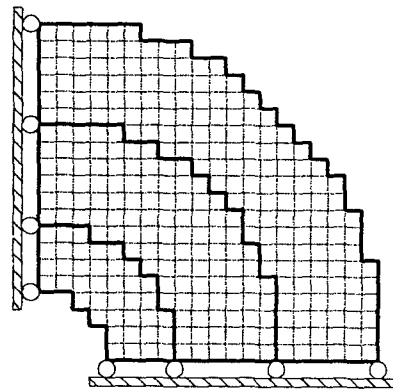


그림 4 요소분할과 경계조건

## 5. 유한요소해석

이론 해법의 타당성을 검토하기 위해 유한 요소 해석을 수행하였다. 절점당 5개의 자유도를 가지는 사각형 요소를 이용하였다. 해석은 전체 해석 모델의 1/4만 수행하였다. 그림3에서 전체 모델에서 F.E.M 해석 모델의 영역을 나타내었다. 경계조건과 요소분할은 그림4과 같이 하였다. 경계조건은 모델의 단부는 단순지지, 내부의 원형구멍부분은 자유 그리고 모델의 연속부분은 대칭조건을 고려하여 X,Y방향은 고정단으로 처리하였고 Z방향과 각 방향의 모멘트는 자유단으로 하였다.

## 6. 결과 및 고찰

두께비에 따른 처짐을 비교해 보면, 유한 요소 해석을 통하여 얻은 결과와 이론식으로 구한 해가  $\rho$ 가 '1'에 접근할수록 어느 정도 일치함을 보여주고 있다. 이는 사각형 판 요소를 채택한 것과 분할방법에서 발생하는 오차 때문이라고 사료된다. 그 결과는 표 1과 그림 5에 나타내었다.

두께비에 따른 변위와 처짐의 결과는 그림 6와 그림 7에 나타내었다. 변위는 두께비가 클수록 작게 나타났고, 최대 모멘트 또한 두께비가 큰 경우가 크게 나타났다.

모멘트  $M_r$ 을 살펴보면 두께가 변하는 지점에서 변이점이 발생하는 것을 발견할 수 있다. 또한 두께비가 클수록 곡선의 기울기가 급격해짐을 알 수 있다. 이는 두께의 변화에 의한 강성의 증가로 발생한다고 볼 수 있다. 그리고 그림 8처럼 두께비가 일정하고 두꺼운 요소의 폭도 일정하다고 할 때, 그 위치의 변화에 따른 변위와 모멘트를 살펴보면 그림 9와 같다. 위치가 중심에서 멀어질수록 변위는 증가하나, 모멘트의 기울기는 안정적으로 변화하는 것을 알 수 있다.

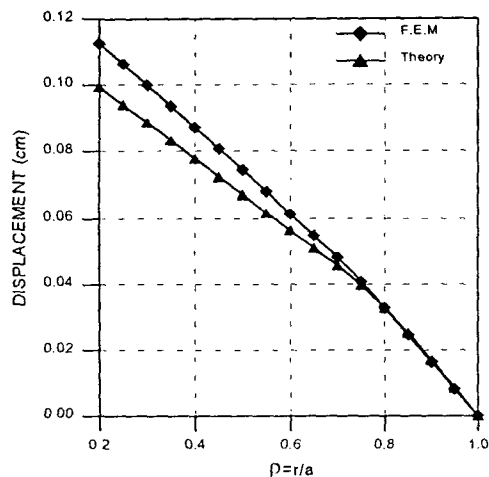


그림 5 이론식과 F.E.M 해석의 변위 비교

표1 최대처짐 비교

두께비	F.E.M	이론해	오차(%)
1.5	0.1256	0.17201	0.73
2.0	0.1125	0.09926	1.13

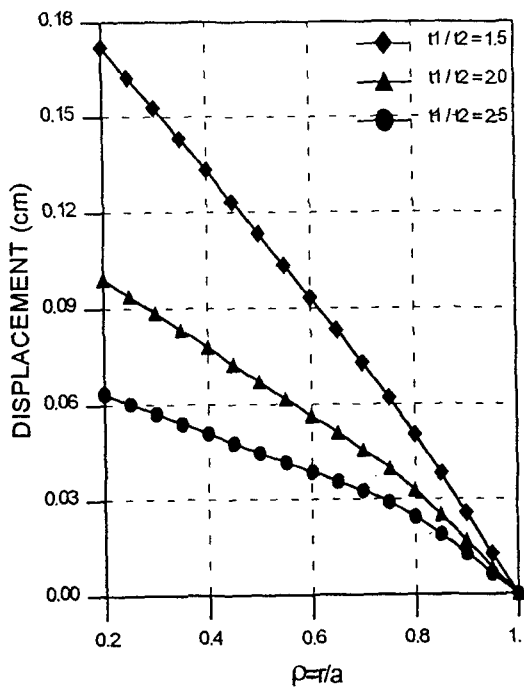


그림 6 두께비에 따른 처짐

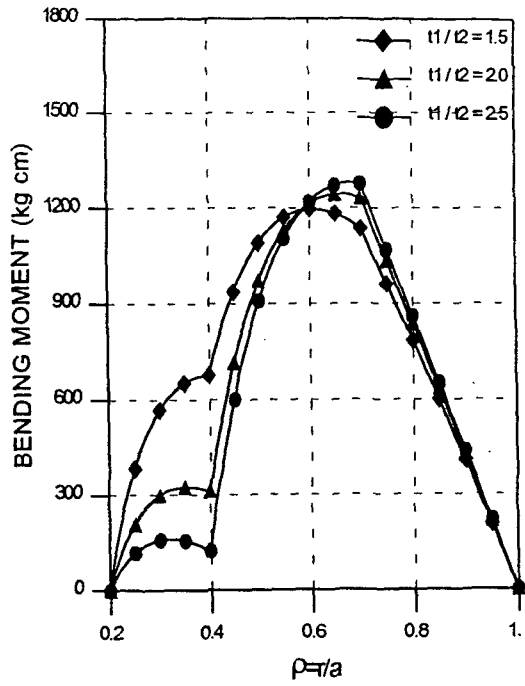
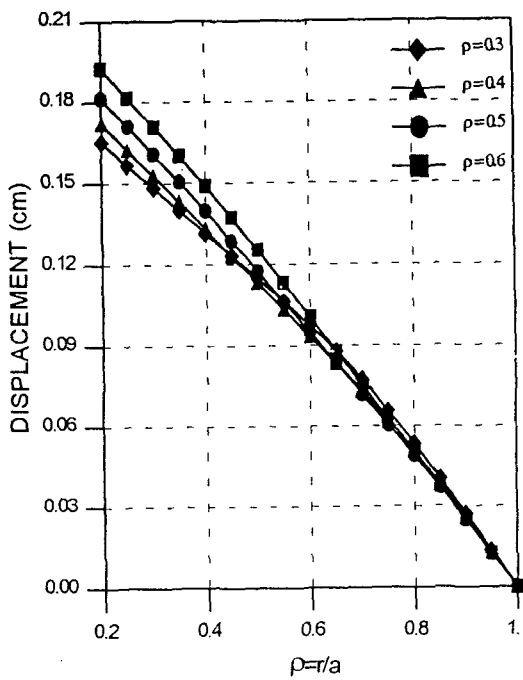
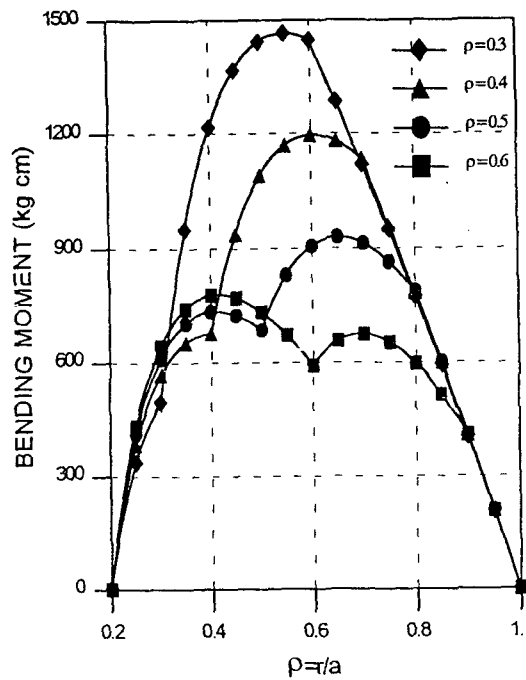


그림 7 두께비에 따른 휨모멘트



(a) 변위



(b) 모멘트

그림 9 변단면의 위치에 따른 변위와 모멘트

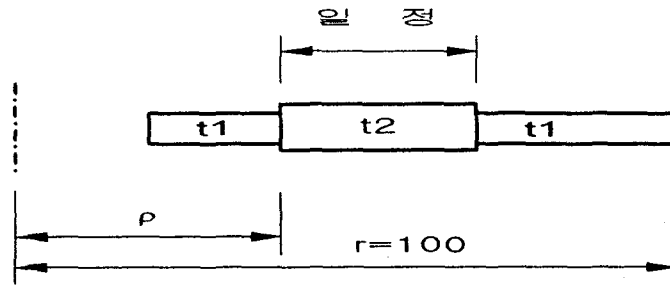


그림 8. 변단면을 갖는 유공평판

## 7. 결론

본 논문에서는 변단면을 갖는 유공평판의 이론해법을 제시하였다. 변단면이 있는 유공판은 강성이 증가되는 부분에서 모멘트가 집중하는 현상을 보여 주었고, 위치가 중심에서 원주방향으로 이동할수록 안정되는 것을 볼 수 있다. 또한 이론식의 결과와 비교하기 위해 수행한 유한요소해석결과와 비교해 보았을 때 비교적 잘 일치하고 있다. 보다 정확한 결과 및 비교를 위해서는 삼각 요소의 도입과 더욱 세분화된 요소분할이 요구된다. 또한 본 논문에서 사용된 유한요소해석 프로그램은 이번에 사용된 모델과 같은 일부분 변단면뿐만 아니라 아닌 모델의 전체부분이 불특정한 단면을 갖는 경우에도 해석이 가능하였다. 본 논문은 채택한 평판의 유공 부분의 응력 집중 현상 및 변단면이 되는 부분의 구조거동을 알아보기 위한 기초 연구로써 이용될 수 있다.

## 참고 문헌

1. Ugral, A. C. , *Stresses in Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Co. , p.27~58 (1980)
2. 권택진, 유공판의 해석, 대한건축학회 30주년 기념 논문집, p.155~170, 1975. 9.
3. 박태철, 김범식, "다공평판의 단순화된 응력해석방법", 전산구조공학, 제7권 제 2호. 1994. 6. p.121~129
4. 金 在烈, 半谷裕彦, 眞柄榮哉, "積層圓板の接觸壓と變形舉動", 日本建築學會學術講演梗概集, pp.1305~1306, 1994. 9
5. Kim, J. Y. , Ahn , S. K. and Kwun, T. J., " An Calculation Method for Contact Pressure on Layered Circular Plate," Fifth Pacific Structural Steel Conference, pp.129~133, 1998. 10
6. Timosenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Co., p.51~72 .(1959)
7. 半谷裕彦, 平板の基礎理論, 彰國社.(1995), 第5章
8. Weaver, William and Johnston, Paul R. , *Finite Elements for Structural Analysis*, Prentice-Hall, Inc. p.1~179, (1984)
9. Hughes T.J.R ,Cohn, M., and Haroun,M., "Reduced and selsective integration technics in finite element analysis of plates ", Nuc. Eng. Des., Vol.46,pp.203~222,(1978)

10. Hinton, E. and Owen, D.R.J. , *Finite Element Software for Plates and Shell*, Pineridge Press, Swansea UK. p.172~208 , (1984)
11. Mindlin,R.D, "*Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates.*", *J. Appl. Mech.*, Vol.18, pp31~38,(1951).
12. 양창현,김일근, 원공에 접근하는 균열이 있는 판의 환경요소해석, 대한토목공학학회논문집, 제7권 제1호, p.103~110, 1987.3
13. 최창근,김선훈, 평판 구조물 해석을 위한 개선된 유한요소모델의 개발, 대한토목공학학회논문, 제7권 제4호, p.83~90, 1987.12
14. 우광성,이채규,윤영필, 원공을 갖는 유한판의 응력집중에 관한 P-Version 모델, 대한토목공학학회논문, 제12권 제4-1호, p.1~8, 1992.12
15. 신영식,신현목,김명철, 고차 판 사각형 유한요소, 대한토목공학학회논문, 제8권 제2호,p.25~32 1988
16. 신영식, 고차판 유한요소의 기하학적 비선형해석, 대한토목공학학회논문, 제8권 제3호, p.1~9, 1988.9