

전기 기계 구동 시스템에 대한 H ∞ 최적 제어기 구성

김 용 규*, 유 창 근**

* : 한국철도기술연구원 고속전철시스템개발팀, ygkim1@krri.re.kr

** : 남서울대학교 전자공학과, ckryu@www.nsu.ac.kr

H ∞ Optimal Controller Synthesis for an electromechanical actuator system

Yong-Kyu Kim*, and Chang-Keun Ryu**

* : Korea Railroad Research Institute, ygkim1@krri.re.kr

** : NAMSEOUL University ckryu@www.nsu.ac.kr

Abstract : In this paper, we design the H ∞ optimal controller satisfying robust stability and performance in spite of the plant uncertainty for an electro-mechanical actuator system and analyze the controller in frequency domain. H ∞ optimal controller K was designed using iteration algorithm suggested by DOYLE. Using the controller in an electro-mechanical actuator system, the joint with very small coupling rigidity coefficient was used to vary the control parameter. The plant unstructured uncertainty was assumed to be a multiplicative type.

I. 서론

H ∞ 제어는 플랜트 불확실성이 존재하는 시스템의 안정화와 견실성 및 외란 제거 등을 얻기 위한 견실 제어 설계 기법으로, Glover와 Doyle은 제어기 설계시 수반되는 수학적, 기술적 어려움을 최소화한 단순하고 사용하기 쉬운 해석적 설계 방법을 제안하였다[1]. H ∞ 최적 제어의 실현은 가중함수를 포함하는 표준 페루프 회로를 구성한 다음 $\|T_{ZU1}\|_{\infty} < \gamma$ 의 관계를 만족하는 γ 의 최적값을 구하는 것이다[2]. 전기 기계 구동기 시스템은 수학적 표현에 따른 모델링 오차를 가지며, 다양한 외란 및 선형과 비선형 요소의 혼합 등으로 인해 정확한 제어기 설계가 어렵다.

본 논문에서는 전기 기계 구동기가 불확실성 변화에 관계없이 어떠한 동작점에서도 원하는 견실성과 성능을 실행할 수 있는 H ∞ 최적 제어기를 설계하고 이를 주파수 영역에서 해석한다. 여기서 사용된 전기 기계 구동기 시스템은 모터와 부하 사이에 결합 강성률 계수가 매우 작은 이음매를 사용하는데 이는 플랜트의 비구조적 불확실성에 따라 제어 시스템의 파라미터를 변화시키기 위한 것이며[3], 이에 따른 제어 대상 시스템의 성능은 주어진 비구조적 불확실성의 영향에 의해

변화되는 것으로 간주된다. 한편 감도 함수 S와 상보 감도 함수 T에 제한을 가져오는 안정된 가중 함수는 비구조적 불확실성의 형태가 곱셈형(multiplicative)이라는 가정하에 주어진다.

II. H ∞ 최적 제어

일반적으로 가중함수를 갖는 페루프 시스템은 그림 1로 주어지며, ref는 외부 입력, K는 제어기, G는 플랜트, 그리고 W $_1$ 과 W $_2$ 는 각각 감도 함수 및 상보 감도 함수에 대응하는 가중 함수를 나타낸다.

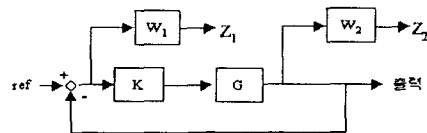


그림 1. 가중함수를 갖는 페루프 시스템

Fig. 1. closed loop system with weighting function.

그림 1에서 개루프 전달함수 L, 감도함수 S, 상보감도함수 T 사이에는 식(1)의 관계가 성립한다.

$$S + T = I, L = GK, S = \frac{1}{1 + GK}, T = \frac{GK}{1 + GK} \quad (1)$$

H ∞ 제어를 사용하는 시스템의 전달함수 T $_{ZU1}$ 은 식(2)로 주어진다[1].

$$T_{ZU1} = \begin{bmatrix} W_1 & T_{Z1/ref} \\ W_2 & T_{Z2/ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 [1 + GK]^{-1} \\ W_2 GK [1 + GK]^{-1} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -W_1 G \\ W_2 G \end{bmatrix} K [1 + GK]^{-1} \quad (2)$$

식(2)에서 T $_{Z1/ref}$ 과 T $_{Z2/ref}$ 는 각각 Z $_1$ 과 ref 사이의 전달함수, Z $_2$ 와 ref 사이의 전달함수를 나타낸다. 전달함수 T $_{ZU1}$ 은 페루프 시스템의 공칭 특성과 플랜트의 비구조적 불확실성에 따라 변형되며, 이는 견실 안정도 해석의 기본이 된다. 플랜트의 비구조적 불확실성이 곱셈

형으로 주어질 경우 식(2)의 최소화는 “혼합 감도 문제”이며[3], 함수 S와 T를 동시에 최적화할 수 있다. 또한 식(2)에서 $T_{Z1/ref}$ 가 작을 경우, 안정된 전실 안정도를 갖게 되며, 안정된 공칭 성능은 $T_{Z2/ref}$ 가 작을 경우 구할 수 있다. 그러나 $T_{Z1/ref}$ 과 $T_{Z2/ref}$ 은 동시에 작게 할 수 없기 때문에 그림 2를 이용하여 근사적으로 해결한다.

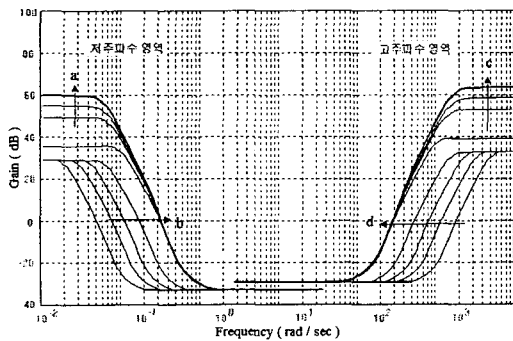


그림 2. 가중 함수의 변화
Fig. 2. Variation of weighting function.

그림2에서 감도 함수 S에 대한 가중함수 W_1 을 a 방향으로 선택하면 정적 오차(static error)와 대역폭 내에서 주어지는 맥동 오차를 감소시킬 수 있으며, b 방향으로 선택하면 응답시간을 감소시킬 수 있다. 또한 상보 감도 함수 T에 대한 가중함수 W_2 를 c 방향으로 선택하면 설계자에 의해 주어진 사양에 최적화 되도록 할 수 있으며, d 방향으로 선택하면 좁은 대역폭을 갖는 고역 주파수 신호 처리에 사용한다. 또한 가중함수 W_1 과 W_2 는 각각 $W_1 < S^{-1}$, $W_2 < T^{-1}$ 의 관계를 만족하여야 한다. 이렇게 가중 함수가 결정될 경우, 가중함수와 플랜트에 따른 상태 방정식은 아래와 같이 주어진다[4].

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + B_1 U_1 + B_2 U_2 \\ Z = C_1 X + D_{11} U_1 + D_{12} U_2 \\ y = C_2 X + D_{21} U_1 + D_{22} U_2 \end{cases} \quad (3)$$

그 결과 Hamiltonian 행렬과 리카티 대수 방정식의 관계를 이용하여 원하는 리카티 대수 방정식을 유도하면 아래와 같다[5].

$$\begin{aligned} X_{\infty}(A - BR_{\infty}^{-1} D_{10}^T C_1) + (A - BR_{\infty}^{-1} D_{10}^T C_1)^T X_{\infty} \\ - X_{\infty} B R_{\infty}^{-1} B^T X_{\infty} + C_1^T (I - D_{10} R_{\infty}^{-1} D_{10}^T) C_1 &= 0 \\ Y_{\infty}(A - B_1 D_{01}^T R_{\infty}^{-1} C)^T + (A - B_1 R_{\infty}^{-1} D_{01}^T C)^T Y_{\infty} \\ - Y_{\infty} C^T R_{\infty}^{-1} C Y_{\infty} + B_1 (I - D_{01}^T R_{\infty}^{-1} D_{01}) B_1^T &= 0 \\ D_{10} &= [D_{11} \ D_{12}], \quad D_{01} = [D_{01}^T \ D_{02}^T]^T \\ B &= [B_1 \ B_2], \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \\ R_{X_{\infty}} &= D_{10}^T D_{10} - \begin{bmatrix} \gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_{Y_{\infty}} = D_{01} D_{01}^T - \begin{bmatrix} \gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

식(4)의 해가 $X_{\infty} = (X_{\infty})^T$, $Y_{\infty} = (Y_{\infty})^T$, $X_{\infty} \geq 0$, $Y_{\infty} \geq 0$, $\rho(X_{\infty} Y_{\infty} < \gamma^2)$ 의 관계를 만족할 경우 제어기가 존재하며, 매개 변수 γ 의 한계값은 $\rho(X_{\infty} Y_{\infty}) = \gamma^2$ 로 주어진다[5].

III. 전기 기계 구동기 시스템

본 논문에서 사용된 전기 기계 구동기 시스템은 프랑스 INPL-CRAN에서 manipulator의 축 제어 관련 문제점을 분석하고 이를 해결하기 위해 구성되었다[3]. 이 시스템은 부하 관성, 모터와 부하 연결기의 탄성을 변화시킬 수 있으며, 제어 시스템에 대한 기본 구성도는 그림 3과 같다.

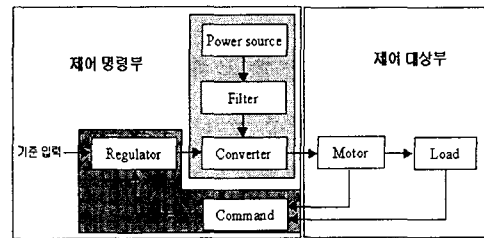


그림 3. 기본 구성도
Fig. 3. Basic structure.

그림3에서 제어 명령부는 직류, 또는 교류 전압을 공급하는 구동 에너지부와 시스템을 제어하는 제어부로 구성된다. 따라서 전원 공급원은 전류 및 속도 제어, 타코미터로부터 케환된 신호에 따라 전원공급원을 감시하여 모터를 보호하고, 제어부는 제어를 통해 모터에 제어 신호를 인가하고, 이 신호의 A/D 또는 D/A 변환을 한다. 제어 대상부인 전기기계 구동기 시스템은 자체에서 발생하는 다양한 외란이 존재하고, 선형과 비선형 요소가 혼합되어 있다. 본 논문에서 사용된 전기 기계 구동기 시스템은 그림 4로 주어진다.

사용된 전기 기계 구동기의 주요 설계 사양은 피드백 제어시 부하에 인가된 속도 Ω_c 와 외부의 기준 속도 사이의 오차를 최소화하는 것으로 이에 대한 전실성 및 성능 사양은 먼저 대역 폭은 빠른 상승 시간과 견실한 외란 제거를 위해 ω_1 보다 높은 주파수 영역에 있어야 한다. 이때 ω_1 은 저역 주파수 영역에서 전실 성능을 만족하기 위해 $10 < \omega_1 < 50$ rad/sec 범위에 존재해야 한다. 또한 부하에 인가된 속도 Ω_c 가 외부에서 주어진 기준 속도를 근사적으로 추적하기 위해 ω_1 이하에서의 개루프 이득 감소는 -20 dB/dec 이상이어야 한다. 한편 감도 함수는 가능하면 최소화해야 하며, 전실성을 얻기 위해 ω_2 이상의 주파수 영역에서 개루프 이득 감소는 -40 dB/dec 이상이어야 한다. 여기서 ω_2

는 고역 주파수대에 있어서 견실성을 만족하기 위해 $\omega_1 < \omega_2 < 1000$ rad/sec 범위에 존재해야 한다.

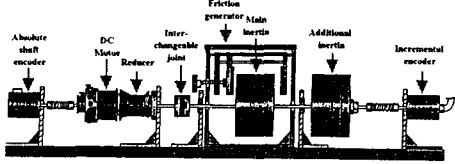


그림 4. 전기 기계 시스템
Fig. 4. Electromechanical Actuator system.

모터축의 속도 제어와 불완전한 모델링에 의해 발생하는 비선형성 및 파라미터 값의 불확실성에 대해 적절한 성능을 보장하는 제어기를 설계하기 위해 시스템 선형 모델을 이용한다. 그림 5는 본 논문에 사용된 시스템에 대한 모델링으로 J_m 과 J_c 는 각각 모터축 관성, 부하 축 관성을 나타내며, 이 시스템에 관련된 상태 변수는 모터축 속도 Ω_m , 부하축 속도 Ω_c , 탄성 토오크 $\Delta\theta$ 값으로 주어진다. 또한 모터 및 부하의 점착 마찰 계수는 각각 F_m 과 F_c 로, 모터의 토오크 상수 및 커플링 강성 계수(coupling rigidity)는 K_a 와 K_t 로 표시한다. 한편 감속비는 N 으로 주어지며, 대부분의 외란과 비선형성은 NL1 (Backlash)과 NL2 (Coulomb friction) 및 모터축과 부하축 사이의 점착 커플링에 의해 주로 영향을 받는다.

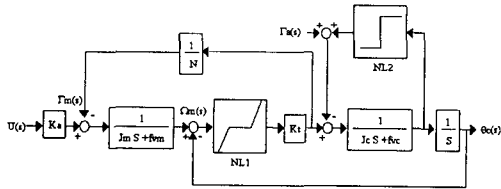


그림 5. 전기 기계 시스템 모델링
Fig. 5. Modeling of the Electromechanical Actuator.

그림 5에서 상태 변수 Ω_m , Ω_c , $\Delta\theta$ 에 따른 상태 방정식은 다음과 같이 주어지며, A, B, C의 공칭 상태를 A_0 , B_0 , C_0 라고 하면 상태 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + B_{10}U + B_{20}d \\ Y = CX \end{cases} \quad (5)$$

$$A = \begin{bmatrix} -f_{vm}/J_m & -K_tNL1/J_mN & 0 \\ 1/N & 0 & -1 \\ 0 & K_tNL1/J_c & -f_{vc}/J_c \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} K_a/J_m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/J_m \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} \Omega_m \\ \Delta\theta \\ \Omega_c \end{bmatrix}$$

$$d = \Gamma_{ext} + F_{sec}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -13.33 & -7854.2 & 0 \\ 0.05 & 0 & -1 \\ 0 & 456.97 & 0 \end{bmatrix}, B_{10} = \begin{bmatrix} 650 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_{20} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -12.12 \end{bmatrix}$$

IV. H ∞ 최적 제어기 설계

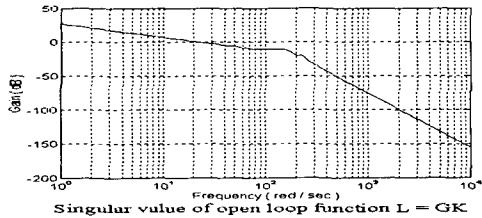
주어진 전기 기계 구동기에 적절한 가중 함수 W_1 과 W_2 는 식(6)과 같이 주어진다. 여기서 이들 가중 함수는 항상 고정된 함수가 아니며 주어진 견실성과 성능 사양과 제어 대상 시스템에 따라 변화될 수 있다. 또한 α 는 H ∞ 최적 제어시 매개 변수 γ 의 최적값 계산에 따른 가중 함수의 이득 변화를 위해 추가된 계수로 정의된다.

$$W_1 = \alpha \left(\frac{s+26}{s} \right), W_2 = \alpha \left(\frac{1000}{26} \right) \left(\frac{s+26}{s+1000} \right) \quad (6)$$

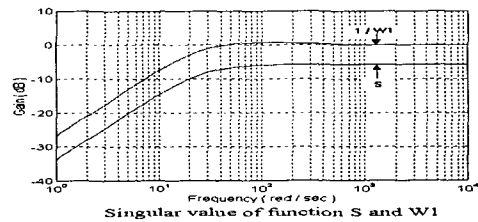
가중 함수가 선택된 후 이를 이용하여 가중함수를 포함하는 페루프 시스템을 구성한 다음 매우 큰 γ 값을 선택한다. 선택된 γ 값에 따라 Hamiltonian 행렬에 관련된 식(4)을 구성한다, 이때 행렬에 따른 가정 및 제약 조건은 Doyle에 의해 주어진 사항을 그대로 이용한다[1]. 그 결과 리카티 방정식의 해 X_∞ , Y_∞ 가 $X_\infty = (X_\infty)^T$, $Y_\infty = (Y_\infty)^T$, $X_\infty \geq 0$, $Y_\infty \geq 0$, $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$ 의 관계를 만족할 경우, Glover와 Doyle에 의해 주어진 알고리즘을 이용하여 제어기 K를 계산한다. K에 따라 시스템의 함수 S와 T의 교차 주파수가 가중함수 W_1 과 W_2 의 교차 주파수와 일치하는지 검사한다. 만약 교차 주파수가 일치하지 않는 경우, γ 값을 지속적으로 감소하면서 근접한 값을 구할 때까지 반복 실행한다. 본 논문에서 사용된 전기 기계 구동 시스템의 경우, γ 값이 "5"보다 작을 경우 두 개의 교차 주파수가 거의 일치하며, γ 값을 더 감소하여도 교차 주파수는 큰 변화가 없었다. 또한 γ 값이 "1"보다 작을 경우 주어진 리카티 대수 방정식이 K의 존재 조건을 만족하지 못한다. 따라서 두 개의 교차 주파수가 변화하지 않는 한계값($\gamma=5$)을 γ_{opt} 이라 하고 α 최대값을 구하면 $\alpha_{max}=5.84$ 이며 이에 따른 주파수 응답을 측정한 결과 그림 6과 같다. 그림 6에서 개루프 전달 함수는 낮은 주파수 영역에서 -20dB/dec 이상을, 높은 주파수 영역에서는 -40dB/dec 이상을 만족함으로 원하는 견실성 및 성능 사양을 만족함을 확인할 수 있다. 또한 감도 함수 및 상보 감도 함수의 보데(Bode) 선도는 각각 W_1 과 W_2 의 역함수에 대한 보데 선도를 초과하지 않는다. 이는 전기 기계 구동기의 H ∞ 최적 제어기가 견실 제어의 개념에서 요구되는 견실성 및 성능 사양을 잘 만족함을 의미한다.

시뮬레이션을 통해 얻은 공칭 상태 및 50% 부하 관성 증가에 대한 모터축 속도, 부하축 속도 및 제어 명령에 대한 시간 응답은 그림 7과 같으며, 플랜트의 불확실성 요소를 감안할 경우 기준 속도에 대한 부하

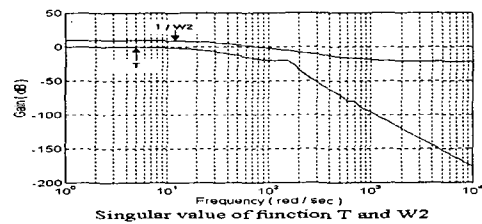
속도의 변화는 매우 미약함을 알 수 있다.



a) 개루프 전달 함수 특이치



b) 감도 함수 S와 가중 함수 W1의 특이치



c) 상보 감도 함수 T와 가중 함수 W2의 특이치

그림 6. 주파수 응답

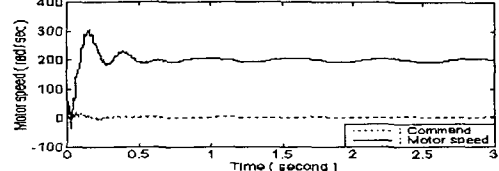
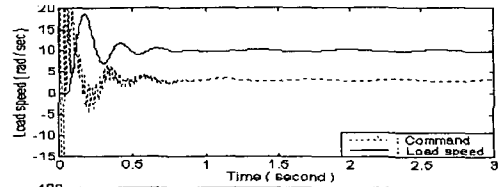
Fig. 6. Frequency response.

V. 결론

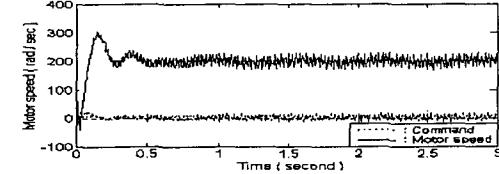
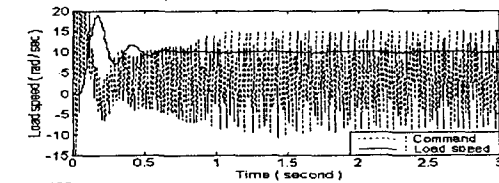
본 논문에서는 플랜트의 비구조적 불확실성이 곱셈형이라는 가정하에 전기 기계 구동기의 견실성과 성능 사양을 만족하는 H_∞ 최적 제어를 설계하였다. 여기서 제어 파라미터를 변화시키기 위해 결합 강성률 계수가 매우 작은 이음매를 사용하였다. 설계된 H_∞ 최적 제어를 제어 대상 시스템에 적용하여 주파수 영역에서 해석한 결과 원하는 견실성과 성능 사양을 만족하였다. 또한 시간영역에 대한 시뮬레이션 결과 역시 만족된 특성을 얻었다.

참고문헌

[1] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonker, and B. A. Francis, "State - space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC 34, no. 8, pp.831 - 847, August, 1989.



a) 공칭 상태에서의 시간 응답



b) 50% 관성 증가시의 시간 응답

그림 7. 시간 응답

Fig. 7. Time response.

[2] J. M. Maciejowski, *Multivariable feedback design*, Addison-wesley, Reading, Massachusetts, p 425, 1989.

[3] O. Malasse, H. Razik, S. Machmoun, C. Iung, "Control of an electromechanical drive using V.S.S.C with dubious parameters", *preprints, 2nd IFAC Workshop on system structure and Control*, Prague, Tchecho, pp 384-387, 1992.

[4] H. Kwakernaak, "Robust control and H_∞ optimization", *Automatica*, vol 29, pp. 255 - 273, 1993.

[5] K. Glover and J. C. Doyle, "State-space formulae for all stabilising controllers that satisfy an H_∞ -norm bound and relations to risk sensitivity," *Systems & control letters*, vol. 11, pp. 167 - 171, 1988.