싱글톤 퍼지 제어 시스템의 새로운 안정도 해석법

A New Approach to Stability Analysis of Singleton-type Fuzzy Control Systems

김은태, 이희진, 이상형*, 박민용*

국립한경대학교 제어계측공학과
연세대학교 전자공학과*

Abstract

In recent years, many studies have been conducted on fuzzy control since it can surpass the conventional control in several respects. In this paper, numerical stability analysis methodology for the singleton-type linguistic fuzzy control systems is proposed. The proposed stability analysis is not the analytical method but the numerical method using the convex optimization technique of Quadratic Programming (QP) and Linear Matrix Inequalities (LMI).

I. 서 론

지난 10년간 퍼지 논리는 공학 및 자연과학 분야에서 중요한 연구 분야로 각광을 받고 있다. 특히 제어 분야에서는 모델이 불확실한 경우나 언어적 제어가 가능한 분야를 중심으로 기존의 제어를 대체하는 방식으로 각광을 받고 있다[1-3]. 그러나 이러한 실제적 적용의 예와 달리 이론 분야에서는 아직도 많은 문제가 남아있는 것이 현실이다.

퍼지 제어기의 안정도에 대한 해석은 그중 가장 대표적인 예로 Tanaka등은 TS 퍼지 제어기의 안정도에 대하여 많은 연구 결과를 보고하였고 [4, 5], 최근에는 여러 다른 제어 학자들이 비슷한 문제를 다루게 있다[6]. Wang은 [7, 8]에서 적응 싱글톤 퍼지 제어기의 안정도를 해석하였고 [9]의 논문은 싱글톤 슬라이딩 퍼지 제어기에 대하여 안정도를 다루고 있다. 그러나 TS 퍼지 제어기의 안정도 해석과 비교할 때 일반적인 싱글톤 퍼지 제어기의 안정도에 대한 연구는 아직도 미비한 것이 사실이다.

따라서 본 논문에서는 싱글톤 퍼지 제어기에 대한 새로운 안정도 해석 방식을 새로이 제안하도록 한다. 제안한 방식은 해석적 방식이 아닌 수치적 방식으로 이차 계획법 (Quadratic Programming, QP)과 선형 행렬 부등식 (Linear Matrix Inequalities, LMI)을 결합하여 퍼지 제어 시스템의 안정도를 해석한다.

II. 싱글톤 퍼지 제어기

편의상 2-입력 1-출력의 퍼지 제어기를 생각한다.

$$R^{nm} : \textit{If } x_1 \textit{ is } A_1^n \text{ and } x_2 \textit{ is } A_2^m \quad \textit{then } u \textit{ is } u^{nm} \qquad (1)$$

이때 싱글톤 퍼지화기와 추론의 T 놈을 이용하면 퍼지 추론의 결과는 다음의 (2)식으로 주어진다.

$$u = Fuz(\boldsymbol{x}) = Fuz(x_1, x_2) = \\ = \sum_{n=1}^{b}\sum_{m=1}^{a} \Omega^{nm}(x_1, x_2)u^{nm} \qquad (2)$$

여기서 $\Omega^{nm}(x_1, x_2) = \dfrac{A_1^n(x_1)A_2^m(x_2)}{\sum_r\sum_s A_1^r(x_1)A_2^s(x_2)}$ 는 퍼지 기저함수이다. 안정도 해석을 용이하게 하기 위하여 전건부 소속함수는 그림 1과 같은 비모순적 삼각형

함수를 이용하도록 한다.

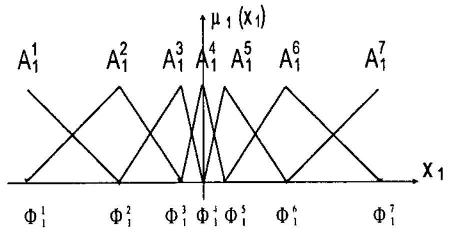

그림 1. 전건부 소속함수
Fig. 1. Premise membership functions

이 경우 한 쌍의 데이터 (x_1, x_2) 에 대하여 4개의 퍼지 규칙만이 활성화되며 퍼지 시스템은 다음의 식 (3)과 같이 정리된다.

$$u = Fuz(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{p}\sum_{m=1}^{q}\Omega^{nm}(x_1, x_2)u^{nm}$$
$$= \sum_{n=1}^{p}\sum_{m=1}^{q}A_1^n(x_1)A_2^m(x_2)u^{nm} \qquad (3)$$

III. 문제의 구성

보조정리 1

입력이 $\Phi_1^n \le x_1 \le \Phi_1^{n+1}$, $\Phi_2^m \le x_2 \le \Phi_2^{m+1}$ 인 경우 (3)의 퍼지 제어기로부터의 출력은 다음과 같은 양선형의 특성을 갖는다.

$$Fuz(x_1, x_2) = \qquad (4)$$
$$C_{12}^{nm}x_1x_2 + C_1^{nm}x_1 + C_2^{nm}x_2 + C_0^{nm}$$

여기서 C_{12}^{nm}, C_1^{nm}, C_2^{nm}, C_0^{nm} 는 Φ_1^n, Φ_1^{n+1}, Φ_2^m, Φ_2^{m+1}, u^{nm} 등에 의존하는 상수이다. ■

다음의 (n, m) 영역을 생각한다.

$$\Phi_1^n \le x_1 \le \Phi_1^{n+1}$$
$$\Phi_2^m \le x_2 \le \Phi_2^{m+1}$$

(n, m) 영역에서 보조 정리 1에 의해 퍼지 제어기의 출력은 식 (4)의 양선형으로로 나타나며 안정도 해석을 위g 영역별 섹터 유계 (sector-bound)한다.

$$\underline{K}^{nm}\boldsymbol{x} \equiv \underline{k_1}^{nm}x_1 + \underline{k_2}^{nm}x_2 \le \qquad (5)$$
$$Fuz(x_1, x_2) = C_{12}^{nm}x_1x_2 + C_1^{nm}x_1 + C_2^{nm}x_2 + C_0^{nm}$$
$$\le \overline{K}^{nm}\boldsymbol{x} \equiv \overline{k_1}^{nm}x_1 + \overline{k_2}^{nm}x_2$$

여기서 $\boldsymbol{x} \equiv [x_1 \ x_2]^T$,

$\underline{K}^{nm} \equiv [\ \underline{k_1}^{nm} \ \ \underline{k_2}^{nm}]$ $\overline{K}^{nm} \equiv [\ \overline{k_1}^{nm} \ \ \overline{k_2}^{nm}]$ 이다. 식(5)에서 $\underline{K}^{nm}$ 과 $\overline{K}^{nm}$ 를 유도하는 문제는 식 (6)의 $\underline{\gamma_1}^{nm}$, $\underline{\gamma_2}^{nm}$, $\overline{\gamma_1}^{nm}$, $\overline{\gamma_2}^{nm}$ 를 유도하는 문제와 같은 것이다.

$$\underline{\gamma_1}^{nm}x_1 + \underline{\gamma_2}^{nm}x_2 \le$$
$$C_{12}^{nm}x_1x_2 + C_0^{nm}$$
$$\le \overline{\gamma_1}^{nm}x_1 + \overline{\gamma_2}^{nm}x_2 \qquad (6)$$

즉, $\underline{\gamma_1}^{nm}$, $\underline{\gamma_2}^{nm}$, $\overline{\gamma_1}^{nm}$, $\overline{\gamma_2}^{nm}$ 로부터 쉽게 $\underline{K}^{nm}$ 과 $\overline{K}^{nm}$ 을 유도할 수 있다. 이때 식 (6)은 x_1과 x_2가 유계되어 있기 때문에 무수히 많은 $\underline{\gamma_1}^{nm}$, $\underline{\gamma_2}^{nm}$, $\overline{\gamma_1}^{nm}$, $\overline{\gamma_2}^{nm}$ 가 존재 가능하다. 그중 가장 비보수적인 (unconservative) 안정도 해석을 위해서는 가장 엄격한 $\underline{\gamma_1}^{nm}$, $\underline{\gamma_2}^{nm}$, $\overline{\gamma_1}^{nm}$, $\overline{\gamma_2}^{nm}$ 을 필요로 하게 된다. 다음 장에서는 이 같은 영역별 섹터 유계값을 구하는 문제를 이차계획법의 형태로 바꾸어 수치적으로 해석하도록 한다.

IV. 이차계획법에 의한 퍼지 시스템의 다형 시스템 변환

본 장에서는 영역별로 가장 엄격한 섹터 유계값인 $\underline{\gamma_1}^{nm}$, $\underline{\gamma_2}^{nm}$, $\overline{\gamma_1}^{nm}$, $\overline{\gamma_2}^{nm}$ 을 이차 계획법을 이용하여 구하도록 한다. 우선 엄격한 상한 섹터 유계 $\overline{\gamma_1}^{nm}$과 $\overline{\gamma_2}^{nm}$를 구하는 문제를 생각하도록 한다. 상한 섹터 유계 $\overline{\gamma_1}^{nm}$과 $\overline{\gamma_2}^{nm}$를 구하는 문제는 다음의 조건 (C1)과 (C2)를 구하는 문제로 해석할 수 있다.

(C1) $\overline{\gamma_1}^{nm}$과 $\overline{\gamma_2}^{nm}$ 는 다음의 부등식을 만족하도록 한다.

$$\overline{f}^{nm}(x_1, x_2) \equiv (\ \overline{\gamma_1}^{nm}x_1 + \overline{\gamma_2}^{nm}x_2) -$$
$$(C_{12}^{nm}x_1x_2 + C_0^{nm}) \ge 0$$

for $\Phi_1^n \le \forall x_1 \le \Phi_1^{n+1}$, $\Phi_2^m \le \forall x_2 \le \Phi_2^{m+1}$.

(C2)

$$[\ \overline{\gamma_1}^{nm},\ \overline{\gamma_2}^{nm}] = \arg\min\ \overline{F}^{nm}(\ \overline{\gamma_1}^{nm},\ \overline{\gamma_2}^{nm})$$

$$= \arg\min \frac{1}{2}\int_{x_2=\Phi_2^m}^{\Phi_2^{m+1}}\int_{x_1=\Phi_1^n}^{\Phi_1^{n+1}}\{\ \overline{f}^{nm}(x_1,x_2)\}^2 dx_1\, dx_2$$

$$= \arg\min \frac{1}{2}\int_{x_2=\Phi_2^m}^{\Phi_2^{m+1}}\int_{x_1=\Phi_1^n}^{\Phi_1^{n+1}}\Big\{(\ \overline{\gamma_1}^{nm}x_1 + \overline{\gamma_2}^{nm}x_2)$$

$$-(C_{12}^{nm}x_1x_2 + C_0^{nm})\Big\}^2 dx_1\, dx_2$$

여기서

$$\overline{F}^{nm}(\ \overline{\gamma_1}^{nm},\ \overline{\gamma_2}^{nm}) = \int_{x_2=\Phi_2^m}^{\Phi_2^{m+1}}\int_{x_1=\Phi_1^n}^{\Phi_1^{n+1}}\{\ \overline{f}^{nm}(x_1,x_2)\}^2 dx_1\, dx_2 .$$

조건 (C1)은 다음의 조건 (C3)과 등가라 할 수 있다.

(C3)

$$\overline{f}^{nm}(\Phi_1^n, \Phi_2^m) \ge 0,\quad \overline{f}^{nm}(\Phi_1^n, \Phi_2^{m+1}) \ge 0$$

$$\overline{f}^{nm}(\Phi_1^{n+1}, \Phi_2^m) \ge 0,\quad \overline{f}^{nm}(\Phi_1^{n+1}, \Phi_2^{m+1}) \ge 0$$

따라서 (C2)과 (C3)을 이용하면 가장 엄격한 $\overline{\gamma_1}^{nm}$, $\overline{\gamma_2}^{nm}$을 구하는 문제는 다음의 최적화 문제로 해석할 수 있다.

$$[\ \overline{\gamma_1}^{nm},\ \overline{\gamma_2}^{nm}] \tag{7}$$

$$= \arg\min\ \overline{F}^{nm}(\ \overline{\gamma_1}^{nm},\ \overline{\gamma_2}^{nm})$$

$$= \arg\min \frac{1}{2}\int_{x_2=\Phi_2^m}^{\Phi_2^{m+1}}\int_{x_1=\Phi_1^n}^{\Phi_1^{n+1}}\Big\{(\ \overline{\gamma_1}^{nm}x_1 + \overline{\gamma_2}^{nm}x_2)$$

$$-(C_{12}^{nm}x_1x_2 + C_0^{nm})\Big\}^2 dx_1\, dx_2$$

subject to

$$\overline{f}^{nm}(\Phi_1^n, \Phi_2^m) \ge 0,\quad \overline{f}^{nm}(\Phi_1^n, \Phi_2^{m+1}) \ge 0$$

$$\overline{f}^{nm}(\Phi_1^{n+1}, \Phi_2^m) \ge 0,\quad \overline{f}^{nm}(\Phi_1^{n+1}, \Phi_2^{m+1}) \ge 0$$

,

이 최적화 문제에서 목적함수인 식 (7)은 벡터의 2차 함수의 형으로 변형될 수 있고 따라서 즉 상한 섹터 유계 $\overline{\gamma_1}^{nm}$과 $\overline{\gamma_2}^{nm}$을 유도하는 문제는 다음의 이차계획법 문제로 변형된다.

$$\arg\min \frac{1}{2}(\ \overline{\boldsymbol{\gamma}}^{nm})^T\overline{\boldsymbol{H}}^{nm}\,\overline{\boldsymbol{\gamma}}^{nm} + (\ \overline{\boldsymbol{C}}^{nm})^T\,\overline{\boldsymbol{\gamma}}^{nm}$$

$$\text{subject to}\quad \overline{\boldsymbol{A}}^{nm}\,\overline{\boldsymbol{\gamma}}^{nm} \le \overline{\boldsymbol{b}}^{nm}.$$

여기서 $\overline{\boldsymbol{\gamma}}^{nm} = \begin{pmatrix}\overline{\gamma_1}^{nm}\\ \overline{\gamma_2}^{nm}\end{pmatrix}$, $\overline{\boldsymbol{H}}^{nm} = \begin{pmatrix}\overline{D_{11}}^{nm} & \overline{D_{12}}^{nm}\\ \overline{D_{12}}^{nm} & \overline{D_{22}}^{nm}\end{pmatrix}$,

$$\overline{\boldsymbol{C}}^{nm} = \begin{pmatrix}\overline{D_1}^{nm}\\ \overline{D_2}^{nm}\end{pmatrix},\qquad \overline{\boldsymbol{A}}^{nm} = \begin{pmatrix}-\Phi_1^n & -\Phi_2^m\\ -\Phi_1^n & -\Phi_2^{m+1}\\ -\Phi_1^{n+1} & -\Phi_2^m\\ -\Phi_1^{n+1} & -\Phi_2^{m+1}\end{pmatrix},$$

$$\overline{\boldsymbol{b}}^{nm} = \begin{pmatrix}-(C_{12}^{nm}\Phi_1^n\Phi_2^m + C_0^{nm})\\ -(C_{12}^{nm}\Phi_1^n\Phi_2^{m+1} + C_0^{nm})\\ -(C_{12}^{nm}\Phi_1^{n+1}\Phi_2^m + C_0^{nm})\\ -(C_{12}^{nm}\Phi_1^{n+1}\Phi_2^{m+1} + C_0^{nm})\end{pmatrix}$$ 이고

$$\overline{D_{11}}^{nm} = \frac{1}{3}\{(\Phi_1^{n+1})^3 - (\Phi_1^n)^3\}\{\Phi_2^{m+1} - \Phi_2^m\}$$

$$\overline{D_{22}}^{nm} = \frac{1}{3}\{\Phi_1^{n+1} - \Phi_1^n\}\{(\Phi_2^{m+1})^3 - (\Phi_2^m)^3\}$$

$$\overline{D_{12}}^{nm} = \frac{1}{4}\{(\Phi_1^{n+1})^2 - (\Phi_1^n)^2\}\{(\Phi_2^{m+1})^2 - (\Phi_2^m)^2\}$$

$$\overline{D_1}^{nm} = -\frac{1}{2}C_0^{nm}\{(\Phi_1^{n+1})^2 - (\Phi_1^n)^2\}\{\Phi_2^{m+1} - \Phi_2^m\}$$

$$-\frac{1}{6}C_{12}^{nm}\{(\Phi_1^{n+1})^3 - (\Phi_1^n)^3\}\{(\Phi_2^{m+1})^2 - (\Phi_2^m)^2\}$$

$$\overline{D_2}^{nm} = -\frac{1}{2}C_0^{nm}\{\Phi_1^{n+1} - \Phi_1^n\}\{(\Phi_2^{m+1})^2 - (\Phi_2^m)^2\}$$

$$-\frac{1}{6}C_{12}^{nm}\{(\Phi_1^{n+1})^2 - (\Phi_1^n)^2\}\{(\Phi_2^{m+1})^3 - (\Phi_2^m)^3\}$$

V. 선형 행렬 부등식을 이용한 퍼지 제어 시스템의 안정도 해석

앞에서 언급한 바와 같이 싱글톤형 퍼지 제어기는 (n, m) 영역에서 다음의 식 (8)과 같이 영역별 섹터 유계된다.

$$\underline{\boldsymbol{K}}^{nm}\boldsymbol{x} \le \quad Fuz(x_1, x_2)\ _{,} \le \overline{\boldsymbol{K}}^{nm}\boldsymbol{x} \tag{8}$$

이때 퍼지 제어기는 다음의 다형시스템으로 볼 수 있다.

$$Fuz(\boldsymbol{x}) = \mathrm{Co}\{\ \overline{\boldsymbol{K}}^{11},\ \overline{\boldsymbol{K}}^{12}, \cdots,\ \overline{\boldsymbol{K}}^{(p-1)(q-1)},\ \underline{\boldsymbol{K}}^{11},\ \underline{\boldsymbol{K}}^{12}, \cdots,\ \underline{\boldsymbol{K}}^{(p-1)(q-1)}\}\boldsymbol{x} \tag{9}$$

제어 대상이 다음의 식(10)과 같을 때 (9)의 퍼지 제

어기로 구성된 시스템과 결합된 폐루프 시스템은 식 (11)로 표현된다.

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \tag{10}$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + BFuz(x) = \mathrm{Co}\{(A+B\overline{K}^{11}),(A+B\overline{K}^{12}),\cdots,(A+B\underline{K}^{(p-1)(q-1)})\}x \tag{11}$$

[10]의 정리를 식 (11)의 다형 시스템에 직접 적용하여 공통의 양한정 행렬 P를 구하여 안정도를 보장할 수 있다. 이 경우 다음의 선형 행렬 부등식이 해가 존재한다면 식 (1)로 구성된 퍼지 제어기로 제어되는 퍼지 시스템은 이차적으로 안정하다.

VI. 결 론

본 논문에서는 싱글톤 퍼지 제어기에 대하여 안정도를 해석하는 새로운 접근 방식을 제안하였다. 제안한 알고리즘은 기존의 안정도 해석방식과는 달리 해석적 접근이 아닌 수치적 접근을 통해 퍼지 제어기를 포함한 시스템의 안정도를 해석하는 방식이다.

참고문헌

[1] C. C. Lee, "Fuzzy logic in control systems: Fuzzy logic control - Part I, II" *IEEE Trans. Sys. Man and Cyber.*, vol. 20, pp. 404-435, 1990.

[2] D. Driankov, H. Hellendoorn, and M. Reinfrank, *An Introduction to Fuzzy Control,* Springer-Verlag: Berlin, 1993.

[3] J. J. Buckley, "Theory of the fuzzy controller: a brief survey," in *Cybernetics and Applied Systems,* C. V. Negoita, Ed., New York: Marcel Dekker, 1992, pp. 293-307

[4] H. O. Wang, K. Tanaka, M. F. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 4, No. 1, pp 14-23, Feb 1996.

[5] K. Tanaka and T. Kosaki, "Design of a stable fuzzy controller for an articulated vehicle," *IEEE Trans. Sys. Man and Cyber. B: Cyber.,* vol. 27, No.3 Jun. 1997.

[6] K. S. Narendra and J. Balakrishnan, "A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices," *IEEE Trans. Automat. Contr.,* vol. 39, pp. 2469-2471, Dec. 1994.

[7] L. X. Wang, *A Course in Fuzzy Systems and Control*, NJ: Prentice-Hall, 1997

[8] L. X. Wang, "Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 1, no. 2, pp 146-155, Feb 1993.

[9] J. C. Wu and T. S. Liu, "A sliding mode approach to fuzzy control design," *IEEE Trans. Contr. Sys. Tech.*, vol. 4, no. 2, pp 141-151, Mar 1996.

[10] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory,* SIAM: Philadelphia, 1994