Auction 알고리즘의 수학적 등가를 이용한 최단경로에 관한 연구

우경환*, 홍용인**, 최상국***,이천희****
우송공업대학*, 부산정보대학**, ETRI***, 청주대학교****
전화: 0431) 229-8448/ 팩스 : 0431) 213-6392

A Study on the Shortest Path using the Mathematical Equivalence of the Auction Algorithm

Woo, Kyonghwan* Hong, Yongin** Choi, Sangkuk*** Yi, Cheon Hee****
Woosong Technical college* Pusan Information and Technical college**
ETRI*** Cheong Ju University****
E-mail : yicheon@chongju,ac,kr

Abstract

At each iteration, the path is either extended by adding a new node, or contracted by deleting its terminal node. When the destination becomes the terminal node of the path, the algorithm terminate. In the process of finding the shortest path to given destination, the algorithm visits other node, there by obtaining a shortest path from the origin to them.

We show here that when the auction algorithm is applied to this equivalent program with some special rules for choosing the initial object prices and the person submitting a bid at each iteration, one obtains the generic form of the ε-relaxation method. Thus, the two methods are mathematically equivalent

1. 서론

본 논문에서는 Bertsekas[1]에 의해 제안된 최단 경로 문제를 위해 auction 알고리즘에 촛점을 맞추었다. 이 알고리즘은 Bertsekas가[2] 처음 도입하였고 할당 문제를 위해 원시적인 auction 알고리즘에 대한 문제는[3] 다른 네트워크에서 auction 알고리즘에 밀접하게 관계된다. 또한 이 관계를 해석한 단일 원점과 단일 목적지인 경우에 이 알고리즘은 매우 간단하므로 원점에서 출발하는 단일 패스를 유지하게 된다. 각 반복에서 경로는 새로운 노드를 추가하기 위해 확장하거나 그것의 종단 노드를 제거하기 위해 감소하며 목적지 경로가 종단 노드가 될 때 알고리즘은 종료하게 된다.

본 논문은 auction 알고리즘이 각각의 반복에서 분산계산을 하는 개체와 초기의 대상 가격을 선택하기 위하여 동일한 문제에 적용이 될 때, 개체는 ε-이완법의[4],[5] 일반적인 형태에서 얻는다. 다시 말해서 만약 최단경로 흐름 문제의 특별한 경우로서 각 노드를 할당하는 ε-이완법을 적용함으로 수학적 등가를 이용하여 최단경로를 산출하는 auction 알고리즘을 구현하였다.

2. 할당을 위한 원시 Auction 알고리즘

Auction 알고리즘에서 전통적인 대칭 할당 문제에서, 1대1방식으로 결합해야하는 n

개체와 n 대상이 있다. 대상 j와 개체 i을 결합시키기 위해서 이득 a_{ij}가 있을 때, 총 이득을 최대화하기 위해 개체를 대상에 할당하여야한다. 연결될 수 있는 한 쌍의 집합(i, j)이 있을 때, 개개의 개체 i에 대하여, i와 함께 결합할 수 있는 대상의 집합을 $A(i)$로 표시할 수 있다.

$$A(i) = \{j|(i,j) \in A\}$$

그리고 각 대상에 대해서, j를 연결시킬 수 있는 개체의 집합을 B(j)로서 표시한다.

$$B(j) = \{ i \ | (i,j) | \ \in A\},$$

할당에 의해서, 각 개체 i와 각 대상이 S에서, 가장 많은 하나의 쌍에 포함되는 것처럼 개체-대상의 쌍(i,j)의 집합을 S로 표시할 수 있다. 만일 S에서 쌍의 수가 n이라면 그래서 모든 개체가 별개의 대상으로 할당된다면 S는 실행할 수 있다고 말한다. 그렇지 않으면 S는 실행 불가능하다고 말할 수 있다.

할당문제에 있어서 원시적 auction 알고리즘은 반복을 진행하고 가격 벡터와 할당의 결과를 초래한다. 각 반복 시 CS(상보성) 조건은 다음과 같다.

$$a_{ij} - p_{ji} = \max_{j \in A(i)} \{a_{ij} - p_j\} \qquad (1)$$

할당에 있어서 모든 쌍r(i,j)을 충족시키며, 만일 모든 개체가 할당된다면, 알고리즘은 종료한다. 그렇지 않으면 할당되지 않은 개체 i의 비어 있지 않은 부분집합 I가 선정되고 다음과 같은 계산이 실행된다.

Bidding phase(분산 계산 위상) : 각 개체 $i \in I$는 최대의 가치를 제공하는 대상을 찾는다.

$$j_i \in \arg \max_{j \in A(i)} \{a_{ij} - p_j\} \qquad (2)$$

Assignment phase(할당 위상) : I에서 개체의 비어있지 않은 부분 집합에 의해 최고의 대상으로서 선정된 각 대상은 가장 높은 분산 계산자를 결정한다.

$$i_j = \arg \max_{i \in p(j)} \gamma_i \qquad (3)$$

알고리즘은 모든 개체가 대상을 할당하게 될 때까지 반복을 계속한다. 또한 각각 개체들의 전형적 반복에 대한 중요 성분은 다음과 같다.

(a) ε-CS는 유지되어야한다.

(b) 적어도 할당되지 않은 하나의 개체는 어떠한 대상에도 할당될 수 있다.

(c) 감소되는 가격은 없으며, 반복의 시작에서 할당된 모든 대상은 반복의 끝에서 할당이 종료된다.

3. Auction 알고리즘에 의한 전형적 반복/최단경로

각 원호(i,j)에 대해서 노드 집합을 N, 원호 집합을 A, 원호(i,j)를 위한 길이 a_{ij}에 그래프를 제공한다고 가정하자. 이 부분에서 경로에 의해 (i_m, i_{m+1})이 모든 m=1,$\cdots$, k-1에 대하여 원호라는 것과 같이 $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$노드의 순서를 의미한다. 만일 추가된 노드 $i_1, i_2, \cdots, i_k$가 별개라면, 순차적$(i_1, i_2, \cdots ik)$는 단순경로라 하며, 원점에서 시작하고(노드 1) 주어진 도착지(노드 t)에서 종료하는 모든 경로에 대하여 최단 경로를 찾을 수 있다.

그림 1에서 보듯이 최단경로와 수학적 등가 문제를 해결하기 위하여 auction 알고리즘을 적용할 수 있다.

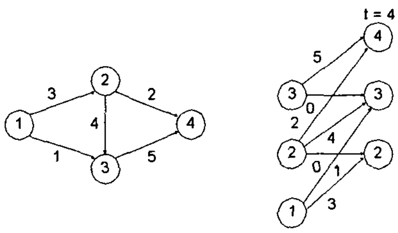

그림 1 : 최단 경로 문제(원점 = 1, 도착점 t= 4)와 최단경로 문제의 수학적 등가 문제

여기에서 결과는 경로 p=(1, i_1, ..., i_k)와 일치한다. $i_k \neq t$, 로 인한 원시 auction 알고리즘에서 할당되지 않은 개체 경로의 종단 노드에 상응하는 개체 i'_k이다.

(a) i'_{k-1}은 할당할 수 없게 되고 새로운 할당에 상응하는 경로$(1,i_1, \cdots, i_{k-1})$은 하나의 노드에 의해 "축소"를 거쳐서 이전의 경로 $(i, I_1, I_2, \cdots, i_k)$로부터 얻을 수 있는 경우에 최고의 대상은 i_k이다.

(b) 최고의 대상은 $i_{k+1} \neq i_k$ 이다.

경로 P는 새로운 노드에 의해 확장하거나 종단 노드를 삭제함으로써 축소되는 것이다. 따라서 전형적 반복은 다음과 같다. 즉, i를 P의 종단 노드에 둘 때 auction 알고리즘의 전형적인 반복/ 최단 경로는 다음과 같다.

$$p_i < \min_{\{j|(i,j)\in A\}} \{a_{ij}+p_j\} \text{ 이면}$$

단계 1을 실행하고 ; 그렇지 않으면 단계 2를 실행한다..

단계 1(경로 축소):

$$p_i := \min_{\{j|(i,j)\in A\}} \{a_{ij}+p_j\}$$

그리고 if $i \neq 1$이면, P를 축소하고 다음 반복을 실행.

단계 2(경로 확장): 노드 j_i에 의하여 P를 확장한다.

$$j_i = \arg \min_{\{j|(i,j)\in A\}} \{a_{ij}+p_j\}$$

만약 j_i가 목적지 노드 t라면 종료하고; P는 최단경로를 요구한다. 그렇지 않으면, 다음반복으로 간다.

4. 최단경로를 위한 ε-이완법의 도출

국소적인 제약 조건이 주어졌을 때 모든 국소적인 조건을 만족시키는 광역적인 결과를 구하기 위하여 각기 국소 조건을 충족하는 대상을 서서히 좁혀가는 이완법에 의해 개체 i가 j에 할당되거나 또는 가장 최고의 대상으로서 j를 고려할 때 auction의 과정에서 최단경로대상 j를 p_j라 한다면, i에 대한 이득의 현재 수준으로서 가치 $a_{ij} - p_j$를 보여줄 수 있다. 만약(π,p)가 이득-가격 쌍이고, S가 할당된다면 quadruplet$(\pi,p,S,\overline{S})$는 ε-coupled라고 주장할 수 있다.

알고리즘은 ε-coupled quadruplet$(\pi,p,S,\overline{S})$에서 시작하고, 그것을 유지한다. auction 반복은 $\overline{S}$의 어떤 쌍에도 포함이 되지 않은 몇몇 개체들을 포함하고 있는 유사계급 M을 찾아내는 것으로 시작한다. 이것은 동일한 수송 문제에서 나가는 흐름의 총계가 공급보다 적은 것과 같은 노드 i를 발견하는 것과 동일하다.

$$\sum_{\{j|(i,j)\in A\}} y_{i(i,j)} + \sum_{\{j|(j,i)\in A\}} z_{i(j,i)} \quad (4)$$

$$s_i + \sum_{\{j|(j,i)\in A\}} c_{ji} \quad (5)$$

위에서 두 개의 양들이 다른 것은 노드 i의 나머지이며, 다음 정의의 관점에서 g_i로 표시한다.

$$y_{i(i,j)} = x_{ij}, \qquad z_{i(j,i)} = c_{ji} - x_{ji} \quad (6)$$

그래서 auction 알고리즘 에서, 각각 (M-auction)반복이 양수 나머지 g_i과 함께 노드 i에 일치하는 유사계급 M에 의한 분산계산을 포함한다는 것을 알 수 있다. Auction 알고리즘의 법칙에 따르면, node i는 아래와 같아야 한다.

(a) 유사계급 가치의 견지에서 부대 적인 원호에 일치하는 대상의 등급을 메긴다.
(b) 나머지 유사계급 노드를 만족시키는 충분한 수를 선택한다.
(c) 최고 대상 ε을 뺀 값에서 유사계급 값을 내리는, 또는 다음 대상 ε을 뺀 것의 이득까지 이득 π_i을 동일하게 감소하는 대상을 위하여 적절하게 가격 상승을 실시한다.
(d) 유사계급 노드가 정확하게 하나의 대상마다 하나의 쌍을 포함하기 위해서 집합 $\overline{S}$를 조정한다.

그러므로 반복하는 노드 i는 일치하는 대상의 값에 의하여 나가는 원호(i, j)와 들어오는 원호(j, i)의 순서를 정해야만 한다. 동시에 원호 (i, j)와 함께 나가는 이웃 노드 j에 흐름을 증가시키는 노드 i에 대한 순서에 의해서 원호 (i, j)의 대상들에게 할당되는 경로에서 j의 유사계급 개체들과 같이 이룬 원호(i, j)의 대상들의 경로 단계까지 증가시켜야한다.

동일 할당 문제에 적용된 전형적인 M-auction 반복을 살펴보면 다음과 같다.

단계 1: (부수적인 원호의 주사)

ε^+-unblocked된 원호의 a(i, j)원호 을

선택하고, 단계 2로 간다, 또는

ε^{-}-unblocked된 원호(j, i)을 선택하고, 단계 3으로 간다. 만약 이러한 원호가 발견될 수가 없다면, 단계 4로 간다.

단계 2: (이전의 원호(i, j)에 따른 흐름의 확장) δ = min $\{g_i,\ c_{ij}-x_{ij}\}$ 만큼 x_{ij}를 증가시켜라. 만약 지금 g_i = 0과 x_{ij} < c_{ij} 라면 멈추고: 그렇지 않으면 단계 1로 실행을 옮긴다..

단계 3: (이후의 원호(j, i)에 따른 흐름의 확장) δ = min $\{g_i,\ x_{ji}\}$ 만큼 x_{ji}를 줄인다. 만약 g_i = 0과 b_{ji} < x_{ji} 이라면 멈추고: 그렇지 않다면 단계 1로 실행을 옮긴다.

단계 4: (노드 i의 가격 증가)

$$\min\{\{p_j + a_{ij} + \varepsilon \mid (i,j) \in A \text{ and } x_{ij} < c_{ij}\},\ \{p_j - a_{ij} + \varepsilon \mid (j,i) \in A \text{ and } b_{ji} < x_{ji}\}\}$$

단계까지 p_i를 증가시켜라.

최단경로에 도달할 때까지 단계 1로 가서 반복 실행한다.

노드 i의 부수적인 원호에 일치하는 대상들처럼, 이등 할당은 단계2와 3을 통해서 다중경로를 이용하여 이루어진다.[6] 적절한 단계까지 단계 4는 가격 p_i를 증가시키며, 새로운 개체들이 각각의 대상들에 할당되어질 때 동일한 할당 문제에 일치하는 quadruplet는 ε-coupled로 남는다. 단계 1은 현재 경로로 할당되어질 수 있는 대상이 존재하는지를 점검하고, 그러한 대상이 존재하지 않을 때 경로 변경을 위하여 단계 4로 전환된다.

5. 결론

원시 auction 알고리즘의 전형적 반복/최단 경로 알고리즘에서는 상보성(CS)조건을 만족시키는 하나의 쌍(P,p)을 수정에 의하여 알고리즘을 계속 반복하면서 수행하였다.

본 논문에서는 선형 망 흐름문제에서 전통적인 auction 알고리즘과 전형적인 반복/최단경로 auction 알고리즘을 사용하여, 상보성 조건을 만족하는 측면에서 수축경로와 확장 경로를 반복 실행하는 전형적 반복과 최단경로를 구현과 ball-and-strings 모델의 관점에서 auction/최단 경로 알고리즘 연구하였다. 또한 auction 알고리즘에 ε-이완법을 적용하여 최단경로를 도출하는 방법을 구현하여 보았다.

앞으로의 연구과제로는 환원 그래프에 의한 auction 알고리즘 연구와 k 노드-병행 최단경로 문제 이용 선형 망 구조를 간략화 하는 방법과 비대칭 할당 문제를 위한 역 auction 알고리즘을 연구함으로써 PCB 회로 설계에 적용하고자 한다.

참 고 문 헌

1. Bertsekas, D. P., "A The Auction Algorithm for Shortest Paths," SIAM H. on Optimization, Vol. 1, 1991, pp. 425-447
2. Bertsekas, D. P., "A Formard/Reverse Auction Algorithm for the Asymmetric Problem," Alphatech Report, Burlington, MA, April 1992.
3. Bertsekas, D. P., "The Auction Algorithm for Assignment and Other Network Flow Problems:A Tutorial," Interface, Vol. 20, 1990, pp. 133-149.
4. Bertsekas, D.P. and Polymenakos, L., "Parallel Shortest Path Auction Algorithms, " Lab. for information and Decision System Report, M.I.T., April 1992.
5. Bertsekas, D.P., "Liner Network Optimization; Algorithm and Codes, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1991
6. Goldberg, A. V., and Tarjan, R. E., " Solving Minimum Cost Flow Problems by Successive Approximation", Math. of Operations Research, Vol. 15, 1990, pp. 430-466.